はじめに

拙著「ビジュアルアプローチ　材料力学」が粗削りながら出版されてからかれこれ8刷になってしまいました．この間，読者の方々からのご指摘も含めて多くの訂正を行ってきた．この場を借りてお礼を申し上げるとともにお詫び申し上げます．

かねてから気になっていた点は同書に例題演習が少ないことで，これを補完する目的で本書を企画したが，著者らの怠慢や遅々として固まらない内容のなどのせいもあって出版物として日の目を見ることなくボツってしまったため，Webに掲載して広く公開することに決めた．出版社の担当者の方々には多大なご迷惑をおかけしたことをここでお詫びいたします．

本書では「ビジュアルアプローチ　材料力学」で展開した静力学を基礎とした材料力学の考え方をより徹底させることにした．そのため，次のような点を心がけた．

1．高校卒業程度の静力学の知識を基礎にして材料力学を理解する．
2．フリーボディダイヤグラムの考え方をより徹底した．
3．基本的な例題から難しい例題，応用性のある例題をできるだけ入れた．

1．の点については，第1章「静力学と材料力学」の最初で高校卒業程度の静力学の知識の確認から始めて材料力学との間の橋渡しを試みた．2．の点については，しつこいくらいに全編を通して入れた．3．の点については，全部で約200題程度の例題を，基本例題，発展例題，応用例題の三つのカテゴリーに分け[1]

○基本例題：必ず理解してほしい内容

○応用例題：基本例題の知識で解ける例題か次に触れる発展例題で導かれている式に数値を入れて計算する例題

○発展例題：少し複雑か積分計算を必要とする例題で，積分計算が苦手の方は読み飛ばしてもかまわないができれば理解してほしい内容．上述の応用例題ではその結果のみ利用することがある

とした．各例題は「問題」，「指針」，「解答」，「解説」の構成にした．基本例題と応用例題だけで材料力学の大雑把な理解と実際の計算を理解できるようにしたつもりである．また，各章末には演習問題を付けた．ただ，演習問題には基本例題と応用例題を見ただけでは解けないものも多いので，演習問題にトライすることをきっかけにして発展例題の理解に努力してほしい．

なお，本書の内容は「ビジュアルアプローチ　材料力学」の章立てと対応しているわけではなく，内容はかなり絞った．具体的には，第1章は前述の通りで，第2章以降は

第2章：軸力系の不静定問題

[1]基本例題のグループ，発展例題のグループ，といった親切なグループ分けをしているわけではないので注意してほしい．実際，散らばっています．

第3章：ねじり（丸棒以外のねじりと薄肉断面棒のねじりを含む）

第4章：静定はりの応力とSFD, BMD

第5章：組み合わせ応力（主応力, ミーゼス応力などを含む）

第6章：はりのたわみと不静定はり

第7章：長柱の座屈, フレームの座屈

第8章：ひずみエネルギとそれを使った材料力学

第9章：はりの塑性変形(2016追加)

第10章：薄肉圧力容器(2016追加)

第11章：薄肉曲りはりとばねの力学(2016追加)

第12章：もう分類するのが面倒くさい(2020追加)

となっている. (入れてほしい例題があれば, 提案してください. 疲れたのでしばし休止します)

2016年02月05日
2016年02月18日
2016年03月18日
2016年03月23日
2016年10月14日
2017年08月01日
2020年01月07日
2021年05月01日
2022年10月21日
著者ら記す

お詫び

1. 絵は手描きのものもあり, 絵に使われているシンボルと本文で使われているシンボルが異なっている場合があるが, 雰囲気で読んでほしい.

2. 図には, 一つ一つ出典をつけていないが他書からコピーしたものがある.「ビジュアルアプローチ　材料力学」から抜き出したもの,「SCHAUM'S OUTLINE SERIES -THEORY AND PROBLEMS OF Strength of Materials」から抜き出したもの,「Beer,F.P., Johnston,E.R. and DeWolf,J.T., Mechanics of materials, McGraw Hill」から抜き出したもの,「材料力学　上巻, 養賢堂」から抜き出したもの(2016,10,14), ホームページで公開されているものがある. なお, ホームページにアップされているものはどこにアップされていたか忘れてしまっています. 著者の責任です. お詫びいたします. 気づいた方は連絡ください.

3. 第6章に関しては,「応用例題」のカテゴリーはない. この章自体内容的に高度になるため, 数値を代入して計算する例題を作りにくかったことによる. 第5章までの内容とこの章の「基本例題」で機械構造物の要素設計

には十分かもしれない．
4．第4章はファイルサイズの関係で前半と後半を分けてつくったため，後半部の図の番号は図4.11+xといった表現になっている．後半部の本文からの参照は図4.yとなっている．y=11+xである．すみません．
5．第9章以降では演習問題はありません．(2016.10.14)

20160218補足
第8章の後半部に曲りはりの問題を投入した．これでもかというくらいに基本的な例題を入れたが，他の教科書や演習書の問題を解きなおしているうち，それらの中のいくつかの例題や演習問題の答えが「？」となった．何度か計算しなおしてヨレヨレになってしまったので，確認は完全ではないかもしれないが，オジサンの解を入れている．考え方や解き方を確認していただき，オジサンが間違えていれば一報ください．

20170801補足
上記「20160218補足」で，「第8章の後半部に曲りはりの問題を投入した．」と書いた．これは間違いで，前のversionで第11章として独立させたことをすっかり忘れてしまっていました．第8章を探した人，ごめんなさい．
うちの研究室の石 夏冰君が第8章まで目を通してくれていて，ずいぶん間違いを見つけてくれた．ここでお礼申し上げます．ついでに，第8章の後ろのほうに少し例題を追加しています．

20200107補足
まあ，いろいろと例題を追加してきましたが，性格に似合わな豆さゆえ，いつ破綻するかと思っていたら，案の定破綻に至りました．追加した章は第12章ですが，章のタイトルはついに，「もう分類するのが面倒くさい」になってしまいました．私の性格がよく現れたものです．内容と言えば，不静定はりの問題がほとんどですが，ここではクラペイロンの三モーメントの方法を解説して少し拡張してみました．

20210501補足
退職を機に，時間があったので，(味のある)手描きの図をdrawツールで描きなおしてみました．お気に入りの(？)図は手描きのままです．さすがに二次元のdrawツールで三次元的な図を描けないので，3D CADの力を借りています．特に大幅な変更や追加はありません．が，各章の頭を奇数ページになるように調整したので，その分総ページ数は増えています．内容が大幅に増えたわけではありません．ごめんなさい．

20221021補足
第7章と第12章に問題を追加，ところで，図を描く面倒くささから，つい「教科書の・・・」と書いてしまっている．ごめんなさい．気になる人は，ぜひ購入を．特にはりの部分は丁寧に書いたつもりなので，好評のようです．宣伝でした．

目次

いまのところ，全391ページ

第1章　静力学と材料力学

高校のときに学習した力学，特に，力のつりあいやモーメントは材料力学の基礎知識として重要な事柄であるが，意外と忘れている．あるいは，高校のときに学習した用語と材料力学で使う用語に微妙な違いがあるため，混乱する場合もある．

ここでは，復習のつもりで基本的な用語の確認や材料力学での用語について例題を通して学ぶ．また，力のつりあいやモーメントのつりあいを考える上で便利なフリーボディダイヤグラムについても学ぶ．

基本事項1（力のつりあいと材料力学）

1．ある物体に力がはたらいているとき，その物体に力を及ぼしている他の物体がある．つまり，力は及ぼしあっている．

2．力学では，力を作用点，作用線，大きさの三要素で表現し，通常，作用点から力の大きさに相当する長さで力の向きに矢印を書いた矢印線（つまり，ベクトル）を使う．材料力学でも矢印線を用いて力を表現するが，「物体に対して」が意識されるので，図1.1のように，

1）作用点は矢印線の始点だったり終点だったりするが対象物体の外にはない．

2）矢印線の長さに大きな意味はなく，向きに意味がある．

3）正負の考え方は本書の例題を通じて慣れる．

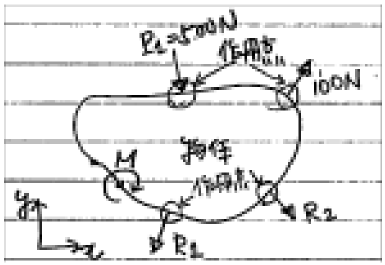


図1.1

3．力の単位はN（ニュートン）である．$1\,N=1\,kg{\cdot}m/s^2$であり，質量$1\,kg$の物体に$1\,m/s^2$の加速度を生じさせる力であるが，質量$1\,kg$の物体が重力加速度$1\,m/s^2$の惑星表面上にあるときに物体が惑星表面に及ぼす力でもある．地球上なら，質量$1\,kg$の物体は約$9.8\,N$の力を及ぼす．

基本例題1.01　質量がM=500 gの物体について考える．

1）この物体に常にはたらいている力を何と言うか．また，その力の作用点，力の大きさを答えよ．

2）この物体がハカリの上で静止しているとき，物体がハカリに及ぼす力の大きさはどれだけか．また，ハカリは何グラムを示すか．

3）2）の状態で，物体に接している面が物体に及ぼす力を何と言うか．

解答　1）重力．作用点は物体の重心で，大きさは約4.9 N．2）大きさは約4.9 N．ハカリは500 gを示す．3）抗力，垂直抗力．■

解説：物体が静止しているいないに関わらず，重力は常にはたらいている．物体が静止している場合には，重力を打ち消す力がはたらいている必要がある．2）の500 gより500gw（500重量グラム）が正しそうだ．3）の抗力という用語と同じような意味で使われる材料力学の用語に「反力」があるが，同じ意味ではない．

基本例題1.02　中ほどにバネBCを取り付けた糸の一端Aを**基本例題1.01**の物体の重心に取り付け，他端DにF=1 Nの力を上向きに加える（図1.2）．次の設問に答えよ．ただし，糸とバネの質量を無視し，バネ定数k=1 kN/mとする．

1）糸AB，バネBC，糸CDにはたらく力はどれだけか．

2）バネBCの伸びδを求めよ．

3）ハカリに表示される値はどれだけか．

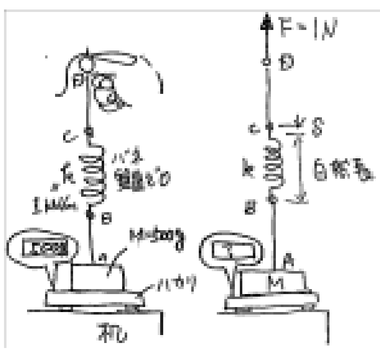


図1.2

解答　1）すべて1 N．2）$F=k\delta$から$\delta=F/k=1/1000=10^{-3}\ m=1\ mm$．3）物体が受ける垂直抗力は$0.5\times9.8-1=3.9\ N$．ハカリは重さを表示するので，約398 g．■

解説1：3）について考えると，物体がハカリに及ぼす力は約4.9 Nで下向き，糸ABが物体を引く力は1 Nで上向き．上向きの力と下向きの力はつりあっていない（和がゼロではない）ので，つりあうために何らかの力がはたらいている必要がある．この力をN（上向き）とすると，力のつりあい式は

$$Mg-F-N=0$$

となる．これから$N=Mg-F$が得られ，数値を代入すると$N=0.5\times9.8-1=3.9\ N$となる．

解説2：張力と弾性力

高校物理では，物体（この例題では，ハカリに載っている質量Mのこと）に対してどのような力がはたらいているかが問題になるので，「糸が物体を引く力を張力」といい，「バネが自然長に戻ろうとして物体におよぼす力を弾性力」という．「弾性」とは元の状態（バネなら自然長）に戻ろうとする性質である．

基本例題1.03　**基本例題1.02**の糸CDを切断した．このとき，ハカリは何グラムを指すか．また，その理由を述べよ．
指針「重力が作用しているから」という理由はだめ．糸CDの役割を考えること．

解答　500 gを示す．切断する前の糸CDには1 Nの力がはたらいていたが，切断によってこの力がなくなり，質量はハカリからの垂直抗力だけを受ける状態になったから．■

解説1：糸CDは点Cに上向きの張力Tを及ぼし，バネBCは点Cに下向きの力$k\delta$を及ぼしていた．ゆえに，$T=k\delta$が成り立って静止していたが，糸CDの切断によって$T=0$となり，同時にバネBCと糸ABにはたらいていた力もなくなり，質量はハカリからの垂直抗力だけを受ける状態になった．

解説2：点BとCの上下に糸とバネの一部を残して考えると，図1.3のように表すことができる．ここで糸やバネに考えた仮想的な切断面に生じている力を「内力」といい，材料力学では内力を求めることが目的の一つである．<u>図1.3の中で囲んだ対の力が内力である．</u>

解説3：図1.4のように，①ゴムシートを引っ張った状態で切れ目を入れると，②切れ目は開く．③切れ目の左右の辺を切れ目が閉じるように引っ張ると，④切れ目のない状態に戻るが，切れ目が開かないためにはこの力は常にはたらいていなければならない．この力が内力で，外力を受けた物体内部のいたるところで対で存在する．

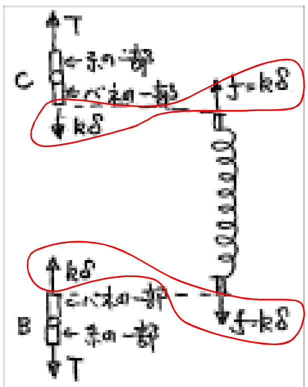


図1.3

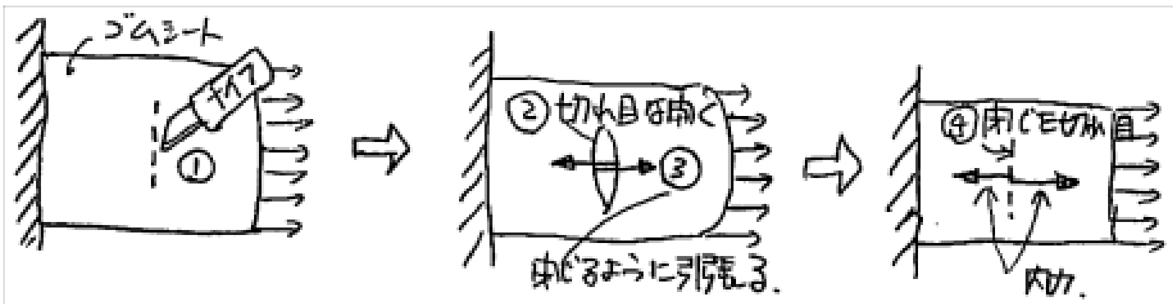


図1.4

基本例題1.04　基本例題1.02の糸CDの途中の点Eに図1.5のように下向きに$F_1=0.5\,N$の力がはたらいている．ハカリは何グラムを示すか．

指針　内力を考えて点AからEの力のつりあいを立てて考えること．

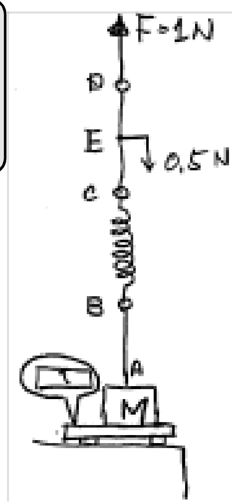


図1.5

解答　図1.6のように，各点で糸やバネの一部を残した状態での力のつりあいを考える．下向きの力にマイナス符号をつけて表すと，力のつりあい式は

Dについて　$F-T_1=0$

Eについて　$T_1-T_2-F_1=0$

Cについて　$T_2-k\delta=0$

Bについて　$k\delta-T_3=0$

物体について　$T_3+N-Mg=0$

というように順番に求めることができる．これらの式をすべて足し合わせると，

$$F-F_1+N-Mg=0$$

となり，これより垂直抗力Nは

$$N=Mg+F_1-F=0.5\times 9.8+0.5-1.0=4.4\,N$$

で，ハカリは約449 gを示す．■

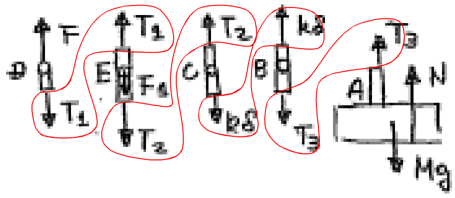


図1.6

解説：各点の力のつりあい式をすべて足した式$F-F_1+N-Mg=0$は系の外力のつりあい式になっている．消えてしまったT_1，T_2などは系の内力で対で存在している．つまり，系の内力は部分を見たときはじめて見える．

基本例題1.05　基本例題1.04で，系のすべての内力を求めよ．

指針　基本例題1.04の各点での力のつりあいの式から求める．

解答　ここでは，$T_3+N-Mg=0$から順に求めると，

$$T_3=Mg-N=4.9-4.4=0.5\,N,\qquad k\delta=T_3=0.5\,N,$$

$$T_2=k\delta=0.5\,N,\qquad T_1=T_2+F_1=0.5+0.5=1.0\,N$$

である．■

基本例題1.06　図1.7のように長さ1 mの棒の一端Aを固定してBとCに力(荷重とも言う)を加える．AB間とBC間に発生する内力を求めなさい．

指針　内力を仮定して外力との間のつりあいを考える．なお，一端Aを固定するのはそこから棒に力をはたらかせるためである(高校物理より)．すなわち，図1.8のように棒全体が動かないように端Aに力P_Aをはたらかせることと同じである．

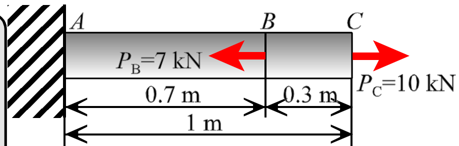


図1.7

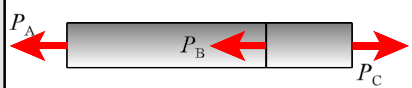


図1.8

解答　AB間とBC間の内力をN_{AB}とN_{BC}で表す（二つの添字で区間を表す）．Aにはたらく力をP_Aで左向きと仮定する．図1.9から，左向きの力にマイナス符号をつけて表すと，端A周辺部分の力のつりあいは

$$-P_A+N_{AB}=0$$

点Bを含む周辺部分の力のつりあいは

$$-N_{AB}-P_B+N_{BC}=0$$

端C周辺部分の力のつりあいは

$$-N_{BC}+P_C=0$$

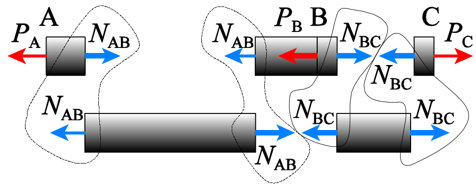


図1.9

である．**基本例題1.04**のようにこの三つの式を足し合わせると$-P_A-P_B+P_C=0$となり，これから$P_A=-P_B+P_C$．各内力は**基本例題1.05**のように

$$N_{AB}=P_A=-P_B+P_C,\quad N_{BC}=P_C.$$

数値を代入すると，

$$N_{AB}=3\,kN,\quad N_{BC}=10\,kN$$

となる．■

解説1：図1.8を図1.7に対する**フリーボディダイヤグラム**という．この例では，図1.7の端Aの固定拘束をはずし，代わりに端Aに外力P_Aをはたらかせている．

解説2：図1.3，1.6，1.9から内力を理解しておこう．

基本例題1.07　**基本例題1.06**の棒は長さ0.1 mあたり1 kNの力に対して0.1 mm伸びるという．棒全体の長さの変化量を求めなさい．

指針　図1.7からAB間の長さは$L_{AB}=0.7\,m$，BC間の長さは$L_{BC}=0.3\,m$なので，1 kNの力に対して0.1 mm伸びる長さ0.1 mのバネが，AB間に7本，BC間に3本それぞれ直列につながっていると考えてAB間とBC間のバネ定数を求め，AB間とBC間の長さの変化量を計算してそれらを足す．ちなみに，高校物理では「バネの長さ」の概念はないので少し無理やりですが，・・・．

解答　$f=1\,kN$の力に対して$\delta=0.1\,mm$伸びる長さ0.1 mのバネのバネ定数kは，$f=k\delta$から

$$k=\frac{f}{\delta}=\frac{1\times10^3\,N}{0.1\,mm}=10\times10^3\,N/mm.$$

このバネがAB間に0.7/0.1=7本，BC間に0.3/0.1=3本それぞれ直列につながっているので，AB間とBC間のバネ定数k_{AB}とk_{BC}は，直列につながったバネのバネ定数の式

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{7}{k}=\frac{1}{k_{AB}},\quad \frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{3}{k}=\frac{1}{k_{BC}}$$

から，

$$k_{AB}=\frac{1}{7}k=\frac{1}{7}\times10\times10^3\,N/mm,\quad k_{BC}=\frac{1}{3}k=\frac{1}{3}\times10\times10^3\,N/mm.$$

AB間とBC間の伸びδ_{AB}とδ_{BC}は，$\delta=f/k$のfを内力Nに置き換えて

$$\delta_{AB}=\frac{N_{AB}}{k_{AB}}=\frac{3\times10^3}{10\times10^3/7}=2.1\,mm,\quad \delta_{BC}=\frac{N_{BC}}{k_{BC}}=\frac{10\times10^3}{10\times10^3/3}=3.0\,mm.$$

棒全体の長さの変化量はこれらを足して5.1 mmである．■

解説1：この例題の解答は正しいが，気持ちの悪い部分がある．つまり，棒をバネとして考えたとき，Bを境に棒の性質が変わるはずがないのに，棒の長い側（AB間）は柔らかい（バネ定数が小さい）と言っていることだ．この「気持ちの悪いこと」は棒の性質をバネ定数で表したために生じたことである．では，AB間とBC間で棒の性質が変わっていないことを表すための物理量は何だろうか．

解説2：AB間とBC間で単位長さ単位内力あたりの長さの変化量$\delta_{AB}/(N_{AB}L_{AB})$と$\delta_{BC}/(N_{BC}L_{BC})$を計算してみると，長さの単位を$m$（メートル）で統一して，

$$\frac{\delta_{AB}}{N_{AB}L_{AB}}=\frac{2.1\times10^{-3}}{(3\times10^3)\times0.7}=\frac{1}{10^6}\ \frac{m}{Nm},\qquad \frac{\delta_{BC}}{N_{BC}L_{BC}}=\frac{3.0\times10^{-3}}{(10\times10^3)\times0.3}=\frac{1}{10^6}\ \frac{m}{Nm}$$

となり，同じ値であることに気付く．ゆえに，この量がAB間とBC間で棒の性質が変わっていないことを表すための物理量と考えてよさそうである．

解説3：この例題の場合，単位長さ単位内力あたりの長さの変化量は問題の条件「長さ0.1 mあたり1 kNの力に対して0.1 mm伸びる」から

$$\frac{0.1\times10^{-3}m}{10^3\ N\times0.1\ m}=\frac{1}{10^6}\ \frac{m}{Nm}$$

となる．この値は，解説2で求めた値と同じである．この値$10^6\ N$を文字Kで表して公式っぽく表すと，δ_{AB}とδ_{BC}を求めるための式は

$$\delta_{AB}=\frac{N_{AB}}{K}L_{AB},\quad \delta_{BC}=\frac{N_{BC}}{K}L_{BC}$$

と書ける．

解説4：解説2で，δ_{AB}/L_{AB}とδ_{BC}/L_{BC}は「元の長さに対する長さの変化量の比」，すなわち，「長さの変化率」であり材料力学では「垂直ひずみ」と呼んでいる．

基本例題1.08　基本例題1.06でP_B=12 kNになった．AB間とBC間に発生する内力を求めなさい．また，棒全体の長さの変化量を求めなさい．

指針　基本例題1.06のようにして内力を求め，**基本例題1.07**の解説3のδ_{AB}とδ_{BC}の式からAB間とBC間の長さの変化量を計算してそれらを足す．

解答　$P_C=10\ kN$，$P_B=12\ kN$であるから，内力は**基本例題1.06**の式に代入して，

$$N_{AB}=-2\ kN,\quad N_{BC}=10\ kN.$$

各部分の長さの変化量は，**基本例題1.07**の解説3で求めた$K=10^6\ N$を使って，

$$\delta_{AB}=\frac{N_{AB}}{K}L_{AB}=\frac{-2\times10^3\ N}{10^6\ N}\times0.7\ m=-1.4\times10^{-3}\ m=-1.4\ mm,$$

$$\delta_{BC}=\frac{N_{BC}}{K}L_{BC}=\frac{10\times10^3\ N}{10^6\ N}\times0.3\ m=3\times10^{-3}\ m=3\ mm$$

となるから，全体の長さの変化量はこれらを足して1.6 mmである．■

解説：$N_{AB}=-2\ kN$についているマイナス符号は，図1.9で仮定したN_{AB}とは逆向きの内力が生じていることを表している．その結果，AB間の長さの変化量もマイナス符号が付き，「棒が縮む」といっている．材料力学の問題を解くためのコツは，内力は常に正（棒が伸びる向き：図1.9のような状態）であるとひたすら仮定することである．内力が負なら答えにマイナス符号が付くだけである．

基本例題1.09　基本例題1.06の棒の横断面積（棒の軸線に垂直な断面の面積）は$100\ mm^2$であった．この棒を図1.10のように同じ材料，同じ長さで横断面の一辺が$50\ mm$の正方形断面の棒に代えた．棒の長さの変化量を求めよ．

指針　一辺が$50\ mm$の正方形断面棒に**基本例題1.06**と同じ荷重が作用するとき，横断面積が$100\ mm^2$の棒一本あたりどれだけの内力が発生するかを考える．

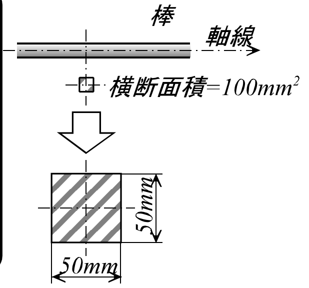


図1.10

解答　一辺が$50\ mm$の正方形断面棒の横断面積は$2500\ mm^2$．つまり，横断面積が$100\ mm^2$の棒を25本束ねたものなので，$100\ mm^2$の棒一本あたり**基本例題1.06**の内力の値の1/25になる．棒の長さの変化量は内力の大きさに比例するので，棒の長さの変化量も**基本例題1.06**の1/25の$0.204\ mm$である．■

解説：いままでのことをまとめてみると，棒の長さの変化量δは

1）**基本例題1.07**から，内力（Nで表す）に比例する．

2）**基本例題1.07**から，棒の元の長さ（Lで表す）に比例する．

3）**基本例題1.09**から，横断面積の値（Aで表す）に反比例する．

ことがわかった．これを式で表すと，定数Eを導入して

$$\delta=\frac{N\times L}{A\times E}$$

となる．**基本例題1.07**の解説3の$\delta=N\times L/K$との関係から$K=A\times E$でなければならないので，定数Eの単位は$N/m^2=Pa$である．Eは棒の材料固有の性質を数値で表したもの（物性値という）の一つでヤング率（縦弾性係数）という．特に，$A\times E$を「引張剛性」と呼んでいる．以後，文字式中の「×」は省略してAEと表す．
ついでに，バネ定数はAE/Lで，物理量ミックスになっている．

基本例題1.10　基本例題1.06において棒の横断面積が$A=100\ mm^2$，長さ$L=1\ m$．長さの変化量は$N=1\ kN$に対して$\delta=1\ mm$であった．棒の材料のEの値を求めよ．

指針　$\delta=\dfrac{NL}{AE}$をEを求める式に書き直して数値を代入する．

解答　Eを求める式に書き直すと

$$E=\frac{NL}{A\delta}$$

となり，単位に注意して数値を代入すると，

$$E=\frac{(1\times10^3\ N)\times(1\ m)}{(100\times10^{-6}\ m^2)\times(1\times10^{-3}\ m)}=10\times10^9\ N/m^2=10\times10^9\ Pa=10\ GPa$$

である．■

解説1 : Eの値は，たとえば，軟鋼で約200 GPa，銅で約120 GPa，アルミ系で約70 GPaである．多くの工業材料のヤング率Eの値は，横断面積Aと棒の長さLを定めていろいろな大きさの力に対する棒の長さの変化量δを測定することによって求められている．ちなみに，GPaは「ギガ・パスカル」と読み，1 $GPa=10^9$ Paである．

解説2 : **基本例題1.09**の解説中の式は，両辺をLで割って

$$\frac{\delta}{L}=\frac{1}{E}\frac{N}{A}$$

と表される．特に，

$$\sigma=\frac{N}{A},\ \varepsilon=\frac{\delta}{L}$$

と表記して，σ (「シグマ」と読む)を「垂直応力」(単位 : Pa)，ε (「イプシロン」と読む)を「垂直ひずみ」と呼ぶ．垂直応力と垂直ひずみとの間の関係$\sigma=E\varepsilon$を材料力学におけるフックの法則という．

図1.11(A)は軸荷重Pが作用する横断面積がAの棒に生ずる内力Nのイメージである．図1.11(B)は任意点Cで仮想的に切断した際の内力Nのイメージである．図1.11(C)は軸荷重Pの作用の元での変形のイメージである．Lとδの関係に注意しておこう．

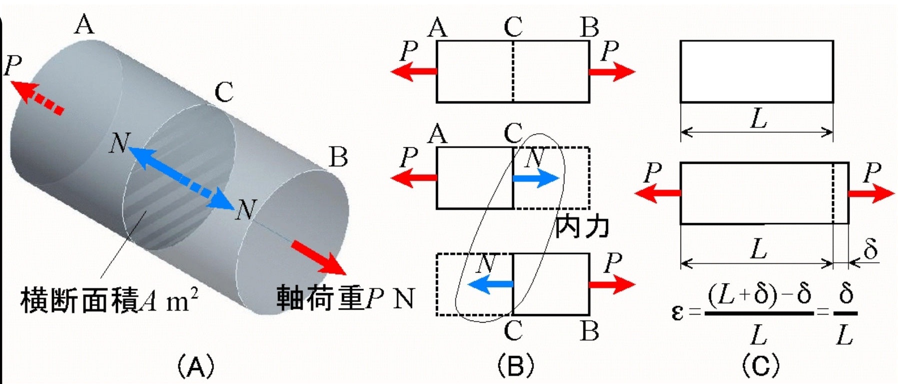


図1.11

基本例題1.11　横断面積が100 mm^2の棒に加えてもよい最大の軸荷重は15 kNである．同じ材料でできた横断面の一辺が50 mmの正方形断面の棒に加えることのできる荷重$P_{\max}$はどれだけか．

解答　一辺が50 mmの正方形断面棒の横断面積は2500 mm^2で横断面積が100 mm^2の棒を25本束ねたもの．100 mm^2の棒一本につき15 kNの軸荷重まで加えてもよいので，25本だと25倍になり，

$$P_{\max}=25\times15\ kN=375\ kN$$

である．■

解説 : この例題は横断面積が大きくなると大きな荷重に耐えられるという当然のことを言っているが，「加えてもよい荷重」/「横断面積の値」を計算すると両者共に150 MPaであることに気付く．150 MPaという値はこの材料に許される応力で，設計する際の基準として扱う．このような応力を「許容応力」と呼びσ_aで表す．σ_aは材料や部材の使用条件などによって異なる．

基本例題1.12　許容応力σ_a=105 MPaの材料を使って240 kNの軸荷重に耐える棒を作りたい．棒の横断面積Aを決めなさい．また，棒の長さL=1.5 mのとき，長さの変化量δはどれだけか．ヤング率E=175 GPaである．

指針　$\sigma_a=105\ MPa=105\times10^6\ Pa$，$E=175\ GPa=175\times10^9\ Pa$である．

解答　$\sigma_a=P_{\max}/A$で$\sigma_a=105\times10^6\ Pa$，$P_{\max}=240\times10^3\ N$であるので，

$$A=\frac{P_{\max}}{\sigma_a}=\frac{240\times10^3\ N}{105\times10^6\ N/m^2}=2.29\times10^{-3}\ m^2$$

となり，$A\geq2.29\times10^{-3}\ m^2$であれば$\sigma_a=105\ MPa$を超えない．

横断面積が最小値の$A=2.29\times10^{-3}\ m^2$のときの長さの変化量δは

$$\delta=\frac{NL}{AE}=\frac{240\times10^3\ N\times1.5\ m}{2.29\times10^{-3}\ m^2\times175\times10^9\ N/m^2}=899\times10^{-6}\ m=0.9\ mm.$$

$A\geq2.29\times10^{-3}\ m^2$であれば$\delta\leq0.9\ mm$である．■

基本例題1.13　図1.12のように棒が支持部材とピンを通して接続されている．ピンの横断面に沿って発生する内力を求めよ．

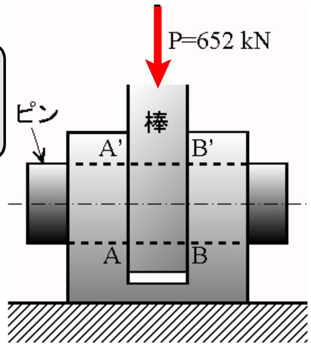


図1.12

解答　ピンにはP=652 kNの力がはたらき，ピンは両側から支えられている．ピンの左右に生ずる反力をそれぞれRで表すと，図1.13上を参照して，$2R=P$から

$$R=P/2=326\ kN$$

である．ピンに発生する内力Fは図1.13下のようにF=326 kNである．■

解説1：図1.12のピンに着目すると，ピンは左右で支えられている．このとき，左右に生ずる反力をそれぞれRで表す（図1.13上）と，力のつりあい$2R-P=0$から

$$P=2R.$$

図1.13下の内力Fはピンの内部に生ずる力で，AA’とBB’に沿って発生する．AA’とBB’に沿った仮想切断面上では

$$F=R=\frac{P}{2}$$

である．このような，仮想切断面に沿って発生する内力Fを「せん断力」という．

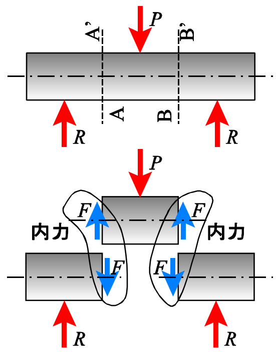


図1.13

解説2：図1.14(A)は荷重Pが作用する横断面積Aの棒に生ずる内力Fのイメージである．図1.14(B)は任意点Cで仮想的に切断した際の内力Fのイメージである．この内力Fをせん断力というが，横断面の左右で互いに向きが逆になっている．また，棒の軸線に対して垂直にはたらく荷重を横荷重という．

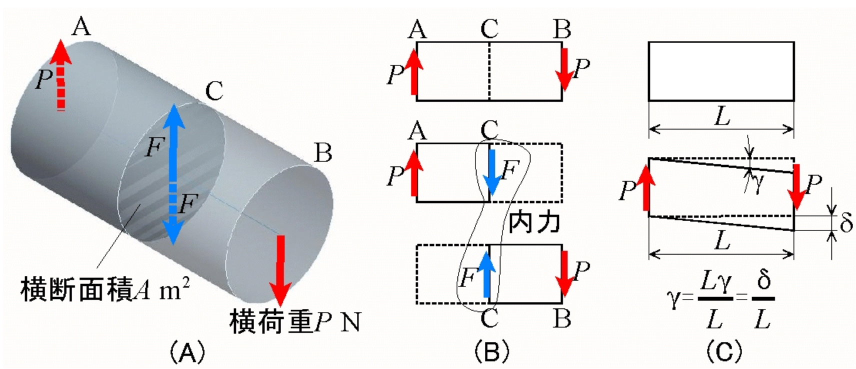


図1.14

図1.14(C)は横荷重Pの作用の元での変形のイメージである．Lとδの関係は垂直ひずみの場合（図1.11(C)）とは異なることに注意しておこう．特に，

$$\tau=\frac{F}{A},\ \gamma=\frac{\delta}{L}$$

と表記して，τ (タウ)を「せん断応力」（単位：Pa），γ (ガンマ)を「せん断ひずみ」と呼ぶ．せん断応力との間には$\tau=G\gamma$というフックの法則が成り立つ．ここで，Gを横弾性係数といいヤング率との関係は

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

であり，νをポアソン比という．また，この例題のτ_aを許容せん断応力といい，設計上許されるせん断応力の最大値である．

解説3：せん断ひずみγは角度変化なので，単位をradとしてもよさそうである．

応用例題1.14　基本例題1.13のピンの許容応力は$\tau_a=145\ MPa$である．ピンの直径を定めよ．

解答　ピンの直径をdとするとピンの横断面積は$A=\pi d^2/4$．ピンに生ずるせん断応力はτ_a以下でなければならないので，

$$\frac{F}{\pi d^2/4}\leq\tau_a.$$

これから

$$d\geq\sqrt{\frac{4F}{\pi\tau_a}}=\sqrt{\frac{4\times326\times10^3}{\pi\times145\times10^6}}=53.5\times10^{-3}\ m$$

となる．すなわち，ピンの直径は53.5 mm以上であればよい．■

基本事項2（少し複雑な問題）

1．一般的な垂直ひずみの定義は，棒の微小部分の長さdxが変形の結果$dx+d\delta$になったときの長さの変化量$d\delta$の元の長さdxに対する割合で

$$\varepsilon=\frac{(dx+d\delta)-dx}{dx}=\frac{d\delta}{dx}\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$$

棒の長さΔxの微小部分が，変形の結果$\Delta x+\Delta\delta$になったときの長さの変化量$\Delta\delta$の元の長さΔxに対する割合$\dfrac{\Delta\delta}{\Delta x}$の$\Delta x\to0$の極限として$\dfrac{d\delta}{dx}$という表現が正しいが，まあ，面倒なので．すみません．

である．同時に，この点での垂直ひずみは，フックの法則から

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$$

と関連付けられる．なお，εはxの関数である．

2．棒全体の長さの変化量δは，長さdx部分の長さの変化量$d\delta$は

$$d\delta=\varepsilon(x)dx$$

であるから，これをxについて積分することによって求められる．すなわち，長さLの棒の長さの変化量δは

$$\delta=\int_0^L\varepsilon(x)dx$$

から求めることができる．

3．特に，εが一定なら長さLの棒の長さの変化量δは

$$\delta=\int_0^L\varepsilon dx=\varepsilon\int_0^L dx=\varepsilon L$$

となる．

発展例題1.15　図1.15のように，左端Aが壁に固定された厚さtの平板の端Cに荷重Pが作用している．板全体の長さの変化量δを求めよ．板のヤング率をEとする．

指針　AB間では幅の変化を$b(x)$としてxの関数で表す．板全体の長さの変化量は，ひずみを積分して求める．

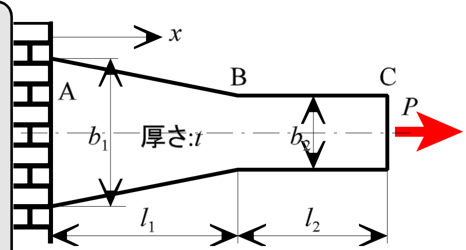


図1.15

解答　AB間では幅はb_1からb_2に直線的に変化するので，幅の変化を$b(x)$で表すと，

$$b(x)=b_1+(b_2-b_1)\frac{x}{l_1}$$

であるから，AB間$(0\leq x\leq l_1)$の断面積は

$$A(x)=b(x)t=\left[b_1+(b_2-b_1)\frac{x}{l_1}\right]t$$

BC間$(l_1\leq x\leq l_1+l_2)$では幅は一定なので，

$$A(x)=b_2t$$

である．

垂直ひずみは，内力$N=P$であるから，

$$\varepsilon(x)=\frac{d\delta}{dx}=\frac{\sigma_x(x)}{E}=\frac{N}{A(x)E}=\frac{P}{A(x)E}$$

で，板の長さの変化量δは

$$\delta=\int_0^{l_1+l_2}\varepsilon(x)dx=\int_0^{l_1+l_2}\frac{P}{A(x)E}dx$$

途中で板の幅が変わるので積分を二つに分けて

$$\delta=\frac{P}{tE}\left[\int_0^{l_1}\frac{1}{b_1+(b_2-b_1)x/l_1}dx+\frac{1}{b_2}\int_{l_1}^{l_1+l_2}dx\right]$$

から

$$\delta=\frac{P}{tE}\left(\frac{l_1}{b_2-b_1}\ln\frac{b_2}{b_1}+\frac{l_2}{b_2}\right)$$

である．■

解説1：$0\leq x\leq l_1$の任意の位置xで$\delta(x)$は，積分のための変数をξとして，

$$\delta(x)=\frac{P}{tE}\int_0^x\frac{1}{b_1+(b_2-b_1)\xi/l_1}d\xi=\frac{P}{tE}\frac{l_1}{b_2-b_1}\ln\frac{b(x)}{b_1}.$$

この$\delta(x)$はxの位置にある点の$x=0$に対する移動量を表し，「変位」ともいう．

解説2：$l_1\leq x\leq l_1+l_2$の任意の位置xでの変位は，

$$\delta(x)=\frac{P}{tE}\left(\frac{l_1}{b_2-b_1}\ln\frac{b_2}{b_1}+\frac{x-l_1}{b_2}\right)$$

である．

解説3：いまさらながら，$y=b_1+(b_2-b_1)x/l_1$ とおくと $dx=l_1/(b_2-b_1)dy$ なので

$$\int_0^{l_1}\frac{1}{b_1+(b_2-b_1)x/l_1}dx=\frac{l_1}{b_2-b_1}\int_{b_1}^{b_2}\frac{1}{y}dy=\frac{l_1}{b_2-b_1}(\ln b_2-\ln b_1)=\frac{l_1}{b_2-b_1}\ln\frac{b_2}{b_1}$$

というように簡単に計算できる．

発展例題1.16　図1.16左のように棒の先端に下向き荷重 P が作用している．重力加速度（下向き）の元で棒の長さの変化量 δ を求めよ．棒の密度を ρ kg/m^3 とする．

指針　内力の式を求める際に棒の微小部分 dx の内力の変化を式で表現する．

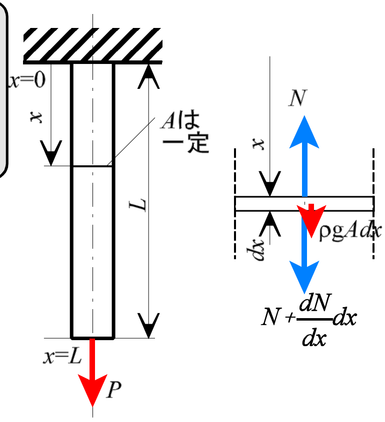


図1.16

解答　図1.16右のような棒の微小部分について，力のつりあいは

$$N+\frac{dN}{dx}dx-N+\rho gAdx=0$$

となるから，dx 部分の内力の変化は

$$\frac{dN}{dx}=-\rho gA$$

となる．この式を積分すると，棒全体の内力は，積分定数を N_0 として

$$N(x)=-\rho gAx+N_0.$$

$x=L$ で $N(L)=P$ の関係を用いて N_0 を決めて代入すると，内力は

$$N(x)=\rho gA(L-x)+P$$

と表すことができるから，ひずみは次式で表される．

$$\varepsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{N(x)}{AE}=\frac{\rho g}{E}(L-x)+\frac{P}{AE}$$

任意の x における変位量 $\delta(x)$ は，

$$\delta(x)=\int_0^x\varepsilon(\xi)d\xi=-\frac{\rho g}{2E}(L-x)^2+\frac{\rho g}{2E}L^2+\frac{Px}{AE}.$$

となり，棒の自由端 $x=L$ において，固定端 $x=0$ に対して

$$\delta(L)=\frac{PL}{AE}+\frac{\rho g}{2E}L^2$$

だけ変位する．この量は長さ L の棒の長さの変化量そのものなので，

$$\delta=\delta(L)=\frac{PL}{AE}+\frac{\rho g}{2E}L^2$$

である．■

解説1：図1.16右のような棒の微小部分について，体積は Adx で質量は ρAdx なので力は $\rho gAdx$（下向き）になる．x での内力を N（上向き），$x+dx$ での内力を $N+(dN/dx)dx$（下向き）で表すと**解答**の力のつりあい式

$$N+\frac{dN}{dx}dx-N+\rho gAdx=0$$

が得られる．

解説2：自重，遠心力など物体の質量が関係して物体内に発生する力を物体力（body force）という．

発展例題1.17　図1.17左のように横断面積Aが変化する棒の先端に下向き荷重Pが作用している．重力加速度（下向き）の元で応力をxの関数として表せ．棒の密度をϱ kg/m^3とする．

指針　内力の式を求める際に棒の微小部分dxの内力の変化を式で表現する．この例題では，横断面積Aが変化することに注意．

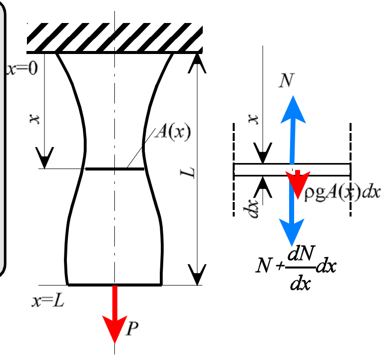


図1.17

解答　図1.17右のような棒の微小部分について，力のつりあいは

$$N+\frac{dN}{dx}dx-N+\varrho gA(x)dx=0$$

となるから，dx部分の内力の変化は

$$\frac{dN}{dx}=-\varrho gA(x)$$

となる．これを積分すると内力$N(x)$は，

$$N(x)=-\varrho g\int A(x)dx+N_0$$

$x=L$で$N(L)=P$の条件

$$N(L)=P=-\varrho g\left[\int A(x)dx\right]_{x=L}+N_0$$

からN_0を決めると内力$N(x)$の式を書くことができる．応力$\sigma(x)$は内力$N(x)$を横断面積$A(x)$で割って，

$$\sigma(x)=\frac{1}{A(x)}\left[\varrho g\int_x^L A(\xi)d\xi+P\right]$$

となる．ただし，積分のための変数をξとして区別して表した．■

解説1：内力$N(x)$の式は，

$$N(x)=-\varrho g\int A(x)dx+\left[\varrho g\int A(x)dx\right]_{x=L}+P$$

となり，右辺の二つの積分をまとめると

$$N(x)=\varrho g\int_x^L A(\xi)d\xi+P$$

となる．

解説2：応力の変化を表す式をヤング率で割ると垂直ひずみは

$$\varepsilon(x)=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{1}{A(x)E}\left[\varrho g\int_x^L A(\xi)d\xi+P\right]$$

となってxの関数である．

発展例題1.18　**発展例題1.17**で，応力$\sigma(x)=\sigma_0$（一定値）であるように横断面積の変化$A(x)$を決めなさい．棒の密度をϱ kg/m^3とする．

指針　横断面積が変化していることを考慮して力のつりあい式を立てる．

解答　**発展例題1.17**の力のつりあい

$$N+\frac{dN}{dx}dx-N+\varrho gA(x)dx=0$$

で$N=\sigma_0 A(x)$とおくと，この例題の力のつりあいは，

$$\sigma_0\left[A(x)+\frac{dA(x)}{dx}dx\right]-\sigma_0 A(x)+\varrho gA(x)dx=0$$

となる．この式から横断面積の変化$A(x)$を求めるための式

$$\frac{dA(x)}{dx}+\frac{\varrho g}{\sigma_0}A(x)=0$$

が得られる．この式から，横断面積の変化$A(x)$は次式で表される．

$$A(x)=A_0 e^{-\varrho gx/\sigma_0}$$

$x=L$で$A(L)=P/\sigma_0$でなければならない条件からA_0を定めると，$A(x)$は

$$A(x)=\frac{P}{\sigma_0}e^{\varrho g(L-x)/\sigma_0}$$

である．$A(x)$の概形は図1.18のようである．■

解説1：$A(x)=A_0 e^{kx}$と仮定して式$\frac{dA(x)}{dx}+\frac{\varrho g}{\sigma_0}A(x)=0$に代入すると，

$$kA_0 e^{kx}+\frac{\varrho g}{\sigma_0}A_0 e^{kx}=\left(k+\frac{\varrho g}{\sigma_0}\right)A_0 e^{kx}=0$$

となる．この式から$k=-\varrho g/\sigma_0$．また，A_0は，$x=L$で$A(L)=P/\sigma_0$でなければならない条件から，

$$A_0=A(L)=\frac{P}{\sigma_0}e^{\varrho gL/\sigma_0}.$$

解説2：このように，応力$\sigma(x)=\sigma_0$（一定値）の棒を平等強さの棒というが，$P=0$の場合は$A(L)=0$となり平等強さの棒は成立しない．

解説3：**発展例題1.17**の応力の式は

$$\sigma(x)=\frac{1}{A(x)}\left[\varrho g\int_x^L A(\xi)d\xi+P\right].$$

ここで$\sigma(x)=\sigma_0$とおいて少し計算すると微分方程式

$$\frac{dA(x)}{dx}+\frac{\varrho g}{\sigma_0}A(x)=0$$

が得られる．

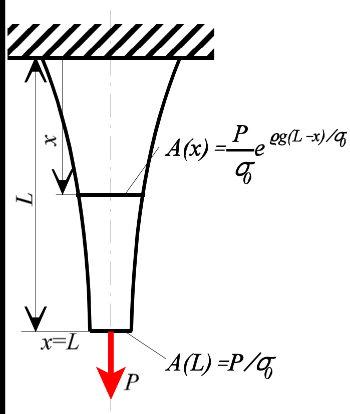


図1.18

発展例題1.19　発展例題1.18の棒の長さの変化量を求めよ．ヤング率をEで表す．

解答　応力がσ_0で一定値なので，垂直ひずみも$\varepsilon=\sigma_0/E$で一定値である．ゆえに，棒の長さの変化量は

$$\delta=\frac{\sigma_0}{E}L$$

である．■

発展例題1.20　図1.19上のように一端が回転軸に取り付けられた長さLの棒が角速度ω rad/sで回転する．棒の応力と長さの変化量を求めよ．棒の横断面積をA，密度をϱとする．

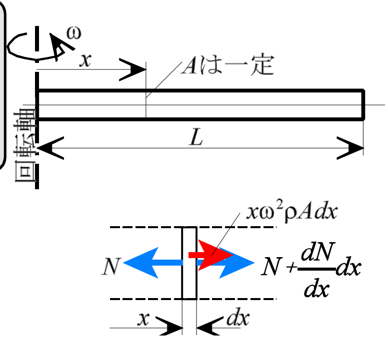


図1.19

解答　図1.19下から，回転軸からxの距離にあるdx部分の力のつりあいは

$$N+\frac{dN}{dx}dx-N+x\omega^2\varrho A dx=0$$

となるから，これより

$$\frac{dN}{dx}=-x\omega^2\varrho A.$$

この式を積分して$x=L$で外力がはたらいていない条件$N(L)=0$からN_0を決めると内力$N(x)$は

$$N(x)=\frac{1}{2}\varrho\omega^2 A(L^2-x^2).$$

応力は$N(x)$を横断面積Aで割って

$$\sigma(x)=\frac{N(x)}{A}=\frac{1}{2}\varrho\omega^2(L^2-x^2)$$

である．

ひずみは

$$\varepsilon(x)=\frac{d\delta}{dx}=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{\varrho\omega^2}{2E}(L^2-x^2)$$

であるからこれを積分すると，棒の長さの変化量は

$$\delta(L)=\frac{\varrho\omega^2}{3E}L^3$$

となる．■

解説1：回転軸からxの距離にあるdx部分の質量は$\varrho A dx$で加速度は$x\omega^2$なのでこの部分の遠心力は$x\omega^2\varrho A dx$（右向き）である．xでの内力をN（左向き），$x+dx$での内力を$N+(dN/dx)dx$（右向き）で表すと力のつりあいは

$$N+\frac{dN}{dx}dx-N+x\omega^2\varrho A dx=0$$

となる．この式から得られる式を積分すると内力$N(x)$は，$x=0$での内力をN_0として

$$N(x)=-\frac{1}{2}\varrho\omega^2 A x^2+N_0.$$

ここで$x=L$で外力がはたらいていない条件$N(L)=0$からN_0を求めて代入すると

$$N(x)=\frac{1}{2}\varrho\omega^2 A(L^2-x^2).$$

解説2：　ひずみは

$$\varepsilon(x)=\frac{d\delta}{dx}=\frac{\sigma(x)}{E}=\frac{\varrho\omega^2}{2E}(L^2-x^2)$$

であるからこれを積分して

$$\delta(L)=\int_0^L\varepsilon(x)dx=\frac{\varrho\omega^2}{2E}\left(L^3-\frac{1}{3}L^3\right)$$

基本事項3（静力学的つりあい）

1．**力のつりあい**：物体に複数の力がはたらいても物体に並進運動を生じないとき，物体にはたらく力はつりあっているという．式で書くと，力をベクトル$\vec{F}_i$=(F_{ix},F_{iy})で表して，

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0\text{，成分で書くと}\quad \sum_{i=1}^{n}F_{ix}=0\text{，}\ \sum_{i=1}^{n}F_{iy}=0\text{．}$$

2．**モーメントのつりあい**：物体に複数の力がはたらいても物体に回転運動を生じないとき，物体にはたらくモーメントはつりあっているという．式で書くと，モーメントをM_iで表して，

$$\sum_{i=1}^{n}M_i=0\text{．}$$

3．1．の「力のつりあい」と2．の「モーメントのつりあい」をあわせて静力学的つりあいという．静力学的つりあい状態にある物体は並進運動も回転運動も生じない．

補足：剛体系の力学で「力のつりあい」というのはここでいう静力学的つりあいを言うようだ．

基本例題1.21　図1.20のような構造の棒部材ACとBCに生ずる内力を求めなさい．また，点AとBに生ずる反力を水平方向，垂直方向に分けて求めなさい．A，B，Cはすべてピンで接続されている．

指針　ピンで接続されているので発生する内力は軸方向の力．内力はすべて正（仮想切断面の外に向かう力）であると仮定する．反力は水平方向（添字Hで表す）では右向き，垂直方向（添字Vで表す）では上向きを仮定する．

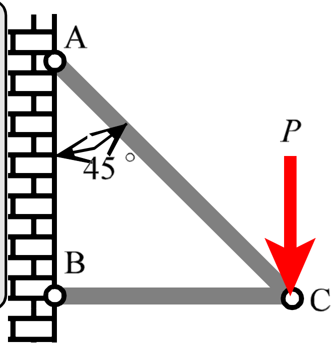


図1.20

解答　内力：図1.21のように内力N_{AC}とN_{BC}を仮定すると，力のつりあいは

水平方向　　$N_{AC}\cos45°+N_{BC}=0$

垂直方向　　$N_{AC}\sin45°-P=0$

である．以上から，

$$N_{AC}=\sqrt{2}P\text{，}\ N_{BC}=-P\text{．}$$

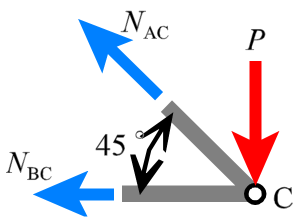


図1.21

反力：図1.22左のように各支点に生ずる反力をR_{AH}，R_{AV}，R_{BH}，R_{BV}で表すと，系全体の力のつりあいは，

水平方向　　$R_{AH}+R_{BH}=0$

垂直方向　　$R_{AV}+R_{BV}-P=0$

で，モーメントのつりあい式は，ABの長さをlとして反時計回りのモーメントを正とすると

$$-R_{AH}l-Pl=0\qquad\text{(Bまわり)}$$

となる．これより$R_{AH}=-P$．水平方向の力のつりあいから$R_{BH}=-R_{AH}=P$となる．

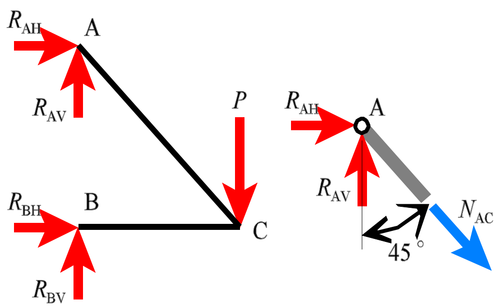


図1.22

次に垂直方向反力を求めるために，R_{AH}，R_{AV}，N_{AC}の間の力のつりあい式をたてると，図1.22右を参照して，

水平方向　　$R_{AH}+N_{AC}\sin45°=0$

垂直方向　　$R_{AV}-N_{AC}\cos45°=0$

となる．$R_{AH}=-P$，$N_{AC}=\sqrt{2}P$なので水平方向の力のつりあい式は成立している．垂直方向のつりあい式から

$$R_{AV}=N_{AC}\cos45°=P$$

となり，$R_{BV}=P-R_{AV}=0$となる．

以上から，反力は

$$R_{AH}=-P,\ R_{AV}=P,\ R_{BH}=P,\ R_{BV}=0$$

■

解説1：反力を求める際に力のつりあい式$R_{AH}+R_{BH}=0$，$R_{AV}+R_{BV}-P=0$とモーメントのつりあい式$-R_{AH}l-Pl=0$をたてたが，これ以上式はたたない．ゆえに，四つの未知反力に対して三つしか式がない．実際，水平方向の力のつりあい式とモーメントのつりあい式から水平方向反力$R_{AH}=-P$と$R_{BH}=P$が決まるので，残る二つの垂直方向反力に対して式は一つしかない．不足する条件式を補うのが外力R_{AH}，R_{AV}と内力N_{AC}との間の力のつりあい式$R_{AH}+N_{AC}\sin 45°=0$と$R_{AV}-N_{AC}\cos 45°=0$ということになる．

解説2：図1.22右の図を矢印線と大きさで表すと図1.23のようになる．この図で破線の矢印線で示した力R_AはN_{AC}と大きさが等しく向きが逆でなければならないことに気付くだろう．

解説3：実は，両端がピンで接続された部材は軸方向内力しか負担できない．この性質を知っておくと，$R_{BV}=0$，$R_{AH}=-N_{AC}\sin 45°$，$R_{AV}=N_{AC}\cos 45°$に気づき，ピンで接続された部材で構成された構造はもっと簡単に解析できる．なお，ピンを使った接続のことをヒンジと言うので覚えておくとよい．

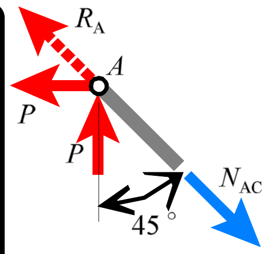


図1.23

基本例題1.22　図1.24のように，水平部材ACが点Aで回転支持され，点Cに取り付けられたケーブルで壁の点Dにつながれている，水平部材ACの途中の点Bに荷重Pがはたらいているとき，点Aの反力とケーブルに生ずる張力を求めよ．

指針　ケーブルは糸と同じように張力だけを負担することに注意して系全体の静力学的つりあい式をつくる．

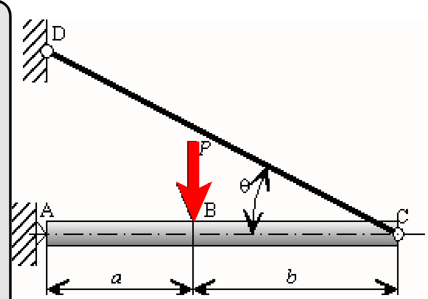


図1.24

解答　点Aの反力の水平方向成分と垂直方向成分をR_{AH}とR_{AV}で，ケーブル張力をTで表すと，ケーブルと水平部材のフリーボディダイヤグラムは図1.25のようになる．系全体の静力学的つりあい条件は，水平部材ACに着目して

x方向　　$R_{AH}-T\cos\theta=0$

y方向　　$R_{AV}+T\sin\theta-P=0$

モーメント　$(a+b)\times T\sin\theta-a\times P=0$　　（Aまわり）

となるから，これらの式から

$$T=\frac{a}{(a+b)\sin\theta}P,\ R_{AH}=\frac{a}{(a+b)\tan\theta}P,\ R_{AV}=\frac{b}{a+b}P$$

である．■

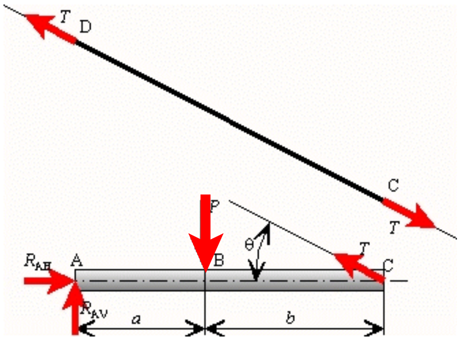


図1.25

解説1：対応するフリーボディダイヤグラム図1.25では，力はすべて棒AC，ケーブルCDにおよぼす力として表現されていることに注意．壁に及ぼす力は大きさが等しく向きが逆である．

解説2：図1.25では点Cでケーブルと水平部材を外しているので力Tが見えて，大きさが同じで向きが逆になっている．図1.24の状態では力Tは見えなくなっている(書いてもいいが，めっちゃわかりにくくなる)．図1.25の点Cの力Tは，作用反作用の関係にあり，系全体からみると内力になっている．

発展例題1.23　図1.26の構造でピンCにはたらく力を求めよ．

指針　まず，AとBに生ずる反力を求め，部材BCのフリーボディダイヤグラムを作って求める．

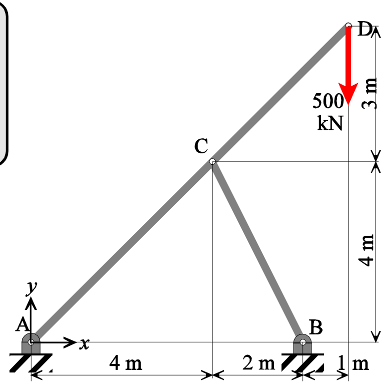


図1.26

解答　系全体のフリーボディダイヤグラムを図1.27(A)のように描くと，系全体の力のつりあいとモーメントのつりあい条件は

x方向　　$R_{AH}-R_{BH}=0$

y方向　　$R_{AV}+R_{BV}-500=0$（単位kN）

モーメント　$(4+2)\times R_{BV}-(4+2+1)\times 500=0$　（Aまわり，単位kNm）

であるから，

$$R_{BV}=583\ kN,\ R_{AV}=-83\ kN,\ R_{AH}=R_{BH}.$$

部材BCの点Cまわりのモーメントのつりあいは

$$2\times R_{BV}-4\times R_{BH}=0$$

であるから，

$$R_{BH}=\frac{1}{2}R_{BV}=292\ kN=R_{AH}.$$

部材BCのフリーボディダイヤグラム図1.27(B)から，$R_{CH}=R_{BH}$，$R_{CV}=R_{BV}$であるので，ピンにはたらく力は$R_{CH}=292\ kN$，$R_{CV}=583\ kN$である．■

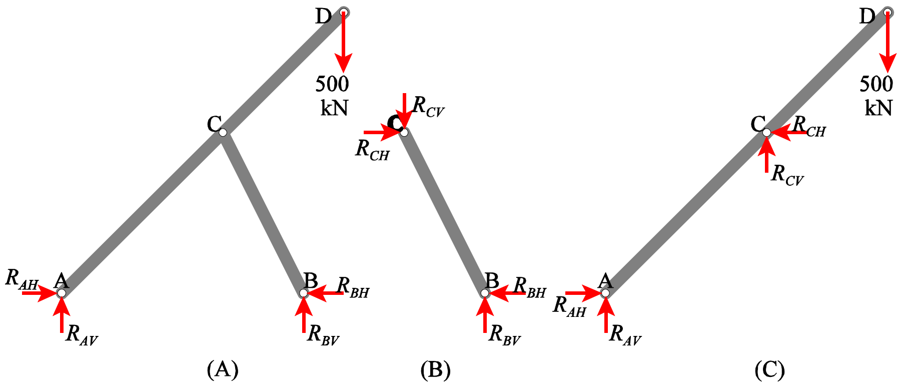


図1.27

解説1：部材ADのフリーボディダイヤグラム図1.27(C)から，静力学的つりあい条件は

x方向　　$R_{AH}-R_{CH}=0$

y方向　　$R_{AV}+R_{CV}-500=0$　（単位kN）

モーメント　$4\times R_{CV}+4\times R_{CH}-(4+2+1)\times 500=0$（Aまわり，単位$kNm$）

が成り立っているので，静力学的つりあい条件が満足されていることが確認できる．

解説2：図1.27(B)ではピンCが部材BCに及ぼす力として，図1.27(C)ではピンCが部材ADに及ぼす力として，それぞれ表現されていることに注意．

応用例題1.24　図1.26の構造のピンA，Bにはたらく荷重の大きさを求めよ．また，どちらのピンを設計対象とすべきか．ただし，**発展例題1.23**の結果から，Aのピンにはたらく力のx方向，y方向分力はR_{AH}=292 kN，R_{AV}=−83 kN．BのピンについてはR_{BH}=292 kN，R_{AV}=583 kNである．

解答　Aのピンにはたらく荷重はR_{AH}=292 kN，R_{AV}=−83 kNであるから

$$P_A=\sqrt{R_{AH}^2+R_{AV}^2}=\sqrt{292^2+(-83)^2}=304\ kN$$

Bのピンにはたらく荷重はR_{Bx}=292 kN，R_{Ay}=583 kNであるから

$$P_B=\sqrt{R_{BH}^2+R_{BV}^2}=\sqrt{292^2+(583)^2}=652\ kN$$

であるから，ピンBを設計対象にする．■

解説：Cのピンにはたらく荷重P_CはP_Bに等しく，P_C=652 kNである．

基本例題1.25　図1.28のように長さlの重さのない棒の両端A，Bに縦方向の力P_1とP_2がはたらいている．この棒の点Cに力P_3を加えて静力学的につりあうようにしたい．Cの位置と力の大きさと向きを求めよ．

指針　静力学的につりあうとは，**基本事項3**で述べたとおり，力のつりあい条件とモーメントのつりあい条件を満たすことである．

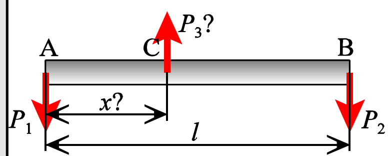


図1.28

解答　新たに加える力P_3の作用点を左端からx，力の向きを上向きに仮定する．力のつりあいは，下向きの力にプラス符号をつけて

$$P_1+P_2-P_3=0.$$

モーメントのつりあいは，点Aまわりで考えて，反時計回りのモーメントにプラス符号をつけて

$$P_3x-P_2l=0.$$

この二つの式から，力P_3とxは

$$P_3=P_1+P_2,\quad x=\frac{P_2}{P_3}l=\frac{P_2}{P_1+P_2}l$$

である（図1.29）．■

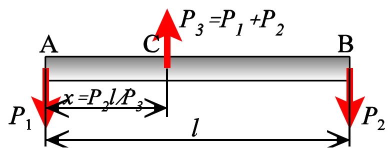


図1.29

解説1：この例題では，力P_1とP_2が共に下向きなので，追加する力P_3は上向きと仮定した．ゆえに，下向きの力にプラス符号を，上向きの力にマイナス符号を付けて力のつりあい式を考えると$P_1+P_2-P_3=0$である．

解説2：モーメントの場合，反時計回りにプラス符号を付けるとしたので，$P_3x-P_2l=0$がモーメントのつりあい条件になる．

解説3：静力学的につりあっている（力のつりあいとモーメントのつりあいが保たれている）とき，棒には並進運動も回転運動も生じない．

基本例題1.26　図1.30のように両端A，Bがピンで拘束されている長さlの棒の途中の点Cに下向きの力Pがはたらいている．両端A，Bで棒が受ける力を求めよ．

指針　「拘束されている」とは運動がとめられている状態をいい，「ピンで拘束されている」というのは，ピンまわりのモーメントがゼロであることを意味する．また，棒が受ける力とは，ピンが棒に及ぼす力のことである．

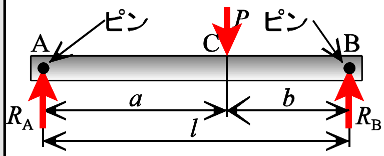


図1.30

解答　下向きの力にプラス符号をつけ，両端A，Bで棒が受ける力(ピンが棒に及ぼす力)を上向きにR_A，R_Bとすると，

力のつりあい

$$P-R_A-R_B=0$$

から

$$R_A+R_B=P.$$

モーメントのつりあいは，点Bまわりで

$$-R_A l+Pb=0.$$

以上から，

$$R_A=\frac{b}{l}P,\quad R_B=P-R_A=\frac{l-b}{l}P=\frac{a}{l}P$$

である．■

解説1：図1.30のピンをはずして図1.31のように両端A，BにR_AとR_Bを加えてもつりあい状態は保たれる．図1.31は図1.30に対するフリーボディダイヤグラムである．

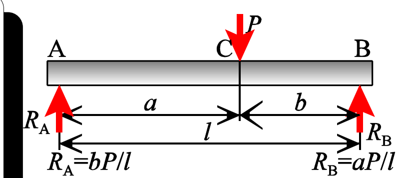


図1.31

解説2：材料力学では拘束条件を図で表現することがある．ここで出てきた「ピンで拘束されている」を材料力学の図で表現すると，図1.32のようになる．同図左の拘束点は「回転支点」と呼ばれ，棒の軸線に垂直な方向の力R_Vと軸線の方向の力R_Hを及ぼす．右の拘束点は「移動支点」と呼ばれ，軸線に垂直な方向の力R_Vのみ及ぼす．また，ピンのような拘束が物体に及ぼす力を「反力」という．

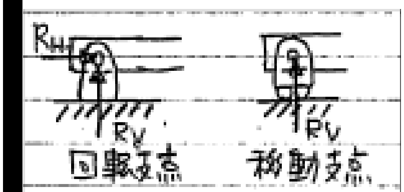


図1.32

解説3：**基本例題1.25**では両端の力が決まっているとき，一つの力でつりあう位置$x=P_2l/P_3$は一つだけだと言っている．つまり，$x=P_2l/P_3$は系の重心になっている．**基本例題1.26**は一つの力とその作用位置が決まると静力学的なつりあいを保つために棒の両端に生ずる力は一組に決まると言っている．実は同じことを言っている．

解説4：モーメントという力学量を導入することで**基本例題1.25**や**基本例題1.26**でみた以外の静力学的つりあい状態を作り出すことができる．次の例題で考えてみよう．

基本例題1.27　図1.33のように長さlの棒の両端に力P_1とP_2が下向きにはたらいている．この棒の点Aからx_1の距離にある点Cに力$P_3=P_1+P_2$を上向きに加える．$x_1\neq P_2l/P_3$のとき，この棒が静力学的につりあっているための条件を求めよ．

指針　静力学的なつりあい条件のうちの力のつりあいは保たれている．ここでは，モーメントのつりあいが保たれるように新たにモーメントを付加する．

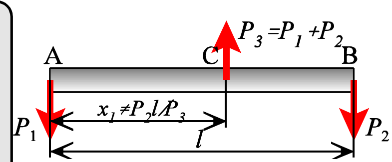


図1.33

解答　$x_1 \neq P_2 l/P_3$であるためモーメントのつりあい条件を満たさないので，図1.34のように反時計回りのモーメントM_0を加えると，点Cまわりのモーメントのつりあい条件式は

$$P_1 x_1 + M_0 - P_2(l - x_1) = 0.$$

この式から，M_0は

$$M_0 = -P_1 x_1 + P_2(l - x_1)$$

となる．■

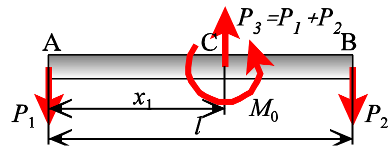


図1.34

> 解説1：$M_0 = -(P_1 + P_2)x_1 + P_2 l = -P_3 x_1 + P_2 l$とも書ける．この$M_0$は点Aまわりのモーメント$P_3 x_1 - P_2 l$を打ち消すモーメントになっている．同様に，$M_0 = P_3(l - x_1) - P_1 l$とも書くことができる．これは点Bまわりのモーメントを打ち消すモーメントになっている．
> 解説2：モーメントM_0は，$x_1 = 0$なら$M_0 = P_2 l > 0$（大きさが$P_2 l$で反時計回り（図1.35上））で，$x_1 = l$なら$M_0 = -P_1 l < 0$（大きさが$P_1 l$で時計回り（図1.35下））である．このように，加えるモーメントM_0はP_3の作用点によって大きさも向きも変わる．また，$M_0 = 0$になるP_3の作用点はただ一つ（**基本例題1.25，1.26**参照）であることもわかる．
> 解説3：図1.35上では，P_1は上向きの力と下向きの力で打ち消される．同図下では，P_2が打ち消される．実は，次の例題のフリーボディダイヤグラムと関連する．

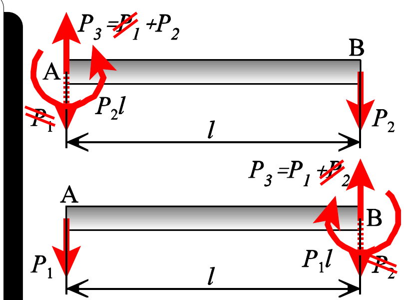


図1.35

> **基本例題1.28**　図1.36のように端Aが壁に埋め込まれ，端Bが自由である長さlの棒の点Bに下向きの力Pがはたらいている．端Aで棒が受ける反力を求めよ．
> **指針**　「壁に埋め込まれている」というのは，その点で並進も回転も拘束されていることを表している．ゆえに，棒が受ける反力は力だけでなくモーメントも含まれる．

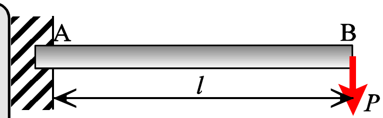


図1.36

解答　下向きの力にプラス符号をつけ，拘束されている端Aでの反力を上向きにR_Aとすると，力のつりあい

$$P - R_A = 0$$

から

$$R_A = P.$$

端AでのモーメントをM_Aとし時計回りを仮定すると，モーメントのつりあいは，点Aまわりで

$$-M_A - Pl = 0.$$

これから，

$$M_A = -Pl.$$

つまり，端Aでのモーメントは，大きさがPlで反時計回りである．■

> 解説：壁による拘束を取り去って端Aに上向きの力Pと反時計回りのモーメントPlを加えてもつりあい状態が保たれることは直感的にわかる．対応するフリーボディダイヤグラムは図1.37のようになる．この系は図1.35上の系と同じであることに気付こう．また，壁の代わりに置いたモーメントPlを固定モーメントという．

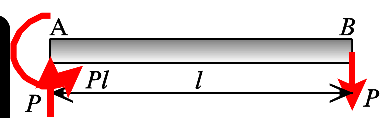


図1.37

基本例題1.29　基本例題1.28のフリーボディダイヤグラム図1.37において，端Aからxの位置にある任意点Cで切断した．切断した後も部分ACとCBがそれぞれ静力学的につりあっているためにCに加える力とモーメントを求めよ．

指針　図1.37で端Aの力R_A=Pと反時計回りのモーメントM_A=PlはBの力Pと共に外力であると考える．これら三つの外力が作用したままで図1.38(A)のように端Aからxの位置にある任意点Cに仮想切断面を考え，部分ACとCBがそれぞれ静力学的につりあっている条件を考える．

解答　図1.38(B), (C)のように考える．

部分AC（同図（B））について，外力は上向きの力Pと反時計回りのモーメントPlである．切断点Cで力F_Cを下向き，モーメントM_Cを反時計回りにそれぞれ仮定して静力学的つりあい式をつくると，

力のつりあい：　　$-P+F_C=0$

モーメントのつりあい：　　$Pl-Px+M_C=0$（点Cまわり）

となるから，

$F_C=P$，$M_C=-Pl+Px$

として得られる．この結果から，力F_Cは下向きで大きさはP，モーメントM_Cは時計回りで大きさは$Pl-Px$である．

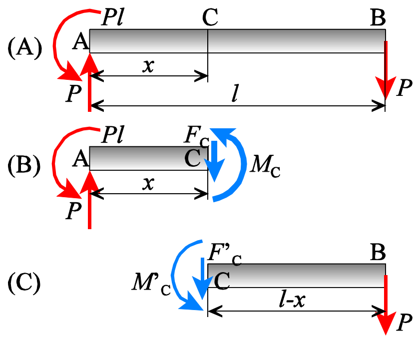


図1.38

部分CB（同図（C））について，外力は端Bの下向きの力Pのみである．切断点Cで力F_C'を下向き，モーメントM_C'を反時計回りにそれぞれ仮定して静力学的つりあい式をつくると

$F_C'+P=0$

$M_C'-P(l-x)=0$（点Cまわり）

より，

$F_C'=-P$，$M_C'=Pl-Px$

となる．この結果から，力F_C'は上向きで大きさはP，モーメントM_C'は反時計回りで大きさは$Pl-Px$である．■

解説1：切断点Cで再度接着すると，$F_C+F_C'=0$，$M_C+M_C'=0$になっていることに気付く．すなわち，力は下向きと上向き，モーメントは時計回りと反時計回りでいずれも対になっていて，これらは点Cにおける内力である．**基本例題1.03～1.05**の内力Nの性質と同じである．また，内力と外力のつりあいは切断点Cの左側の系で考えても右側の系で考えても同じである．

解説2：内力は物体内のどこにでも発生している力であり，大きさや向きは場所によって異なることがある．たとえば，この例題で$M_C=-Pl+Px$であり，xは$0\leq x\leq l$で任意なので明らかにx（仮想断面の位置）に依存している．

解説3：内力F_CやF_C'は仮想断面に沿った内力であり，図1.25の内力Fと同じであるので，せん断力である．また，モーメントM_CやM_C'を曲げモーメントというが，これらについては第4章で詳しく述べる．

解説4：この例題は先の**基本例題1.27**との関連で重要である．**基本例題1.27**での外力は点Bにはたらく下向きの力Pであるが，この例題では図1.37のフリーボディダイヤグラムを基本にしているので，点Aにおいた力とモーメントも系の外力になっている．このことは第4章でとても重要なので，記憶にとどめておいてほしい．

基本例題1.30　基本例題1.22で水平部材ACに発生するせん断力と曲げモーメントを各区間ごとに求めよ．a=0.5 m，b=0.7 m，tanθ=0.5，P=200 kNとする．

指針　基本例題1.29では左端が固定端であるので固定モーメントが生じていたが，この例題では左端は回転支持されているので固定モーメントはゼロである．

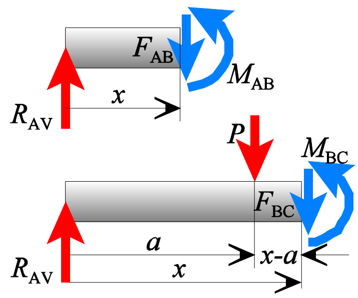


図1.39

解答　$\sin\theta=1/\sqrt{5}=0.447$であるから，**基本例題1.22**の答えから$R_{AV}$=117 kNである．AB間とBC間のせん断力をF_{AB}とF_{BC}とし，曲げモーメントをM_{AB}とM_{BC}とすると，図1.38(B)に相当する図は，各区間で図1.39のようになる．この図から，せん断力と曲げモーメントは，点Aを原点として右向きにx mとすると，

AB間 $F_{AB}=R_{AV}=117\ kN$

$M_{AB}=R_{AV}x=117\times x\ kNm$

BC間 $F_{BC}=R_{AV}-P=117-200=-83\ kN$

$M_{BC}=R_{AV}x-P(x-a)=117\times x-200\times(x-0.5)\ kNm$　(あえてまとめていないのには意味がある)

である．■

解説：図1.39から，AB間での静力学的つりあい条件は

$$R_{AV}-F_{AB}=0,\ M_{AB}-R_{AV}x=0$$

となり，これらからF_{AB}とM_{AB}が得られる．また，BC間でのつりあい条件は

$$R_{AV}-P-F_{BC}=0,\ M_{BC}-P(x-a)-R_{AV}x=0$$

となり，これらからF_{BC}とM_{BC}が得られる．この種の例題は第4章で詳しく触れる．

発展例題1.31　発展例題1.23において部材ADの内力N，せん断力F，曲げモーメントMをAC間とCD間で求めよ．

指針　内力Nは部材ADの軸方向の内力で，せん断力Fは軸に垂直な方向の内力．**発展例題1.23**の答えは図1.26のx-y座標系で記述されているので，この問題を解くためには，まず，部材ADの軸を座標軸の一つとして座標変換を用いて力を書き直す必要がある．

解答　1)座標変換

部材ADの軸方向座標をX，それに垂直な方向の座標をYで表し，全体座標系をxとyとする．x軸方向の力をP_x，y軸方向の力をP_yとする．同じようにX軸方向の力をP_X，Y方向の力をP_Yとする．

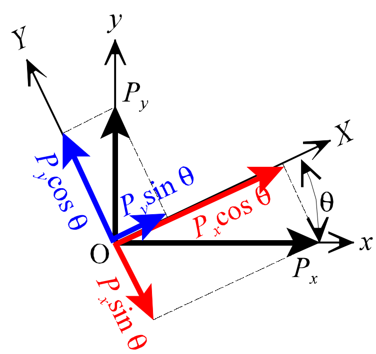


図1.40

図1.40のようにx軸とX軸のなす角をθとすると，

$$P_X=P_x\cos\theta+P_y\sin\theta,$$

$$P_Y=-P_x\sin\theta+P_y\cos\theta$$

となり，P_x，P_y，θがわかっていればP_X，P_Yを求めることができる．

点A, C, Dでの部材ADの座標XとY方向の力は，θ=45°であるから，

点A：$P_x=R_{Ax}=292\ kN$，$P_y=R_{Ay}=-83\ kN$から，

$P_X = R_{AX} = 292\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 83\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 148\ kN,$

$P_Y = R_{AY} = -292\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 83\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -265\ kN$

点C : $P_x = -R_{Cx} = -292\ kN$, $P_y = R_{Cy} = 583\ kN$から,

$P_X = R_{CX} = 206\ kN$, $P_Y = R_{CY} = 619\ kN$

点D : $P_x = 0\ kN$, $P_y = -500\ kN$から,

$P_X = P_{DX} = -354\ kN$, $P_Y = P_{DY} = -354\ kN$

2) 内力Nとせん断力F

1) で得られた力の成分を図示すると図1.41のようになる. この図から, Nは

$N_{AC} = -148\ kN$, $N_{CD} = -354\ kN$,

Fは, 下向きのせん断力を正として

$F_{AC} = 265\ kN$, $F_{CD} = -354\ kN$,

Mは, 反時計回りの曲げモーメントを正として

$M_{AC} = -265\times X\ kNm$,

$M_{CD} = -265\times X + 619\times(X - 4\sqrt{2})\ kNm$

である. ■

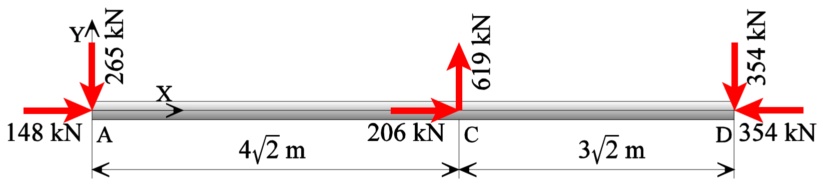


図1.41

解説 : この例題のように, 部材座標軸が全体座標軸に対して角度を持っている場合は, まず部材座標系で力を表現した後内力を計算することになる.

この章の締めくくりに少し複雑な構造の部材の内力を求めてみよう.

応用例題1.32 図1.42のような構造の棒部材に生ずる内力を求めなさい. 棒部材は点A～Fでピンで接続されている.

指針 Aは回転支点で水平方向反力と垂直方向反力の両方が生ずる. Dは移動支点で垂直方向反力のみ生ずる. まず, 系全体の静力学的つりあい条件からAとDの反力を求め, 次に順番に内力を求めていく.

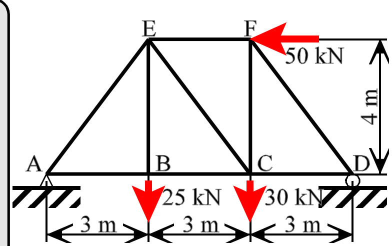


図1.42

解答 系全体のフリーボディダイヤグラムを図1.43のように考えると, 静力学的つりあい条件は

水平方向

$R_{AH} - 50 = 0$ (単位kN)

垂直方向

$R_{AV} + R_{DV} - 25 - 30 = 0$ (単位kN)

モーメント $-3\times25 - (3+3)\times30 + 4\times50 + (3+3+3)\times R_{DV} = 0$ (単位kNm)

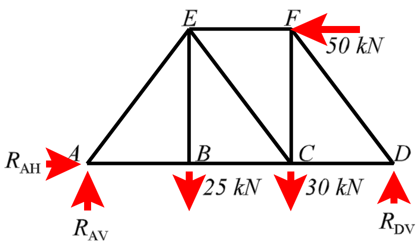


図1.43

以上から,

$R_{AH} = 50\ kN$, $R_{AV} = 48.9\ kN$, $R_{DV} = 6.1\ kN$.

点Aに着目すると, 外力は$R_{AH} = 50\ kN$, $R_{AV} = 48.9\ kN$で内力はN_{AB}とN_{AE}なので, 力のつりあいは図1.44(A)を参照して

水平方向

$$N_{AB}+N_{AE}\cos(\angle EAB)+R_{AH}=0$$

垂直方向

$$N_{AE}\sin(\angle EAB)+R_{AV}=0.$$

これから,

$$N_{AE}=-\frac{R_{AV}}{\sin(\angle EAB)}=-61.1\ kN,$$

$$N_{AB}=-N_{AE}\cos(\angle EAB)-R_{AH}=-13.3\ kN.$$

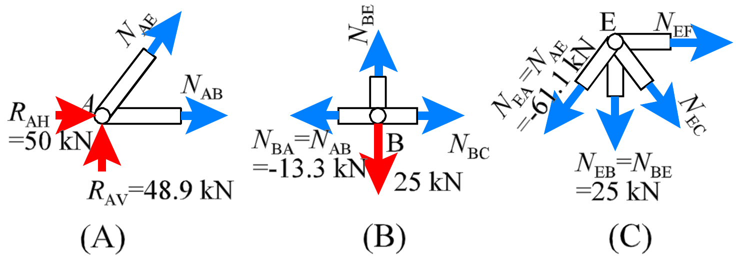


図1.44

点Bに着目すると, 外力は25 kNの下向きの力, 内力は$N_{BA}(=N_{AB})$, N_{BC}, N_{BE}である. 力のつりあいは図1.44(B)を参照して

水平方向　$-N_{AB}+N_{BC}=0$

垂直方向　$N_{BE}-25\ kN=0.$

これから,

$$N_{BC}=N_{AB}=-13.3\ kN,\ N_{BE}=25\ kN.$$

点Eに着目すると, 外力はなく, 内力は$N_{EA}(=N_{AE})$, $N_{EB}(=N_{BE})$, N_{EC}, N_{EF}である. 力のつりあいは図1.44(C)を参照して

水平方向　$-N_{AE}\cos(\angle EAB)+N_{EF}+N_{EC}\cos(\angle CEG)=0$

垂直方向　$-N_{AE}\sin(\angle EAB)-N_{BE}-N_{EC}\sin(\angle CEG)=0.$

これから,

$$N_{EC}=29.9\ kN,\ N_{EF}=-54.6\ kN.$$

その他の内力の計算の詳細は省略するが, 結果は次の通りである.

$$N_{CF}=6.1\ kN,\ N_{CD}=4.6\ kN,\ N_{DF}=-7.6\ kN.$$

■

解説1:内力の向きを仮定するときには, 図1.44(A)～(C)の矢印線の向きを正の向きとするとよい. 計算の結果負の値が出てきても, 向きを正のままで数値のみ負の値を代入する.
解説2:このような棒部材がピンで結合された構造をトラス構造という. このような構造の応用例は鉄橋や橋に多く見られるので気をつけておこう.

材料力学における「力」に関する補足

材料力学は物体が外力の作用を受けたときに物体の内部に生ずる内力を求めることが基本である．そのため，物体内部に仮想的な面を考えてその面の上に発生する力を問題にする．

Q1:分かりにくいことの一つは，ケーキにナイフで切れ目を入れると面が二つできるように，物体内部の仮想的な面は二つ一組になっていて，どちらの仮想的な面に発生する力を考えればよい？

A1:どちらでもかまわないのである．理由は，つりあい状態では二つの面は大きさが等しく向きが逆の力で引き合っているので，一方のつりあいを考えればもう一方も考えたことになるのである．つまり，元の系がつりあっているなら，仮想切断面の右半分がつりあっていれば左半分もつりあっているのだ．

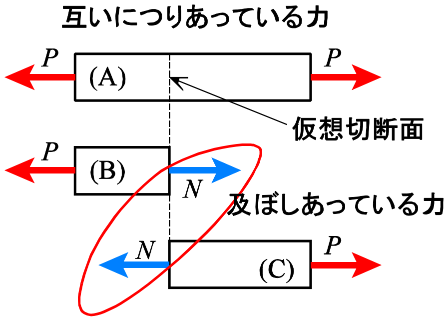


図1.45

Q2:仮想面上でつりあい状態にある内力のどちらが正？

A2:実は，一方の面の内力が正ならもう一方も正なのである．作用・反作用は，図1.45のように，「互いに力を及ぼしあっている」と言っているだけで正負とは関係がない．内力はこのような関係にある．力のつりあいで正負の符号をつけるのは互いに逆向きであれば一方を正にするともう一方が負になるだけで，力そのものが正であるとか負であるとかを言っているわけではない．

Q3:つりあいを考えるとき，どっちの向きを正と考える？

A3:どっちの向きを正にする，というか，どっちの向きに正の符号を付けるかは自分で決めてかまわないのである．とはいえ，何かルールを作って一貫性を保っておいたほうがいい．たとえば，今考えている系で一貫して「上向きの力に正の符号をつけるぞ！」とか「座標軸の正の向きの力に正の符号をつけるぞ！」とか「反時計回りのモーメントに正の符号をつけるぞ！」とか・・・．図1.45の場合，「右向きの力に+符号をつける」と決めると図1.46のようなつりあい式ができる．(B)も(C)も，$N=P$というごく自明の答えになる．

「右向きの力に+符号をつける」と決めると，つりあい式は

(A) $P-P=0$
(B) $-P+N=0$
(C) $P-N=0$

図1.46

Q4:力そのものの正負はどう決める？

A4:正負を定義するためには，生じている面の法線 n の向きと生じている内力の向きが必要である．内力は応力の合力であるから，内力の正負は応力の正負と直接的な関係にある．応力の正負については，後の「組み合わせ応力」の章(教科書なら第8章)で取り上げる．

Q5:軸力系の場合の決め方は？

A5:図1.47上では，法線nはいずれも面の外を向いている．これが，正の向きである．同図(1)と(2)のNはnと同じ向きなので正の内力として考えている．つりあいを考えるとき，図1.46のような「右向きの力に+符号」ルールを適用すると，(1)の場合，Nは大きさがPで正の内力で，(2)の場合，Nは大きさがPで負の内力である．$N>0$なら「引張の内力」あるいは「引張力」，$N<0$なら「圧縮の内力」あるいは「圧縮力」と言えばいい．

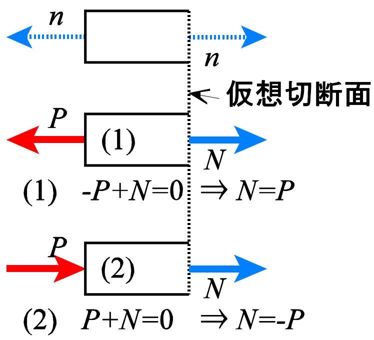


図1.47

Q6:軸方向内力Nとせん断力Fで統一ルールはあるの？

A6:図1.48が統一ルールである．図では，NとFの正の向きで表現していて，添字x，yは力の方向を表している．座標系に注意してほしい．

Q7:もう少し単純にならないかなぁ．

A7:次にような順番で考えてみるといいかも．

(1) 図1.48のように，内力NやFを正の向きに仮定する．

(2) 内力と内力，外力と内力のつりあい式を立てる．このとき，正負の符号をつける力の向きを，考えている系全体で一貫性を保って，「自分で」決める．

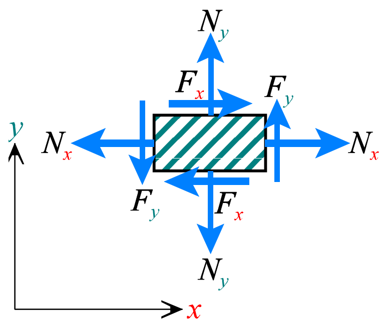


図1.48

(3) (2)でたてたつりあい式を内力について解いて，内力を外力で表現する．

Q8:数値を代入して計算するときはどうするの？

A8:材料力学では矢印で向きを表すので，力(たとえば図1.47のP)の数値そのものには符号を付けないのがフツーである．つまり，数値は大きさを表すことになる．たとえば，(1)の場合左向きに大きさP，(2)の場合右向きに大きさP，ということになる．変形量を計算すると，軸力系の場合，$\delta=\dfrac{NL}{AE}$なので，図1.47(1)の場合は$\delta=\dfrac{NL}{AE}=\dfrac{PL}{AE}>0$となって正の値，(2)の場合は$\delta=\dfrac{NL}{AE}=-\dfrac{PL}{AE}<0$となって負の値になる．$\delta>0$の場合「伸びる」，$\delta<0$の場合「縮む」と表現するだけである．習慣付けてほしいことは，文字式を作ってから所定の数値を代入して計算すること．もっとも，最終的な答えを表す文字式がやたら面倒になる場合は，求めたい量以外の物性値やなどをあらかじめ代入して式を作ってもよい．

材料力学における「モーメント」に関する補足

モーメントというのはいま一つ説明に困る．力学の上では補足例題で説明したように「ある点とその点から作用線におろした垂線の長さ×力の大きさ」で決まる．力学では「ある点」は面内のどこでもよい．しかし，材料力学ではそうはいかない．

材料力学は物体の内力や変形を扱うのでモーメントの作用位置は物体から離れていては困るのである．この本の紙の上ではなく紙の上に描かれた物体の絵の上でなければならない．**基本例題1.26**をもう一度見てみよう．この例題の解答のモーメントM_0をおく位置はあたかも点Cのように描いてある．ところが，解説1をみると，少し式変形するとM_0の位置が点Aのようでもあり，点Bのようでもある．つまり，考えている系全体のモーメントのつりあいを満たすために置くモーメントの位置はどこでもいい（と言っても，描かれた物体の絵の上に限るが・・・）ことになる．理由は簡単で，力P_1，P_2，P_3がつくるモーメントは偶力のモーメントになっていて，そのモーメントを打ち消すモーメントもまた偶力のモーメントになっている．

ほんとにどこでもいいかと言えばそうでもないところがややこしい点である．**基本例題1.27**は一般静力学の問題なのでどこでもいいのだが，**基本例題1.28**では様子が違う．同例題に挙げた対応するフリーボディダイヤグラムの点Aの反時計回りのモーメントPlは一般静力学上どこでもかまわない．つまり，点AとBの力がつくる時計回りの偶力のモーメントPlを打ち消すために反時計回りのモーメントPlが必要になるだけである．しかし，元の系では図1.36のように「点Aが壁によって拘束されている」ので明確に拘束点Aを持ち，外力Pが作る時計回りのモーメントは偶力のモーメントではなく点Aまわりの力のモーメントである．そのため，静力学的につりあうために反時計回りのモーメントPlをおく点は「点Aしかない」ことになる．つまり，静力学的にはモーメントをおく位置はどこでもよいが，材料力学的には回転が拘束される点に置く，ことになる．

力の場合も同じで，材料力学の場合は必ず「拘束」があるので，拘束位置に力を置くことになる．

第1章　演習問題

問題1．図1でP_1=20 kN，P_2=15 kN，P_3=10 kNである．端Dに力P_4を作用させて系全体が静力学的につりあうようにしたい．P_4を求めよ．また，各区間に生ずる内力を求めよ．（関連例題：**基本例題1.06**）

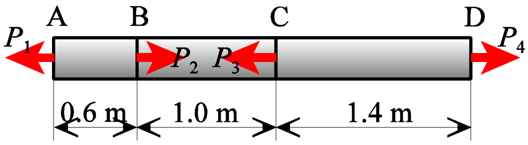


図1

Ans．P_4=15 kN，N_{AB}=20 kN，N_{BC}=5 kN，N_{CD}=15 kN.

問題2．問題1．で，棒全体の長さの変化量δを求めよ．棒の横断面積A=500 mm^2，ヤング率E=200 GPaとする．（関連例題：**基本例題1.07−1.10**）

Ans．δ=0.38 mm.

問題3．問題1．で，P_2=35 kNになった．系が静力学的につりあうような端Dの力P_4はどれだけか．また，棒全体の長さの変化量δを求めよ．棒の横断面積A=500 mm^2，ヤング率E=200 GPaとする．（関連例題：**基本例題1.06−1.10**）

Ans．P_4=−5 kN，N_{AB}=20 kN，N_{BC}=−15 kN，N_{CD}=−5 kN，δ=−0.1 mm.

問題4．図2のような一辺の長さがx軸方向にxの一次関数で変化する横断面が正方形の棒に力Pが作用する．棒全体の長さの変化量δの式を求めよ．棒の材料のヤング率をEとする．（関連例題：**発展例題1.17，発展例題1.19**）

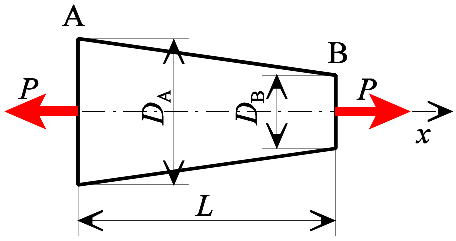


図2

ヒント：辺の長さの変化は$D(x)=D_A+\frac{D_B-D_A}{L}x$．棒の断面積は$D^2(x)$．

棒のひずみは$\varepsilon(x)=\frac{d\delta}{dx}=\frac{P}{D^2(x)E}$.

Ans．$\delta=\frac{PL}{D_AD_BE}$

問題5．図3は横断面が変化する同心中空円形の棒である．この棒の内径D_iが一定であるとき，外径D_oをどのように変化させれば平等強さの棒になるか．D_oをxの関数として示せ．（関連例題：**発展例題1.15**）

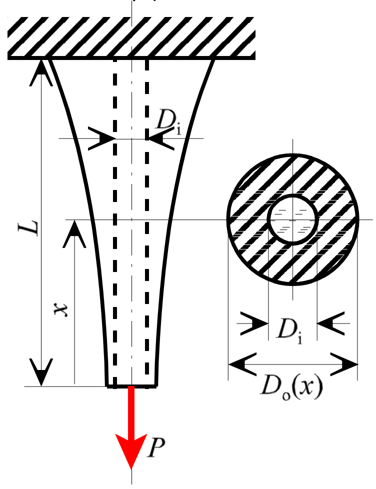


図3

Ans. $D_o^2(x)=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{P}{\sigma_0}e^{\varrho gx/\sigma_0}+D_i^2$ または $D_o(x)=\left[\dfrac{4}{\pi}\dfrac{P}{\sigma_0}e^{\varrho gx/\sigma_0}+D_i^2\right]^{1/2}$

問題6．図4のトラス構造の部材内力をすべて求めよ．反力 R_{Ax}，R_{Ay}，R_{Bx} ならびに内力を図5のように仮定せよ．例題でも取り上げたこのような方法を節点法という．（関連例題：**応用例題1.32**）

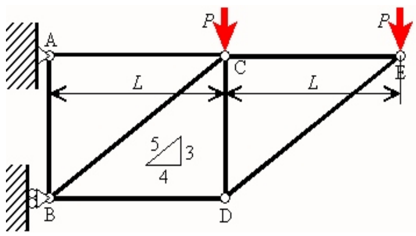


図4

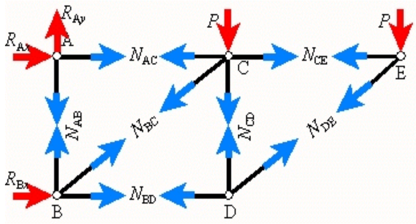


図5

Ans. $R_{Ax}=-4P$，$R_{Ay}=2P$，$R_{Bx}=4P$．

$$N_{AB}=2P,\ N_{AC}=4P,\ N_{BC}=-\frac{10}{3}P,$$

$$N_{BD}=-\frac{4}{3}P,\ N_{CE}=\frac{4}{3}P,\ N_{CD}=P,\ N_{DE}=-\frac{5}{3}P.$$

問題7．問題6．のトラス構造で $R_{Ax}=-4P$，$R_{Ay}=2P$，$R_{Bx}=4P$ である．いま，図6に実線で示した部分構造を考えて部材AC，BC，BDに発生する内力を求めよ．このような方法を切断法という．

ヒント：水平方向と垂直方向の力のつりあい式とモーメントのつりあい式（点Bまわりが楽）を作って解く．

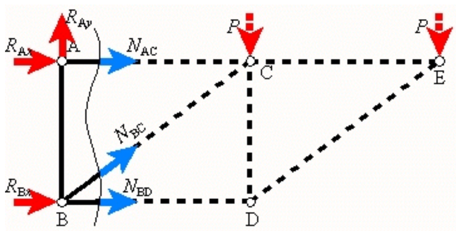


図6

Ans. 問題6．の答えと同じ．$N_{AC}=4P$，$N_{BC}=-\dfrac{10}{3}P$，$N_{BD}=-\dfrac{4}{3}P$．

問題8．図7の点Bの垂直方向変位δを表す式を求めよ．部材の横断面積を A，ヤング率を E とする．

ヒント：部材ABとBCの内力を N とすると，垂直方向の力のつりあいは $2\times(4/5)N-P=0$ になることと，棒の長さの変化量λと垂直方向変位δとの関係は近似的に図8のようであることを使う．

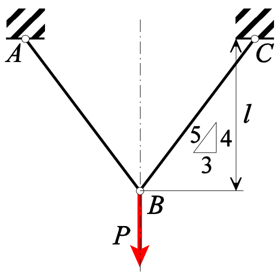


図7

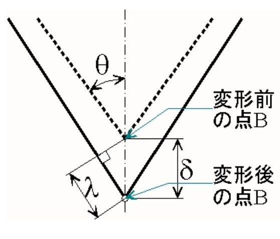


図8

Ans. $\delta=\dfrac{125}{128}\dfrac{Pl}{AE}$

問題9．図9のように長さl=500 mmの棒の一端を直径25 mmの軸に通してキーで固定する．棒の先端に500 Nの力を加えるものとして，キーの幅bを設計せよ．キーの許容せん断応力τ_a=100 MPa，キーの長さを25 mmとする．軸と棒との間の摩擦はない．

ヒント：軸の中心周りのモーメントのつりあいからキーにはたらく力（棒がキーに及ぼす力）を求める．この力によってキーにせん断応力が生じ，このせん断応力が許容せん断応力以下でなければならないことからbを求める．

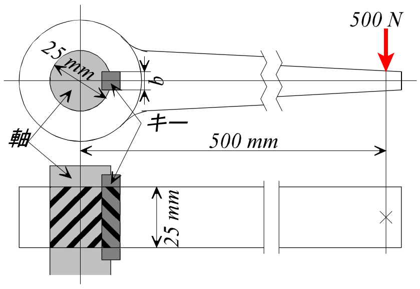


図9

Ans. $b \geq 8$ mm .

問題10．問題9で，軸にはたらく力（棒が軸に及ぼす力）の大きさと向きを求めよ．

ヒント：棒がキーに及ぼす力は下向きなのでキーが棒に及ぼす力は上向き．このことを頭において，「棒に及ぼす力」を考える．その結果，軸が棒に及ぼす力の逆向きが棒が軸に及ぼす力．

Ans. 19.5 kN，上向き．

第2章　弾性棒に係る不静定系の力学

第1章では力学，特に静力学的つりあい条件，フリーボディダイヤグラムを基礎にして材料力学の用語について例題を通して学んだが，静力学的なつりあいだけで部材にはたらく力や内力がわかるわけではなく，「変形」状態を考えなければ力がわからないことがある．このような系を不静定系と呼ぶ．

ここでは，不静定系のうち，軸力に関わる不静定系を取り上げる．前章の最後のほうの例題で扱ったせん断力や曲げモーメントを求める際に現れる不静定系は後の章で述べる．

基本事項1（不静定系）

静力学的なつりあい（力のつりあいとモーメントのつりあい）だけでは系を構成する部材あるいは部分の力が得られない系を不静定系という．たとえば，図2.1の系は，前章の**基本例題1.06**の系（図2.2に再掲）とよく似ているが，不静定系である．

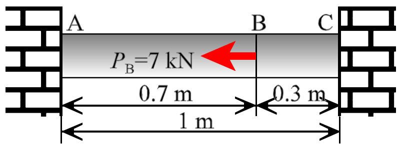


図2.1

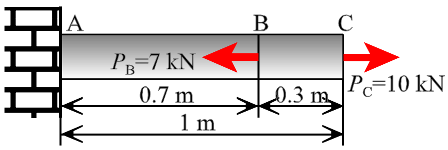


図2.2

基本例題2.01　図2.1のように，剛体壁にはさまれた一様な棒ACの途中の点Bに力がはたらいている．AB間とBC間に生ずる内力を求めよ．ヤング率をE，断面積をAとする．

指針　1）内力を仮定して外力との間のつりあいを考える．図2.1に対応するフリーボディダイヤグラムは図2.3になる．図2.3は**基本例題1.06**のフリーボディダイヤグラムと同じであるが，**基本例題1.06**ではP_Aのみ未知であるのに対してこの例題ではP_AとP_Cが未知である．

2）不足する条件として，剛体の壁にはさまれているので棒の系全体の軸方向の長さの変化量がゼロになることを使う．

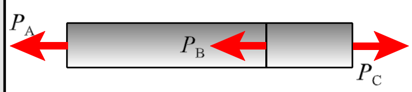


図2.3

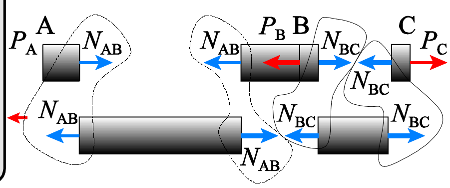


図2.4

解答　AB間とBC間の内力をN_{AB}とN_{BC}で表す．Aにはたらく力をP_Aで左向きと仮定すると，図2.4から，点Bを含む周辺部分の力のつりあいは

$$-N_{AB}-P_B+N_{BC}=0 \qquad \text{(a)}$$

AB間とBC間の長さをl_1とl_2として，軸方向の長さの変化量をδ_{AB}とδ_{BC}で表すと，

$$\delta_{AB}=\frac{N_{AB}l_1}{AE},\quad \delta_{BC}=\frac{N_{BC}l_2}{AE}.$$

となる．棒は剛体壁で挟まれていて全体として変形できないから，

$$\delta_{AB}+\delta_{BC}=\frac{N_{AB}l_1}{AE}+\frac{N_{BC}l_2}{AE}=0 \qquad \text{(b)}$$

式(a)と(b)から

$$N_{AB}=-\frac{P_Bl_2}{l_1+l_2},\quad N_{BC}=\frac{P_Bl_1}{l_1+l_2}.$$

所定の数値を代入すると，内力は

$$N_{AB}=-2.1\ kN,\quad N_{BC}=4.9\ kN$$

である．■

解説1：図2.2の静定系の場合はN_{AB}とN_{BC}は外力P_Bの作用位置に無関係であるが，図2.1の不静定系の場合は外力P_Bの作用位置に関係することがわかるだろう．

解説2：$P_A=N_{AB}$，$P_C=N_{BC}$であり，これらは剛体壁が棒に及ぼす力である．

基本例題2.02　図2.5のように材料＃1でできた棒が材料＃2でできた中空円筒の中に入っていて，剛体板が接着されている．この板に外力Pが作用したとき，棒と中空円筒に発生する内力および応力を求めよ．棒の断面積とヤング率をA_1，E_1とし，中空円筒のそれらをA_2，E_2とする．なお，剛体板は外れない．

指針　棒に生ずる内力をN_1，円筒に生ずる内力をN_2として，内力と外力との間の力のつりあいと，棒と円筒の長さの変化量が等しいことを使う．

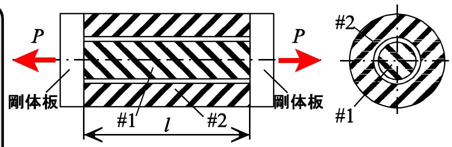


図2.5

解答　フリーボディダイヤグラムは，棒と円筒に作用する外力をP_1とP_2とすると，図2.6のようになり，$P_1+P_2=P$である．内力は図2.7から$N_1=P_1$，$N_2=P_2$である．ゆえに，

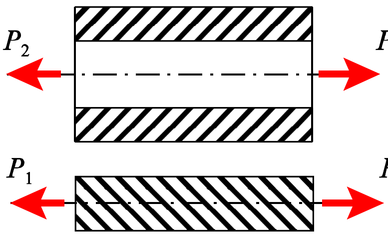


図2.6

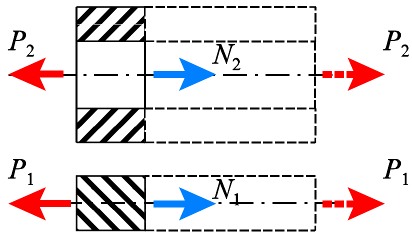


図2.7

$$N_1+N_2=P \qquad \text{(a)}$$

棒と円筒の長さの変化量をδ_1，δ_2とおくと，

$$\delta_1=\frac{N_1 l}{A_1E_1},\quad \delta_2=\frac{N_2 l}{A_2E_2}.$$

$\delta_1=\delta_2$，すなわち，

$$\frac{N_1 l}{A_1E_1}=\frac{N_2 l}{A_2E_2} \qquad \text{(b)}$$

でなければならないので，式(a)と(b)から，内力は

$$N_1=\frac{A_1E_1}{A_1E_1+A_2E_2}P,\quad N_2=\frac{A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P.$$

生ずる応力は

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{E_1}{A_1E_1+A_2E_2}P,\quad \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P$$

である．■

解説1：外力の向きが逆なら，この例題のPを$-P$に置き換えればよい．

解説2：この例題では棒と円筒の長さが共にlなので，長さの変化量δ_1，δ_2の代わりに軸方向ひずみを使ってもかまわないようだが，勧められない．次の例題を参照．

基本例題2.03 図2.8のように材料＃1でできた棒が材料＃2でできた中空円筒の中に入っていて，剛体板が接着されている．この板に外力Pが作用したとき，棒と中空円筒に発生する内力を求めよ．棒の断面積，ヤング率，長さをA_1，E_1，l_1とし，中空円筒のそれらをA_2，E_2，l_2とする．なお，剛体板は外れない．

指針 **基本例題2.02**と同じである．ただし，$l_1 \neq l_2$に注意．

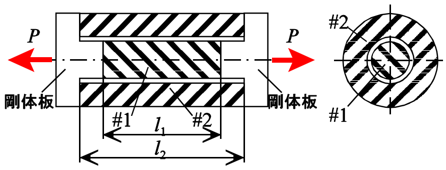


図2.8

解答 **基本例題2.02**とほぼ同じであるが，棒と円筒の長さの変化量δ_1とδ_2は，

$$\delta_1 = \frac{N_1 l_1}{A_1 E_1},\ \delta_2 = \frac{N_2 l_2}{A_2 E_2}.$$

$\delta_1 = \delta_2$でなければばならないので，内力は

$$N_1 = \frac{A_1 E_1 l_2}{A_1 E_1 l_2 + A_2 E_2 l_1} P,\ N_2 = \frac{A_2 E_2 l_1}{A_1 E_1 l_2 + A_2 E_2 l_1} P$$

である．■

解説：軸方向ひずみが等しい条件が成立するのは，力がはたらいていない状態で長さが等しい場合のみである．間違えやすいので，この種の問題では常に長さの変化量に注目しておくこと．

発展例題2.04 図2.9のように材料＃1でできたボルトを材料＃2でできた中空円筒に通して剛体板で挟んで軽く締められている．この状態からナットを締めたところ，ナットがδだけ進んだ．ボルトと中空円筒に発生する内力を求めよ．ボルトの断面積とヤング率をA_1，E_1とし，中空円筒のそれらをA_2，E_2とする．

指針 1）強く締め付けると，ボルトと円筒に内力N_1とN_2が発生する．外力はないので内力同士でつりあっている．つまり，$N_1 + N_2 = 0$．

2）ボルトは内力N_1でδ_1だけ長さが変化し，一方，円筒は内力N_2でδ_2だけ長さが変化する．ナットが進んだ量δはボルトと円筒が変形した結果である．

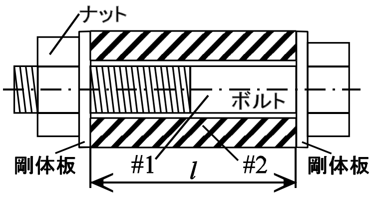


図2.9

解答 ボルトに生ずる内力をNとすると，円筒に生ずる内力は$-N$であるので，ボルトと円筒の長さの変化量δ_1とδ_2は，

$$\delta_1 = \frac{Nl}{A_1 E_1},\ \delta_2 = -\frac{Nl}{A_2 E_2}.$$

δは，図2.10を参照して

$$\delta = |\delta_1| + |\delta_2| = \frac{Nl}{A_1 E_1} + \frac{Nl}{A_2 E_2}$$

なので，ボルトの内力Nは

$$N = \frac{A_1 E_1 A_2 E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \frac{\delta}{l}$$

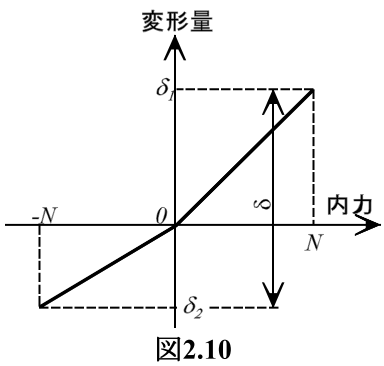


図2.10

であり，円筒には $-N$ の内力が生ずる．■

解説1：多くの機械構造物では，部品の脱落を防ぐためにボルトの増し締めを行う．増し締めは締め付けトルクというモーメントの値で指定される．締め付けトルクはボルトの材質や呼び径によって異なり，組み立て時のマニュアルで指定される．また，増し締めの際には締め付けトルクを設定できる工具を用いる．
解説2：ついでに，ボルトやネジの山と山の間隔または谷と谷の間隔をピッチいう（図2.11）．

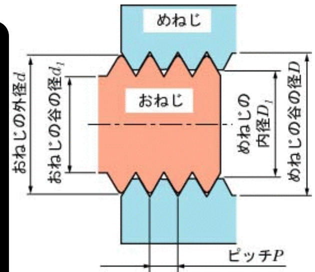


図2.11

応用例題2.05　発展例題2.04で自然長 $l=75\ mm$，ボルトのピッチ $p=3.2\ mm$ で $\delta=p/40$ であった．ボルトと円筒に生ずる応力を求めよ．

ボルトのヤング率，断面積：$E_1=200\ GPa$，$A_1=6\ cm^2$

円筒のヤング率，断面積：$E_2=100\ GPa$，$A_2=12\ cm^2$

である．

解答　まず，$\delta=p/40=3.2/40=0.08\ mm$．内力は**発展例題2.04**の式に代入して

$$N=\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}\frac{\delta}{l}=\frac{(6\times10^{-4})(200\times10^9)(12\times10^{-4})(100\times10^9)}{(6\times10^{-4})(200\times10^9)+(12\times10^{-4})(100\times10^9)}\times\frac{0.08\times10^{-3}}{75\times10^{-3}}$$

から $N=64\ kN$ となるので，ボルトと円筒に生ずる応力は

$$\text{ボルト：}\ \sigma_1=\frac{N}{A_1}=\frac{64\times10^3}{6\times10^{-4}}=107\ MPa$$

$$\text{円筒：}\ \sigma_2=-\frac{N}{A_2}=-\frac{64\times10^3}{12\times10^{-4}}=-53.4\ MPa$$

である．■

発展例題2.06　発展例題2.04の状態から図2.12のように剛体板に力 P が作用した．このときのボルトの応力を求めよ．ただし，剛体板は円筒から離れない．
指針　基本例題2.02の結果を重ね合わせればよい．

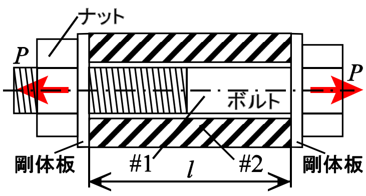


図2.12

解答　P が作用しない状態でのボルトの応力は**発展例題2.04**から

$$\sigma_1=\frac{E_1A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}\frac{\delta}{l}.$$

増し締めがない状態で剛体板に P が作用したときに発生するボルトの応力は**基本例題2.02**から

$$\sigma_1=\frac{E_1}{A_1E_1+A_2E_2}P.$$

これらを加えると

$$\sigma_1=\frac{E_1}{A_1E_1+A_2E_2}\left(P+A_2E_2\frac{\delta}{l}\right)$$

である．■

解説：**指針**で「**基本例題2.02**の結果を重ね合わせればよい．」と簡単に書いたが，ここではその理由について説明する．

いま，**発展例題2.04**の状態から剛体板に力Pが作用することによって，ボルトと円筒に，それぞれ，内力N_1とN_2を生じ，ボルトと円筒の内力は$N+N_1$，$-N+N_2$になるから力のつりあいは$\underline{N_1+N_2=P}$．内力の変化量N_1とN_2による長さの変化量は，図2.13から

$$\delta_1=\frac{N_1 l}{A_1 E_1},\quad \delta_2=\frac{N_2 l}{A_2 E_2}$$

であり，剛体板は円筒から離れないので$\underline{\delta_1=\delta_2}$が成り立つ．アンダーラインを付けた二つの式は**基本例題2.02**の式に他ならない．

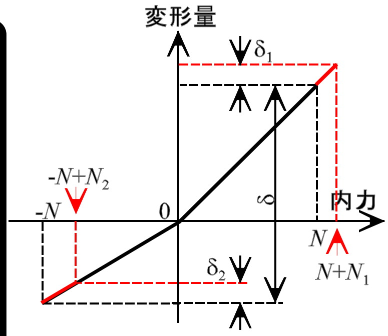


図2.13

応用例題2.07　ボルトの材料の許容応力は$\sigma_a=250\ MPa$である．Pの最大値を定めよ．計算には**応用例題2.05**の数値を用いよ．

解答　増し締めによってボルトに生じている応力は**応用例題2.05**から，$\sigma_1=107\ MPa$である．この状態からボルトは$250-107=143\ MPa$の応力の増加まで耐えられる．$143\ MPa$を生ずる力Pは，**発展例題2.06**の式から

$$P=\frac{(6\times10^{-4})(200\times10^9)+(12\times10^{-4})(100\times10^9)}{(200\times10^9)}\times(143\times10^6)=171\ kN$$

である．■

応用例題2.08　**発展例題2.04**の剛体板は中空円筒の内力がゼロになると中空円筒から離れる．剛体板が中空円筒から離れない限界の外力Pを求めよ．計算には**応用例題2.05**の数値を用いよ．

解答　**発展例題2.04**の状態で中空円筒に生じている内力は，

$$-N=-\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}\frac{\delta}{l}.$$

剛体板にはたらく外力Pによって生ずる中空円筒の内力の変化分は，**基本例題2.02**から，

$$N_2=\frac{A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P.$$

これらの和がゼロ（$-N+N_2=0$）になると剛体板が中空円筒から離れるので，Pの限界値は

$$P=A_1E_1\frac{\delta}{l}$$

である．この式に所定の数値を代入すると，

$$P=(6\times10^{-4})(200\times10^9)\times\frac{0.08\times10^{-3}}{75\times10^{-3}}=128\ kN$$

である．つまり，剛体板が円筒から離れないためには$P<128\ kN$でなければならない．■

解説：ボルトの増し締めの目的は，機械構造物の運用中にボルトが緩んでしまわないようにすることであるが，機械構造物にはたらく激しい振動などによって構造物の構成要素が構造物から離れないようにすることも目的の一つである．

構成要素（ここでは，剛体板）が構造物（ここでは，円筒）から離れると，構造物と構成要素間の垂直抗力がゼロになり，摩擦力（＝摩擦係数×垂直抗力）もゼロになるから，構成要素が動いてボルトにせん断力を生じさせる．また，軸方向の振動は構成要素が構造物から離れたり密着したりを繰り返す運動なので，お互いに衝撃力を及ぼしあう．よいことは何もない．

この例題の場合，**応用例題2.07**から剛体板にP=171 kNの力がはたらくまでボルトは耐えられるが，**応用例題2.08**から剛体板にP=128 kNより大きい力がはたらくと剛体板と円筒が離れるので，系全体としてP=128 kNが限界になる．次の例題で摩擦力の条件について考えてみよう．

応用例題2.09　図2.14のように図2.9のシステムが壁に埋め込まれ，剛体板に荷重Pとボルトの軸に対して垂直な力Qが作用した．剛体板と円筒との摩擦係数をμとすると，剛体板と円筒が滑らない限界のPを式で表せ．また，Q=20 kN，μ=0.6のとき，Pの限界値を求めよ．計算には**発展例題2.05**の数値を用いよ．

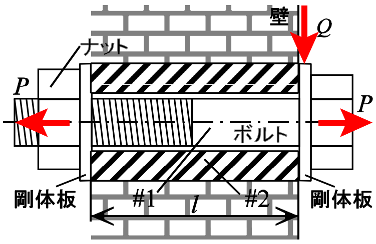


図2.14

解答　増し締め状態でPが作用したとき円筒に発生している内力は，**応用例題2.08**から

$$-N+N_2=\frac{A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}\left(P-A_1E_1\frac{\delta}{l}\right)$$

である．円筒が剛体板におよぼす垂直抗力は$N-N_2$になるから，摩擦力は$\mu(N-N_2)$である．この摩擦力がQより大きければ剛体板と円筒の間にすべりは生じない．つまり，$\mu(N-N_2)>Q$から，Pの限界値を表す式は

$$P<-\frac{A_1E_1+A_2E_2}{\mu A_2E_2}Q+A_1E_1\frac{\delta}{l}$$

である．

Q=20 kN，μ=0.6のとき，上式に数値を代入して

$$P<-\frac{(6\times10^{-4})(200\times10^9)+(12\times10^{-4})(100\times10^9)}{0.6\times(12\times10^{-4})(100\times10^9)}\times20\times10^3+(6\times10^{-4})(200\times10^9)\times\frac{0.08\times10^{-3}}{75\times10^{-3}}$$

からPの限界値は

$$P<61.3\ kN$$

である．■

解説：この例題ではQ=20 kN，μ=0.6のもとで，61.3 kN<P<128 kNでは剛体板と円筒は離れないが，すべりが生ずる．すべることでボルトに横荷重が作用することになる．

発展例題2. 10　図2.15のように，鋼棒に荷重Pを負荷した状態(①)でコンクリートで固めた後(②)，荷重Pを取り除いた(③)．鋼棒とコンクリートに生ずる応力を求めよ．$P=5\ kN$とし，鋼棒の横断面積，ヤング率を$A_1=25\ mm^2$，$E_1=200\ GPa$，コンクリートの横断面積，ヤング率を$A_2=2500\ mm^2$，$E_2=2\ GPa$とする．

指針　②の状態では鋼棒にのみ内力$N=P$が生じている．③の状態のように荷重Pを取り除いたとき，鋼棒の内力は$N+N_1$，コンクリートの内力はN_2になるとすると，$N+N_1+N_2=0$が成り立たなければならない．また，荷重Pを除去した後の鋼棒とコンクリートの長さの変化量は等しいと考える．

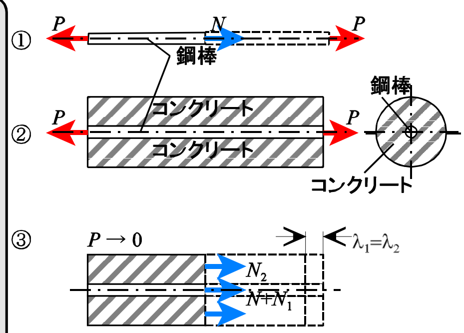


図2.15

解答　荷重Pを除去したとき，鋼棒の内力は$N+N_1$，コンクリートの内力はN_2になり，外力が作用していない条件から

$$N+N_1+N_2=0$$

である．内力N_1とN_2による長さの変化量は等しいので，

$$\frac{N_1L}{A_1E_1}=\frac{N_2L}{A_2E_2}$$

である．これらから，$N=P$を代入して

$$N_1=-\frac{A_1E_1}{A_1E_1+A_2E_2}P,\quad N_2=-\frac{A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P.$$

最終的に鋼棒とコンクリートに発生している内力は

$$N+N_1=\frac{A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P,\quad N_2=-\frac{A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P$$

となり，

$$\sigma_1=\frac{N+N_1}{A_1}=\frac{A_2}{A_1}\frac{E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P,\quad \sigma_2=-\frac{E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P$$

である．

所定の数値を代入すると$N+N_1=-N_2=2.5\ kN$となるから，

$$\sigma_1=100\ MPa,\quad \sigma_2=-1\ MPa$$

である．■

解説：コンクリートは引張に弱い性質があるので，予め負(圧縮)の内力を生じさせることで引張荷重に対して壊れにくい構造部材になる．このようなコンクリートをプリストレスド・コンクリート(pre-stressed concrete)という．

基本例題2.11　図2.16のように等間隔aで設置された三本のケーブル＃1，＃2，＃3に剛体棒が取り付けられ，力Pが作用している．各ケーブルに発生する内力を求めよ．ケーブル＃1と＃3は同じ材料で横断面積も等しい．

指針　**基本例題2.02**に類似している．

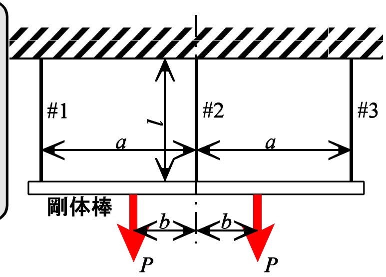


図2.16

解答　構造と負荷の対称性を考慮して，ケーブル＃1と＃3に発生する内力をN_1で表し，ケーブル＃2に発生する内力をN_2で表す．このとき，系のフリーボディダイヤグラムは図2.17のようになるので，力のつりあいから

$$2N_1+N_2=2P.$$

ケーブルの長さの変化量はすべて等しいから，ケーブル＃1と＃3の横断面積をA_1，ケーブル＃2の横断面積をA_2とすると

$$\frac{N_1 l}{A_1E_1}=\frac{N_2 l}{A_2E_2}.$$

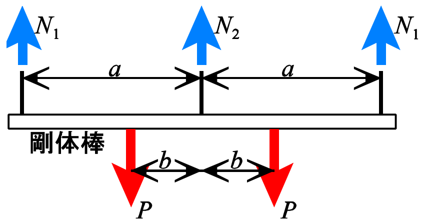


図2.17

以上から，内力は

$$N_1=\frac{A_1E_1}{2A_1E_1+A_2E_2}P,\ N_2=\frac{A_2E_2}{2A_1E_1+A_2E_2}P$$

である．■

解説：内力N_1とN_2について考える．図2.18のようにケーブル＃1に着目し，ケーブルの両端に外力P_1がいわゆる引張の向きにはたらいている（左①）とする．このとき，ケーブルに仮想切断面を考えて三つの部分に分断すると，②のようになっている．赤い破線で囲んだ部分では，P_1は剛体棒がケーブル＃1におよぼす力で，内力N_1はケーブル＃1が剛体棒におよぼす力になっている．この例題で考えなければならないことは，剛体棒についての力のつりあいなので，剛体棒におよぼす力に着目する必要がある．つまり，図2.17のフリーボディダイヤグラムでは，図2.18の赤い破線で囲んだ部分の力N_1が重要である．この問題では，まず剛体棒の静力学的つりあい

$$2N_1+N_2-2P=0$$

から**解答**の最初の式が出てくる．

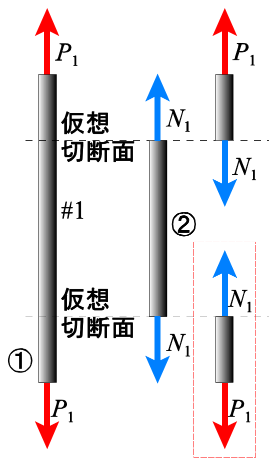


図2.18

発展例題2.12　図2.19のように剛体棒ABに棒＃1と＃2が取り付けられていて，剛体棒ABの途中に下向き外力Pが作用している．棒＃1と＃2に生ずる内力の式を求めよ．剛体棒は壁の支点Aまわりに回転可能であり，棒＃1と＃2の両端は回転可能であるものとする．

また，棒＃1について，

断面積：$A_1=200\ mm^2$，長さ：$l_1=1\ m$，ヤング率：$E_1=120\ GPa$

棒＃2について，

断面積：$A_2=100\ mm^2$，長さ：$l_2=2\ m$，ヤング率：$E_2=200\ GPa$

であり，$L_1=1\ m$，$L_2=2\ m$，$L=1.5\ m$，$P=50\ kN$のとき，内力の値と応力の値を求めよ．

指針　支点Aで反力が発生することに気付くこと．つまり，反力と棒に生ずる二つの内力の和が外力とつりあう．

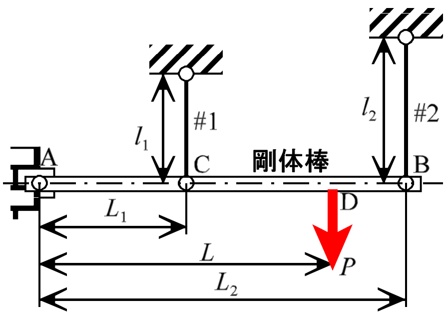


図2.19

解答　棒＃1と＃2に発生する内力を$N_1(>0)$と$N_2(>0)$で表し，支点Aの反力を上向きにR_Aとすると，剛体棒のフリーボディダイヤグラム[1]は図2.20上のようになるので，力のつりあいと支点Aまわりのモーメントのつりあいは，

$$N_1+N_2+R_A-P=0,$$

$$N_1L_1+N_2L_2-PL=0.$$

棒＃1と＃2の長さの変化量をδ_1とδ_2とすると，

$$\delta_1=\frac{N_1l_1}{A_1E_1},\quad \delta_2=\frac{N_2l_2}{A_2E_2}.$$

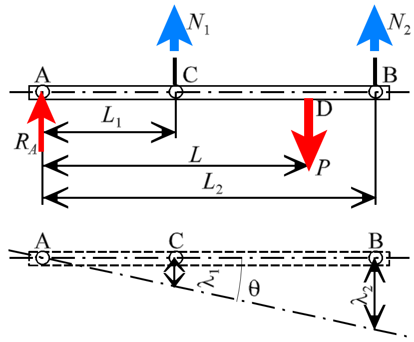


図2.20

棒＃1と＃2の変形後，剛体棒ABは元の位置（破線で表示）から点Aまわりに角度θだけ傾斜すると考えると，図2.20下を参照して$\lambda_1=L_1\theta$，$\lambda_2=L_2\theta$である[2]．一方，$\lambda_1=\delta_1$，$\lambda_2=\delta_2$でなければならないので

$$\theta=\frac{\delta_1}{L_1}=\frac{\delta_2}{L_2}\cdot$$

以上から，

$$N_1=\frac{A_1E_1L_1l_2L}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}P,\quad N_2=\frac{A_2E_2L_2l_1L}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}P.$$

所定の数値を代入すると，

$$A_1E_1L_1^2l_2=48\times10^6\ Nm^3,\ A_2E_2L_2^2l_1=80\times10^6\ Nm^3,\ A_1E_1L_1l_2L=72\times10^6\ Nm^3,\ A_2E_2L_2l_1L=60\times10^6\ Nm^3$$

となるから，

$$N_1=28.2\ kN,\ N_2=23.5\ kN$$

となり，発生する応力は

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=141\ MPa,\quad \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=235\ MPa$$

[1]この図で，N_1，N_2は棒＃1，＃2が剛体棒におよぼす力．前の例題の「解説」参照

[2]厳密には$\lambda_1=l_1\tan\theta$，$\lambda_2=L_2\tan\theta$であるが，材料力学で扱う変形量は小さいので，$\tan\theta\approx\theta$と近似する．よく使うので注意．

である．支点Aの反力R_Aを求めてみると，力のつりあいから，

$$R_A = P - (N_1 + N_2) = -1.7\ kN$$

となり，支点Aの反力は仮定した上向きではなく下向きに生ずることがわかる．■

基本事項2（熱応力）

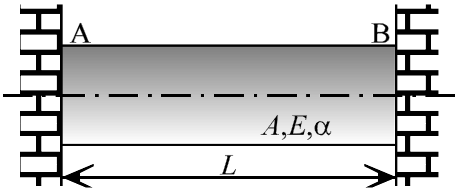


図2.21

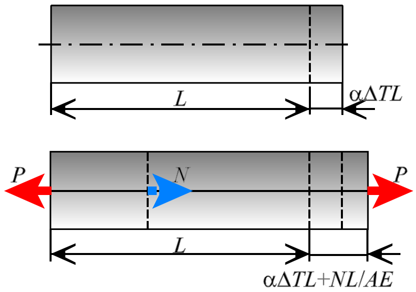


図2.22

熱応力は物体の自由熱膨張が何らかの原因で妨げられることによって生ずる応力で，典型的な不静定システムである．たとえば，図2.21のような，両端が剛体壁に固定された横断面積が$A\ m^2$，ヤング率が$E\ GPa$，線膨張係数が$\alpha\ K^{-1}$，長さが$L\ m$の棒に一様な温度変化$\Delta T\ K$が生ずる系を考えてみよう．

いま，壁Bをはずすと，棒は一様な温度変化ΔTによって$\alpha\Delta TL$だけ長さが変化する（図2.22上）．このように，拘束されていない棒が温度変化によって長さが変わることを自由熱膨張といい，この状態では棒には内力は生じていないが，棒は

$$\varepsilon_T = \frac{(1+\alpha\Delta T)L - L}{L} = \alpha\Delta T$$

だけのひずみを生じている．このひずみを「自由熱膨張ひずみ」と呼ぶ．

さて，自由熱膨張ひずみ$\alpha\Delta T$が生じている状態で外力Pが作用すると内力$N(=P)$が発生し，あらたに弾性ひずみ

$$\varepsilon_e = \frac{N}{AE}$$

が発生して$\varepsilon_e L$だけ長さが変化するから，これらを重ね合わせる（足し合わせる）と温度変化後で，外力も作用した状態の長さの変化量は図2.22下のように

$$\delta = \varepsilon_e L + \varepsilon_t L = \frac{NL}{AE} + \alpha\Delta TL$$

である．これをLで割るとひずみになるから

$$\varepsilon_t = \frac{\delta}{L} = \frac{N}{AE} + \alpha\Delta T$$

と書くことができる．このひずみε_tを「**全ひずみ**」と呼ぶが，第一項目の内力によるひずみと第二項目の自由熱膨張ひずみを足し合わせたものに他ならない．

以下の例題では，全ひずみの扱い方に注目してどのように熱応力を求めるかをみてみよう．

基本例題2.13　図2.21の系において生ずる熱応力を求めよ．
指針　全ひずみに長さLをかけると長さの変化量が出てくるが，壁があることで長さは変化しない．

解答　全ひずみは

$$\varepsilon_t = \frac{N}{AE} + \alpha\Delta T$$

なので，長さの変化量は

$$\delta = \varepsilon_t L = \frac{NL}{AE} + \alpha\Delta TL.$$

壁による拘束によって棒は伸縮できない．つまり，長さの変化量がゼロなので，$\delta = 0$として

$$\frac{NL}{AE}+\alpha\Delta TL=0$$

から，発生する内力と熱応力は

$$N=-AE\alpha\Delta T,\quad \sigma=\frac{N}{A}=-\alpha E\Delta T$$

である．■

基本例題2.14　基本例題2.13において，材料のヤング率が$E=200\ GPa$，線膨張係数が$\alpha=12\times10^{-6}\ K^{-1}$のとき，温度変化$\Delta T$が$+50\ K$，$-50\ K$のときの熱応力を計算せよ．

解答　$\Delta T=+50\ K$のとき，

$$\sigma=-12\times10^{-6}\times200\times10^{9}\times(+50)=-120\ MPa$$

$\Delta T=-50\ K$のとき

$$\sigma=-12\times10^{-6}\times200\times10^{9}\times(-50)=120\ MPa$$

である．■

発展例題2.15　図2.23のような二種類の棒＃1と＃2を接合した状態で剛体壁間にはめ込んだ．棒＃1と＃2に，それぞれ，一様な温度変化ΔT_1とΔT_2が発生した．それぞれの棒に生ずる熱応力の式を求めよ．棒＃1の断面積，ヤング率，線膨張係数をA_1，E_1，α_1とし，棒＃2のそれらをA_2，E_2，α_2とする．

指針　棒＃1と＃2に生じている内力は共にNで，長さの変化は全体としてゼロであることに着目する．

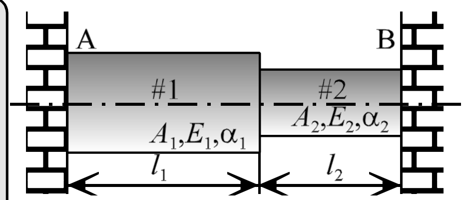


図2.23

解答　棒＃1の長さの変化量は棒＃1の全ひずみにl_1をかければいいので，

$$\delta_1=\frac{Nl_1}{A_1E_1}+\alpha_1\Delta T_1 l_1.$$

棒＃2の長さの変化量は，同じように考えて，

$$\delta_2=\frac{Nl_2}{A_2E_2}+\alpha_2\Delta T_2 l_2.$$

棒全体の長さの変化量がゼロ（剛体壁で伸びることができない）であるから，

$$\delta_1+\delta_2=0$$

となるから，これに各棒の長さの変化量を代入してNについて解くと内力Nは

$$N=-\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_1\Delta T_1 l_1+\alpha_2\Delta T_2 l_2)$$

各棒に生ずる熱応力は内力をそれぞれの横断面積で割って

$$\sigma_1=\frac{N}{A_1}=-\frac{E_1E_2A_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_1\Delta T_1 l_1+\alpha_2\Delta T_2 l_2),\quad \sigma_2=\frac{N}{A_2}=-\frac{E_1E_2A_1}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_1\Delta T_1 l_1+\alpha_2\Delta T_2 l_2)$$

である．■

解説：剛体壁は棒＃1と＃2からなる系に対して外力を及ぼす．この結果，内力Nを生ずるが，この内力は棒＃1と＃2で等しい．しかし，発生する応力は等しくない．

発展例題2.16　発展例題2.15の棒に温度変化が生じた後も内力が発生しないためには，温度変化ΔT_1とΔT_2はどのような関係を満たさなければならないか．

解答　発展例題2.15の内力の式をゼロにおいて得られる式から，

$$\alpha_1 \Delta T_1 l_1 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2 = 0$$

の条件を満足すればよい．これから，温度変化ΔT_2はΔT_1を用いて

$$\Delta T_2 = -\frac{\alpha_1 l_1}{\alpha_2 l_2}\Delta T_1$$

を満たさなければならない．■

解説　内力が発生していないので**発展例題2.15**の内力の式をゼロにおくと

$$N = -\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2 + A_2E_2l_1}(\alpha_1 \Delta T_1 l_1 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2) = 0$$

となる．この式でゼロになり得るのは()内の式である．

発展例題2.17　発展例題2.15の棒のB端の壁をはずして力Pを作用させた．各棒に生ずる応力と棒全体の長さの変化の式を求めよ．

解答　B端の壁がないので棒＃1と＃2は自由熱膨張の状態にある．そのため，外力Pが作用することによる応力だけが残るので，

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A_1},\quad \sigma_2 = \frac{N}{A_2} = \frac{P}{A_2}.$$

棒全体の長さの変化量は，自由熱膨張による長さの変化量と外力による長さの変化量を足せばよいので，

$$\delta = \frac{Pl_1}{A_1E_1} + \frac{Pl_2}{A_2E_2} + \alpha_1 \Delta T_1 l_1 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2$$

である．■

応用例題2.18　発展例題2.17で棒の長さの変化量は$\delta = -0.2\ mm$であった．加えた外力Pを求めよ．また，各棒の長さの変化量はどれだけか．条件は次の通りである．

$$A_1 = 7500\ mm^2,\ l_1 = 300\ mm,\ E_1 = 120\ GPa,\ \alpha_1 = 20\times10^{-6}\ K^{-1},\ \Delta T_1 = 60\ K.$$

$$A_2 = 2000\ mm^2,\ l_2 = 200\ mm,\ E_2 = 70\ GPa,\ \alpha_2 = 25\times10^{-6}\ K^{-1},\ \Delta T_2 = \Delta T_1.$$

解答　発展例題2.17のδの式から

$$\left(\frac{l_1}{A_1E_1}+\frac{l_2}{A_2E_2}\right)P=\delta-(\alpha_1\Delta T_1 l_1+\alpha_2\Delta T_2 l_2)$$

となり，この式に所定の数値を代入して計算すると，

$$P=-489\ kN$$

である．すなわち，大きさ489kNの負の外力が作用した．

各棒の長さの変化量は

$$\text{棒}\#1:\ \delta_1=\frac{Pl_1}{A_1E_1}+\alpha_1\Delta T_1 l_1=0.2\,mm$$

$$\text{棒}\#2:\ \delta_2=\frac{Pl_2}{A_2E_2}+\alpha_2\Delta T_2 l_2=-0.4\ mm$$

である．■

発展例題2.19　図2.24のように棒＃1と＃2との間にギャップがある．両方の棒にΔTの温度変化が生じた．ギャップCD間の距離をδとして，

1)　二つの棒に内力が発生することなく接触するときの温度変化ΔTの式を示せ．

2)　1)の状態からさらに温度が上昇ずる時，これら二つの棒に生ずる熱応力を求めよ．

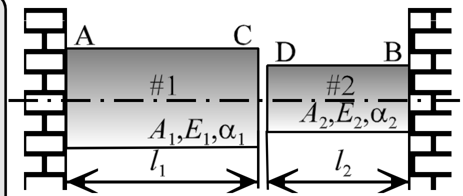


図2.24

解答　1)この段階では自由熱膨張のみなので棒全体の長さの変化量は，

$$(\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2)\Delta T$$

この変化量がギャップδに等しいことから，

$$\Delta T=\frac{\delta}{\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2}$$

である．

2)　1)の状態でのそれぞれの棒の長さは

$$(1+\alpha_1\Delta T)l_1,\ (1+\alpha_2\Delta T)l_2$$

である．この状態からΔT_1だけ温度上昇するとき，内力をNとすると，それぞれの棒の長さは

$$l_1+\alpha_1\Delta Tl_1+\alpha_1\Delta T_1 l_1+\frac{Nl_1}{A_1E_1},\ l_2+\alpha_2\Delta Tl_2+\alpha_2\Delta T_1 l_2+\frac{Nl_2}{A_2E_2}$$

となり，1)の状態からの長さの変化量は

$$\alpha_1\Delta T_1 l_1+\frac{Nl_1}{A_1E_1},\ \alpha_2\Delta T_1 l_2+\frac{Nl_2}{A_2E_2}$$

である．これらの和がゼロでなければならないので，

$$\left(\frac{l_1}{A_1E_1}+\frac{l_2}{A_2E_2}\right)N=-\alpha_1\Delta T_1 l_1-\alpha_2\Delta T_1 l_2$$

これより，内力は

$$N=-\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2)\Delta T_1=-\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}\frac{\Delta T_1}{\Delta T}\delta$$

となり，それぞれの棒に発生する熱応力はこの内力をそれぞれの棒の断面積で割ればよい．■

発展例題2.20　図2.25のように，材料＃1でできた棒が材料＃2でできた中空円筒の中に入っていて，剛体板が接着されている．＃1にΔT_1，＃2にΔT_2の温度変化が生じた．棒と中空円筒に発生する内力を求めよ．棒の断面積，ヤング率，長さ，線膨張係数をA_1，E_1，l_1，α_1とし，中空円筒のそれらをA_2，E_2，l_2，α_2とする．なお，剛体板は外れない．

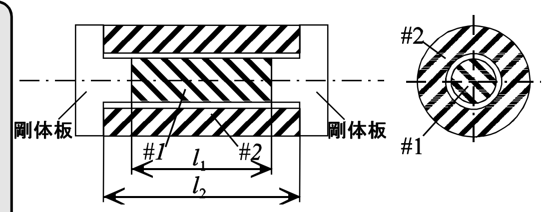


図2.25

解答　棒と円筒の長さの変化量δ_1とδ_2は，

$$\delta_1=\frac{N_1 l_1}{A_1 E_1}+\alpha_1 \Delta T_1 l_1,\quad \delta_2=\frac{N_2 l_2}{A_2 E_2}+\alpha_2 \Delta T_2 l_2 .$$

$\delta_1=\delta_2$でなければならないことと，外力がない，すなわち，

$$N_1+N_2=0$$

から内力は

$$N_1=\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_2\Delta T_2 l_2-\alpha_1\Delta T_1 l_1),\quad N_2=-N_1$$

である．■

発展例題2.21　発展例題2.20の状態から剛体板に外力Pが作用した（図2.26）．棒と中空円筒に発生する内力を求めよ．剛体板は外れない．

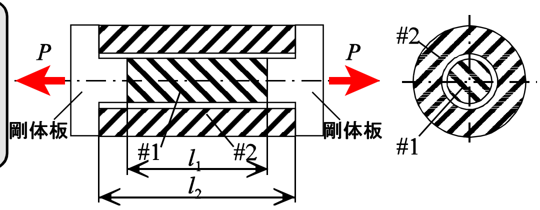


図2.26

解答　発展例題2.20の力のつりあい式の代わりに

$$N_1+N_2=P$$

とすればよい．長さの変化量λ_1とλ_2の式と$\lambda_1=\lambda_2$でなければならない条件は**発展例題2.20**と同じである．

以上のことから，

$$N_1=\frac{A_1E_1l_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}P+\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_2\Delta T_2 l_2-\alpha_1\Delta T_1 l_1),\ N_2=\frac{A_2E_2l_1}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}P-\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_2\Delta T_2 l_2-\alpha_1\Delta T_1 l_1)$$

である．■

発展例題2.22　図2.27のように剛体棒ABに棒＃1と＃2が取り付けられていて，棒＃1と＃2に温度変化ΔT_1とΔT_2が生じている．棒＃1と＃2に生ずる内力の式を求めよ．剛体棒は壁に支点Aまわりに回転可能であり，棒＃1と＃2の両端は回転可能であるものとする．

指針　支点Aに生ずる反力と棒に生ずる内力の和が外力とつりあう．**発展例題2.12**も参照．

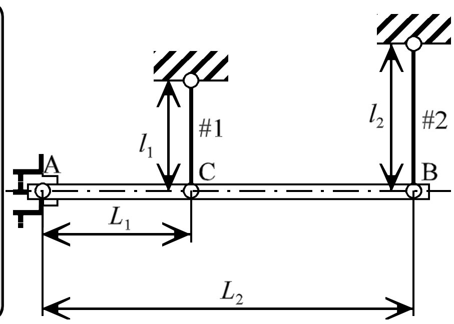


図2.27

解答　図2.28上のように棒＃1と＃2に発生する内力をN_1とN_2，支点Aの反力を上向きにR_Aとすると，力のつりあいと支点Aまわりのモーメントのつりあいは，

$$N_1+N_2+R_A=0\,,\qquad N_1L_1+N_2L_2=0\,.$$

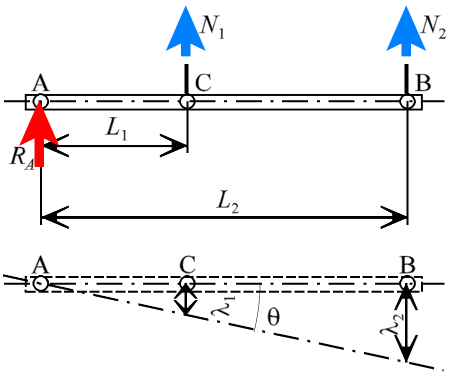


図2.28

棒＃1と＃2の長さの変化量をδ_1とδ_2とすると，内力N_1とN_2による長さの変化量に自由熱膨張量を加えて

$$\delta_1=\frac{N_1l_1}{A_1E_1}+\alpha_1\Delta T_1l_1\,,\qquad \delta_2=\frac{N_2l_2}{A_2E_2}+\alpha_2\Delta T_2l_2\,.$$

棒＃1と＃2の変形後，剛体棒ABは元の位置（破線で表示）からAまわりに角度θだけ傾斜すると考えると，図2.28下を参照して$\lambda_1=L_1\theta$，$\lambda_2=L_2\theta$．$\delta_1>0$，$\delta_2>0$を仮定すると，$\lambda_1=\delta_1$，$\lambda_2=\delta_2$でなければならないので，変形量に対する条件は

$$\theta=\frac{\delta_1}{L_1}=\frac{\delta_2}{L_2}\cdot$$

この条件とモーメントのつりあい条件から，内力N_1とN_2は

$$N_1=-\frac{A_1E_1A_2E_2L_2}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}(\alpha_1\Delta T_1l_1L_2-\alpha_2\Delta T_2l_2L_1)\,,\quad N_2=-\frac{L_1}{L_2}N_1\,.$$

である．■

解説1：たとえば，$\Delta T_1=0$，$\Delta T_2>0$なら，

$$N_1=\frac{A_1E_1A_2E_2L_2}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}\alpha_2\Delta T_2l_2L_1>0\,,\quad N_2=-\frac{L_1}{L_2}N_1<0\,.$$

である．この場合，棒＃1には正の内力（いわゆる引張力）が発生し，棒＃2には負の内力（いわゆる圧縮力）が発生することがわかる．つまり，

○棒＃2：自由熱膨張による伸び$\alpha_2\Delta T_2l_2$が棒＃1によって妨げられるので負（圧縮）の内力が発生する．

○棒＃1：点Bは下方へ移動するので点Cも下方へ移動する．ゆえに，正（引張）の内力が発生する．

解説2：図2.29のように，点Dに力Pもはたらいている場合，内力N_1，N_2は，図2.28の系の内力に

$$\frac{A_1E_1L_1l_2L}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}P\,,\qquad \frac{A_2E_2L_2l_1L}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}P$$

をそれぞれ足せばよい．

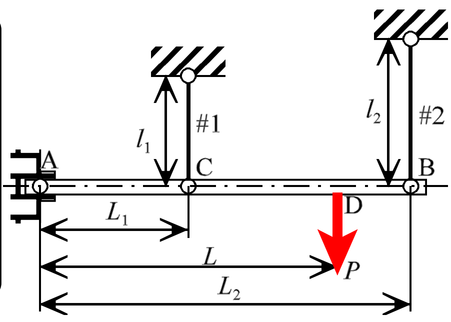


図2.29

発展例題2.23　図2.30のように剛体棒に棒＃1と＃2が取り付けられていて，棒＃1と＃2に温度変化ΔT_1とΔT_2が生じている．棒＃1と＃2に生ずる内力の式とAに生ずる力の式を求めよ．剛体棒は壁に支点Aまわりに回転可能であり，棒＃1と＃2の両端は回転可能であるものとする．

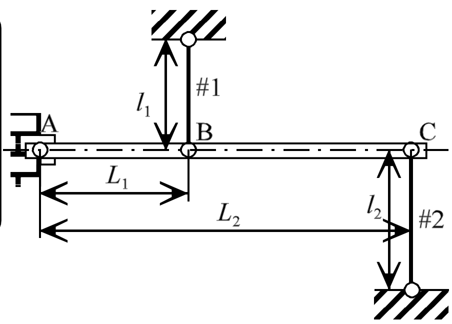


図2.30

解答　棒＃1と＃2に発生する内力をN_1とN_2，支点Aの反力を上向きにR_Aとすると，力のつりあいと支点Aまわりのモーメントのつりあいは，図2.31を参照すると

$$N_1 - N_2 + R_A = 0, \qquad N_1 L_1 - N_2 L_2 = 0.$$

棒＃1と＃2の長さの変化量をδ_1とδ_2とすると，

$$\delta_1 = \frac{N_1 l_1}{A_1 E_1} + \alpha_1 \Delta T_1 l_1, \qquad \delta_2 = \frac{N_2 l_2}{A_2 E_2} + \alpha_2 \Delta T_2 l_2.$$

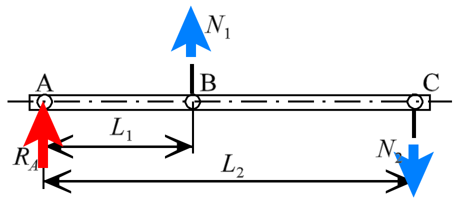


図2.31

棒＃1と＃2の変形後，棒＃1と＃2の変形後，剛体棒ABは元の位置（破線で表示）からAまわりに角度θだけ傾斜すると考えると点B，Cの移動量は$\lambda_1 = L_1\theta$，$\lambda_2 = L_2\theta$．剛体棒は変形しないから$\delta_1 > 0$なら$\delta_2 < 0$であるから，

$$\theta = \frac{\lambda_1}{L_1} = \frac{\lambda_2}{L_2} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\delta_1}{L_1} = -\frac{\delta_2}{L_2}$$

でなければならない．

以上から，

$$N_1 = -\frac{A_1E_1A_2E_2L_2}{A_1E_1L_1^2 l_2 + A_2E_2L_2^2 l_1}(\alpha_1\Delta T_1 l_1 L_2 + \alpha_2 \Delta T_2 l_2 L_1),\ N_2 = \frac{L_1}{L_2}N_1,\ R_A = -N_1 + N_2 = -\frac{1}{L_2}(L_2 - L_1)N_1$$

となる．■

たとえば，L_1=250 mm，L_2=600 mm，

E_1=90 GPa，l_1=300 mm，$\alpha_1 = 20\times10^{-6}$ 1/K，A_1=500 mm^2，ΔT_1=−25 K，

E_2=200 GPa，l_2=250 mm，$\alpha_2 = 12\times10^{-6}$ 1/K，A_2=250 mm^2，ΔT_2=25 K

のように具体的な数値が与えられているとき，**解答**の式に当てはめて計算するのはかなり厄介である．このような場合，傾斜の条件にλ_1とλ_2を代入して得られる式

$$\frac{l_1L_2}{A_1E_1}N_1 + \frac{l_2L_1}{A_2E_2}N_2 = -\alpha_1\Delta T_1 l_1 L_2 - \alpha_2\Delta T_2 l_2 L_1$$

とモーメントのつりあい式に数値を代入して得られる連立一次方程式

$$4.0\times10^{-9}\times N_1 + 1.25\times10^{-9}\times N_2 = -108.75\times10^{-6}$$

$$250\times N_1 - 600\times N_2 = 0$$

を用いると

N_1=15.76 kN，N_2=6.567 kN

が得られる．こちらのほうが間違いが少なくてすむはずである．しかし，<u>いずれにしても，正しい式を立てることが大切．</u>

解説1：$\theta=\dfrac{\delta_1}{L_1}=-\dfrac{\delta_2}{L_2}$という式について少し補足しておく．棒＃1と＃2の長さの変化量δ_1とδ_2は，それぞれの棒の固定端を基準にした棒の長さの変化を表しているので，これらが正，すなわち，いずれも伸びると仮定するとδ_1は下向き，δ_2は上向きである．一方，剛体棒の点BとCの移動量λ_1とλ_2を図2.31のように下向きとすると，**発展例題2.22**のように

$$\theta=\frac{\lambda_1}{L_1}=\frac{\lambda_2}{L_2}$$

である．さて，棒＃1と＃2の長さの変化量δ_1，δ_2と剛体棒の点B，Cの移動量λ_1，λ_2との関係を見ると，δ_1は下向きでλ_1も下向き，δ_2は上向きでλ_2は下向きである．ゆえに，$\lambda_1=\delta_1$，$\lambda_2=-\delta_2$でなければならない．このことから，解答の式が得られる．

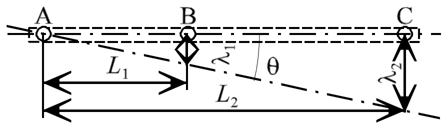


図2.32

解説2：たとえば，$\Delta T_1=0$，$\Delta T_2>0$なら，

$$N_1=-\frac{A_1E_1A_2E_2L_2}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}\alpha_2\Delta T_2l_2L_1<0,\ N_2=\frac{L_1}{L_2}N_1<0.$$

である．この場合，棒＃1，棒＃2には負の内力（いわゆる圧縮力）が発生することがわかる．つまり，

○棒＃2：自由熱膨張による伸び$\alpha_2\Delta T_2l_2$が棒＃1によって妨げられるので負の内力（圧縮）が発生する．

○棒＃1：点Cは上方へ移動する．点Bも上方へ移動するので，負の内力（圧縮）が発生する．

解説3：$L_1=L_2$のときの内力の式は**発展例題2.23**の内力の式で$L_1=L_2$とすると，

$$N_1=-\frac{A_1E_1A_2E_2}{A_1E_1l_2+A_2E_2l_1}(\alpha_1\Delta T_1l_1+\alpha_2\Delta T_2l_2),\ N_2=N_1$$

となる．また，$R_A=0$である．この内力の式は**発展例題2.15**の内力の式と同じで，図2.33左の系になり，図2.23の系と同じになる．さらに，棒＃1，＃2の断面積，ヤング率，長さ，線膨張係数がすべて等しく，$\Delta T_1=\Delta T_2$の場合，

$$N_1=N_2=-AE\alpha\Delta T_1$$

となり，両端を剛体壁にはさまれた棒に発生する内力（**基本例題2.13**）と同じで，図2.33右の系になり，図2.21の系と同じになる．

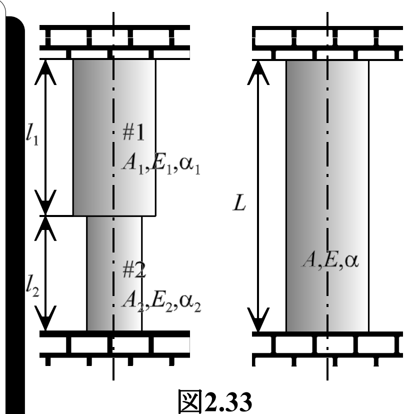


図2.33

発展例題2.23再　図2.30のように剛体棒に棒＃1と＃2が取り付けられていて，棒＃1と＃2に温度変化ΔT_1とΔT_2が生じている．棒＃1と＃2に生ずる内力の式とAに生ずる力の式を求めよ．剛体棒は壁に支点Aまわりに回転可能であり，棒＃1と＃2の両端は回転可能であるものとする．ただし，棒＃1に生ずる内力を正の向き，棒2の生ずる内力を負の向きに仮定して解け．

解答　棒＃2の内力N_2を負の向きにとるので，図2.31のN_2の向きは逆になるのでフリーボディダイヤグラムは図2.34のようになる．力のつりあいと支点Aまわりのモーメントのつりあいは，図2.34を参照すると

$$N_1+N_2+R_A=0, \qquad N_1L_1+N_2L_2=0.$$

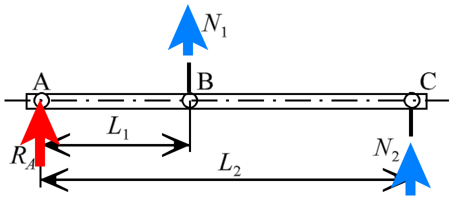


図2.34

と表すことができる．このとき，棒＃1の内力は正の向き，＃2の内力は負の向きになるので，棒＃2は縮むことになる．それゆえ，これらの棒の長さの変化量δ_1とδ_2は，

$$\delta_1=\frac{N_1l_1}{A_1E_1}+\alpha_1\Delta T_1l_1, \qquad \delta_2=-\frac{N_2l_2}{A_2E_2}+\alpha_2\Delta T_2l_2.$$

としなければならない．この時点でN_2は大きさを表すと考える．

変形に関する条件は変わらない(下の「解説1」を参照)ので，

$$\theta=\frac{\lambda_1}{L_1}=\frac{\lambda_2}{L_2} \quad \rightarrow \quad \theta=\frac{\delta_1}{L_1}=-\frac{\delta_2}{L_2}$$

である．この条件とモーメントのつりあい式から

$$\boxed{N_1=-\frac{A_1E_1A_2E_2L_2}{A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1}(\alpha_1\Delta T_1l_1L_2+\alpha_2\Delta T_2l_2L_1)}, \quad \boxed{N_2=-\frac{L_1}{L_2}N_1}, \quad R_A=-N_1-N_2=-\frac{1}{L_2}(L_2+L_1)N_1$$

となる．■

解説1：「変形に関する条件は変わらない」について

発展例題2.23，**発展例題2.23再**の両方とも

$$\lambda_1=\delta_1, \quad \lambda_2=-\delta_2$$

が成立していることである．この二つの例題ではλ軸は下向きに取っている．このλ軸は剛体棒の傾斜に伴う剛体棒の点BとCの変位の軸である．一方，δ軸は，棒の伸縮に対して動かない点を基準に，棒＃1では下方へ，＃2では上方へとっていることになる．このとき，棒＃1のδ軸(下向き)はλ軸と同じ向きであり，棒＃2のδ軸(上向き)はλ軸と逆の向きである．ここで，棒＃1と棒＃2の変形量を系全体の，つまり，剛体棒のλ軸にあわせてみるとλ軸とδ_1軸，λ軸とδ_2軸の間には上の関係が成り立たなければならない．この関係はあくまでもλ軸とδ_1軸，λ軸とδ_2軸の関係だけであり，弾性棒の伸縮量δ_1とδ_2の正負には無関係である．つまり，座標軸の向きだけの問題で，δ_i軸をλ軸に(座標)変換するための変換式である．

解説2：**発展例題2.23**で得られたN_1，N_2は，()内の量が正であれば，$N_1<0$，$N_2<0$である．すなわち，$|N_1|$，$|N_2|$の大きさの圧縮の内力が生ずると言っている．**発展例題2.23再**で得られたN_1，N_2は，()内の量が正であれば，$N_1<0$，$N_2>0$である．ゆえに，棒1には$|N_1|$の大きさの圧縮の内力が生じ，棒2には大きさN_2の圧縮の内力が生ずると言っている．

発展例題2.24　図2.35のように，B', C', D'で回転支持されている長さl，引張剛性AE，線膨張係数αの弾性棒の点B，C，Dに長さ$3a$，単位長さあたりwの自重を持つ剛体棒を取り付けた．この系において弾性棒CC'にのみΔTの温度変化が生じた．次の設問に答えなさい．支点Aならびに弾性棒の両端はすべて回転支点である．(2016前期)

1) 弾性棒BB', CC', DD'に生ずる内力をN_1，N_2，N_3で表し，すべて正であると仮定する．剛体棒に関するフリーボディダイヤグラムを描き，静力学のつりあい式を書け．
2) 弾性棒BB', CC', DD'の長さの変化量δ_1，δ_2，δ_3の式を書き下せ．
3) 剛体棒は点Aを支点に反時計回りに微小角θだけ傾斜した．剛体棒の点B，C，Dの変位量をλ_1，λ_2，λ_3として，弾性棒の長さの変化量δ_1，δ_2，δ_3との関係を示せ．
4) 各弾性棒に生ずる内力N_1，N_2，N_3を求めよ．
5) ΔTを調整した結果剛体棒は水平になった．このときのΔTの式を示せ．

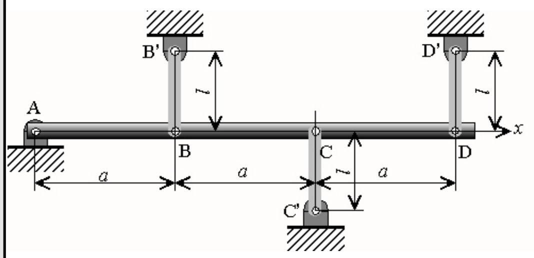


図2.35

解答　1) FBDは図2.36のようになる．弾性棒に生ずる正の内力と剛体棒に作用する力の関係は，たとえば，**発展例題2.11**の「解説」を参照のこと．弾性棒に生ずる内力を正に仮定するので，剛体棒のBとDには上向きの力N_1とN_3，Cには下向きの力N_2が作用すると考える．Aでの反力を上向きにR_Aとすると，静力学のつりあい式は

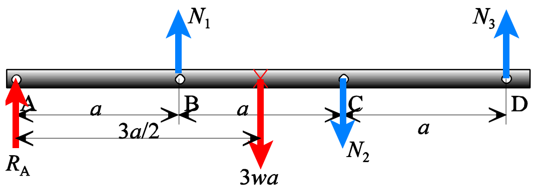


図2.36

力のつりあい：$R_A+N_1-N_2+N_3-3wa=0$

モーメントのつりあい(Aまわり)：$N_1a-2N_2a+3N_3a-\dfrac{9}{2}wa^2=0$

2) 弾性棒BB', CC', DD'の長さの変化量は

$$\delta_1=\frac{N_1l}{AE},\quad \delta_2=\frac{N_2l}{AE}+\alpha\Delta Tl,\quad \delta_3=\frac{N_3l}{AE}$$

3) 剛体棒の点B，C，Dの変位量をλ_1，λ_2，λ_3とおくと，剛体棒は反時計回りに微小角θだけ傾斜するから，条件から点B，C，Dはすべて上方へ移動する．弾性棒の長さの変化軸はB’を基準に下向き，C’を基準に上向き，D’を基準に下向きなので，λ_i軸とδ_i軸のと関係は

$$\lambda_1=-\delta_1,\quad \lambda_2=\delta_2,\quad \lambda_3=-\delta_3$$

4) 剛体棒の傾斜角をθとおくと，θは微小なので点B，C，Dの変位量は$\lambda_1=a\theta$，$\lambda_2=2a\theta$，$\lambda_3=3a\theta$と書けるから，

$$\theta=\frac{\lambda_1}{a}=\frac{\lambda_2}{2a}=\frac{\lambda_3}{3a}.$$

これより，

$$2\lambda_1-\lambda_2=0,\quad 3\lambda_1-\lambda_3=0$$

となり，3)の関係式を用いると

$$2\delta_1+\delta_2=0,\quad 3\delta_1-\delta_3=0$$

この式に2)の式を代入すると

$$\boxed{2N_1+N_2=-\alpha\Delta TAE},\qquad \boxed{3N_1-N_3=0}.$$

この二つの式とモーメントのつりあい式から得られる式

$$\boxed{N_1-2N_2+3N_3=\frac{9}{2}wa}$$

を連立方程式として解くと，各弾性棒の内力は

$$N_1=\frac{9}{28}wa-\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_2=-\frac{9}{14}wa-\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_3=3N_1=\frac{27}{28}wa-\frac{3}{7}\alpha\Delta TAE(,\ R_A=\frac{15}{14}wa-\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE)$$

である．

5) たとえば，δ_1の式にN_1を代入して条件を考慮すると，

$$\frac{9}{28}wa-\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE=0$$

これより，

$$\Delta T=\frac{9}{4}\frac{wa}{\alpha AE}$$

である．■

解説1：$\Delta T=0$で剛体棒の自重のみ考慮する場合，弾性棒BB'とDD'には正(引張)の内力が生じ，CC'には負(圧縮)の内力が生ずることは直感的に理解できるだろう．このとき，内力の式で$\Delta T\equiv 0$とおくと

$$N_1=\frac{9}{28}wa>0,\ N_2=-\frac{9}{14}wa<0,\ N_3=3N_1=\frac{27}{28}wa>0$$

となっていて正しいことがわかる．

解説2：剛体棒の自重がなく，$\Delta T<0$ならすべての弾性棒には正(引張)の内力が生ずるはずである．内力の式で$w\equiv 0$として$\Delta T<0$であるから，

$$N_1=-\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE>0,\ N_2=-\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE>0,\ N_3=3N_1=-\frac{3}{7}\alpha\Delta TAE>0$$

となっていて正しいことがわかる．逆に$\Delta T>0$ならすべて弾性棒には負(圧縮)の内力が生ずることがわかる．

別解1：もし，**内力をすべて負の向きに仮定する**と，図2.36のN_1，N_2，N_3の向きがすべて逆になるので剛体棒のBとDには下向きの力N_1とN_3，Cには上向きの力N_2が作用することになり，1)のモーメントのつりあい式は

$$N_1a-2N_2a+3N_3a+\frac{9}{2}wa^2=0$$

になる．内力は大きさを表現するだけになるので，2)の弾性棒の長さの変化量は

$$\delta_1=-\frac{N_1l}{AE},\ \delta_2=-\frac{N_2l}{AE}+\alpha\Delta Tl,\ \delta_3=-\frac{N_3l}{AE}$$

と書かなければならない．3)の条件も変わらないので4)で得られる式は

$$\boxed{2N_1+N_2=\alpha\Delta TAE},\qquad \boxed{3N_1-N_3=0}$$

となる．この二つの式とモーメントのつりあい式から得られる式

$$\boxed{N_1-2N_2+3N_3=-\frac{9}{2}wa}$$

を連立方程式として解く．連立方程式の左辺の係数は**解答**と同じで右辺の正負が逆転しているので答えは

$$N_1=-\frac{9}{28}wa+\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_2=\frac{9}{14}wa+\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_3=3N_1=-\frac{27}{28}wa+\frac{3}{7}\alpha\Delta TAE$$

となる．これは，たとえば，大きさ$N_1=-\frac{9}{28}wa+\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE$の圧縮の内力が棒BB'に生ずると言っている．引張の内力として考えると，符号を逆にして，大きさ$\frac{9}{28}wa-\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE$の引張の内力が生ずることになる．■

別解２：**もし，内力**N_2**のみ負の向きに仮定する**と，図2.36のN_1，N_2，N_3の向きがすべて上向きになり，1)のモーメントのつりあい式は

$$N_1a+2N_2a+3N_3a-\frac{9}{2}wa^2=0$$

になる．2)の弾性棒の長さの変化量は

$$\delta_1=\frac{N_1l}{AE},\ \delta_2=-\frac{N_2l}{AE}+\alpha\Delta Tl,\ \delta_3=\frac{N_3l}{AE}$$

と書かなければならない．3)の条件も変わらないので4)で得られる式は

$$\boxed{2N_1-N_2=-\alpha\Delta TAE},\qquad \boxed{3N_1-N_3=0}$$

となる．この二つの式とモーメントのつりあい式から得られる式

$$\boxed{N_1+2N_2+3N_3=\frac{9}{2}wa}$$

を連立方程式として解く．連立方程式の左辺の係数は**解答**のものと比較してN_2の係数の正負が逆転している．このとき，答えは

$$N_1=\frac{9}{28}wa-\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_2=\frac{9}{14}wa+\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_3=3N_1=\frac{27}{28}wa-\frac{3}{7}\alpha\Delta TAE$$

となる．これは，大きさ$N_2=\frac{9}{14}wa+\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE$の圧縮の内力が棒CC'に生ずると言っている．

解答の答え

$$N_2=-\frac{9}{14}wa-\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE$$

は，大きさ$-\left(\frac{9}{14}wa+\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE\right)$の引張の内力が生じているといっている．つまり，大きさ$\frac{9}{14}wa+\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE$の圧縮の内力が生じているといっているのと同じである．■

全ひずみに関する補足

熱応力の計算のために全ひずみを導入した．簡単におさらいすると，全ひずみは，「自由熱膨張ひずみ＋弾性ひずみ」である．式で書くと，

$$\varepsilon_t = \alpha\Delta T + \frac{N}{AE}$$

であり，第一項が自由熱膨張ひずみ，第二項が弾性ひずみである．自由熱膨張ひずみは拘束されていない棒に一様な温度変化が生じた場合のひずみであり，その時点では棒に応力が発生していないことを思い出しておこう．

さて，上式に対応する長さの変化量は，両辺に長さLをかけると

$$\delta = \varepsilon_t L = \alpha\Delta T L + \frac{NL}{AE}$$

となる．さらに，長さLを加えると，

$$L + \delta = L + \alpha\Delta T L + \frac{NL}{AE}$$

と書ける．この式の右辺を見ると，もともと長さが$L+\alpha\Delta TL$の棒に外力が作用した結果さらにNL/AEだけ長さが変化したとみることができる．このように考えて項$\alpha\Delta TL = a$と置くと，

$$L + \delta = L + a + \frac{NL}{AE}$$

となる．左辺は長さLの棒にδの長さの変化が生じたことになり，右辺は長さ$L+a$の棒に外力が作用した結果，NL/AEだけ長さが変化したことになる．

さて，この式で$\delta/L = \varepsilon_t$，$a/L = \varepsilon_0$とおくと

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 + \frac{N}{AE}$$

と書くことができる．右辺第一項をもともと存在しているひずみ（初期ひずみという），第二項を内力が発生した結果生ずるひずみ（弾性ひずみという）を表すと考えると，全ひずみは弾性ひずみとそれ以外のひずみ（自由熱膨張ひずみや初期ひずみなど）の和として考えることができる．

剛体棒に弾性棒が接続されている問題への補足

発展例題2.22や**2.23**に類似の問題を演習問題でよく見かける．類似の演習問題では，部材にかかる力が正（引張）か負（圧縮）がわかっているように書かれている場合が多い．何でわかっているの？

もし，部材の本数が多くなり，負荷点の数も多くなり，外力の向きや温度変化の正負（実際，この二問では温度変化の正負を指定していない．）もまちまちだったらどう判断するのだろう．実は，学生時代になんとなく思っていて，結局引張だの圧縮だの考えるのをあきらめた．それなりに年を重ねてジジイになった現在，たどり着いた結論は「判断に困ってしまう場合，最初から判断しないことにすれば楽だ．つまり，判断を放棄することだ．」・・・・何か悟りの境地に思える．

判断を放棄するためには，まず，静力学のつりあい式を立てる段階で「内力はすべて正」としてしまえばよい．とすれば，内力が正なのだから，部材の長さの変化量はすべて正になって部材の変形を表す式も，何の躊躇もなく簡単に作れる．あとは，対象にしている剛体の変位軸(**発展例題2.23再**の解説1では「λ軸」と表現)の向きと部材の長さの変化軸(**発展例題2.23再**の解説1では「δ軸」と表現)の向きとの関係を考えて，この時点で正負を付けて条件式を作ればよい(詳細は該当する例題の「解説」を参照)．この条件式が「内力はすべて正．ゆえに，すべての部材は伸びる」としてしまったことで生ずる矛盾を解消してくれる．結果，内力が負であれば答えの式にマイナス符号がくっつく．これでめでたく解ける．

コツは，ごちゃごちゃと正だの負だのと考えないことだ．全体として正しい式が書けていれば間違いは正される．なぁーんちゃって．

第2章　演習問題

問題1．図1のように棒が剛体壁で挟まれていて，P_1=15 kN，P_2=10 kNである．対応するフリーボディダイヤグラムを描き，端AとDに生ずる力R_AとR_Dを求めよ．（関連例題：**基本例題2.01**）

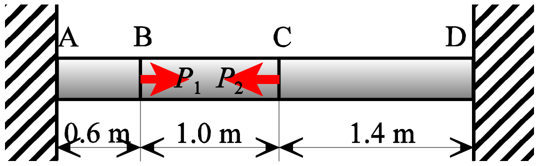


図1

Ans．フリーボディダイヤグラムの一例は図2．図2において，R_A=−7.33 kN，R_D=−2.33 kN．

(実は，R_Aは左向きに大きさ7.33 kN，R_Dは右向きに大きさ2.33 kNだといっている)

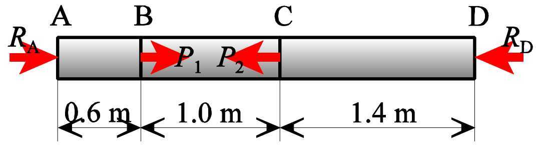


図2

問題2．問題1．で各区間に生ずる内力を求めよ．また，BとCの変位量δ_B，δ_Cを求めよ．棒の横断面積A=500 mm^2，ヤング率E=200 GPaとする．（関連例題：**基本例題2.01**）

Ans．内力をすべて正と仮定して，N_{AB}=7.33 kN，N_{BC}=−7.67 kN，N_{CD}=2.33 kN．

変位量は$\delta_B=\dfrac{N_{AB}l_1}{AE}=44.0\times10^{6}\ m$，$\delta_C=\delta_B+\dfrac{N_{BC}l_2}{AE}=-32.7\times10^{-6}\ m$．

問題3．問題1．において，ABとCD間の断面積は等しく，BC間の断面積はAB間の断面積の 50 %である．端AとDに生ずる力R_AとR_Dを求めよ．（関連例題：**基本例題2.01**）

Ans．図2のようなフリーボディダイヤグラムを想定して，R_A=−9.25 kN，R_D=−4.25 kN．

問題4．図3のような構造の点Fに荷重P=10 kNを作用させたとき，以下の条件の下で棒＃1と棒＃2に生ずる内力と垂直応力，点Aの反力，点FのP方向の変位量λ_Fを求めよ．棒AFは剛体であるとする．（関連例題：**基本例題2.11，発展例題2.12**）

棒＃1：A_1=60 mm^2，l_1=200 mm，E_1=120 GPa．

棒＃2：A_2=30 mm^2，l_2=300 mm，E_2=200 GPa．

L=200 mmとする．

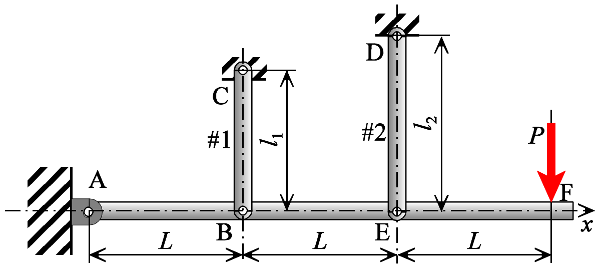


図3

Ans．N_1=9.3 kN，N_2=10.4 kN，σ_1=156 MPa，σ_2=347 MPa，

R_A=9.7 kN（下向き），λ_F=0.78 mm．

問題5．図4のような構造の点Fに荷重$P=10\ kN$を作用させたとき，棒＃1と棒＃2に生ずる内力，点Aの反力，点FのP方向の変位量λ_Fを求めよ．条件は問題4と同じである．(関連例題：**発展例題2.12**)

Ans．$N_1=9.3\ kN$，$N_2=-10.4\ kN$，$R_A=11.1\ kN$(上向き)，$\lambda_F=0.78\ mm$．

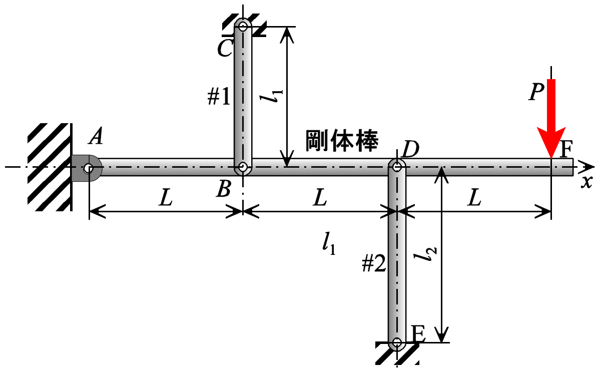


図4

問題6．図5のような構造のDE間に長さL_1+pの棒＃1を入れた．棒＃1と棒＃2に生ずる内力を式で表せ．$p \ll L_1$であり，断面積をA，ヤング率をEで表すものとする．また，棒ADは剛体である．(関連事項：「前ひずみに関する補足」)

ヒント：点A周りのモーメントのつりあいから棒＃1と＃2の内力の比が決まる．次に，p/L_1を熱ひずみのように考えると，棒＃1の全ひずみは$p/L_1+N_1/AE$，棒＃2の全ひずみはN_2/AEになるので，棒＃1と棒＃2の変形後の棒ADの点Dと点Bの移動量の比率は

$$\left(\frac{p}{L_1}+\frac{N_1}{AE}\right)L_1:l_1=\frac{N_2}{AE}L_2:l_2$$

になる．この式と内力の比を用いて内力の式を求めればよい．

Ans．$N_1=-\dfrac{pl_2^2}{L_1l_2^2+L_2l_1^2}AE$，$N_2=-\dfrac{l_1}{l_2}N_1=\dfrac{pl_1l_2}{L_1l_2^2+L_2l_1^2}AE$．

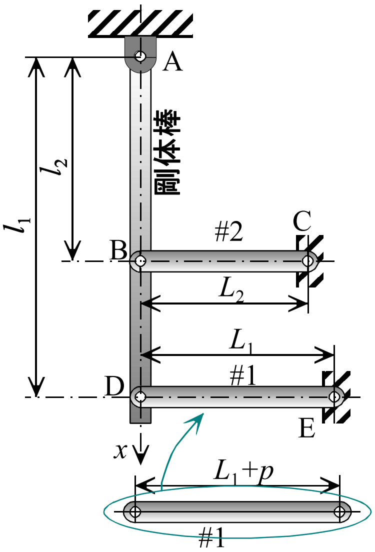


図5

問題7．図6のような構造でナットDを1ピッチ分進めた．このとき，棒＃1と棒＃2に生ずる内力とAの反力を求めよ．ボルトのピッチは$p=2.0\ mm$，ボルトの断面積は$A=300\ mm^2$，ヤング率は$E=200\ GPa$．$l_1=250\ mm$，$l_2=150\ mm$，$L_1=1.5\ m$，$L_2=2.0\ mm$とする．また，棒ADは剛体である．(関連事項：「全ひずみ関する補足」)

ヒント：問題6．とほぼ同じだが，1ピッチ分進めるということは，もともと1ピッチ分だけ短い棒を差し込むことと同じと考える．棒＃1と棒＃2の変形後の棒ADの点Dと点Bの移動量の比率は

$$\left(\frac{p}{L_1}-\frac{N_1}{AE}\right)L_1:l_1=\frac{N_2}{AE}L_2:l_2$$

になる．この式と内力の比を用いて内力の式を求めればよい．

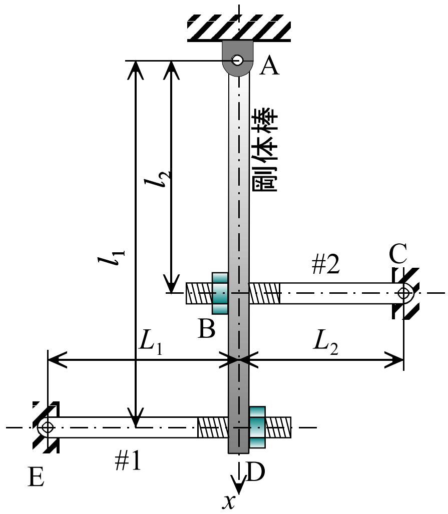


図6

Ans. $N_1 = \dfrac{pl_2^2}{L_1 l_2^2 + L_2 l_1^2} AE = 17.0\,kN$, $N_2 = \dfrac{l_1}{l_2} N_1 = \dfrac{pl_1 l_2}{L_1 l_2^2 + L_2 l_1^2} AE = 28.4\,kN$, $R_A = 11.4\,kN$（左向き）.

問題8．図7のような一本の剛体棒と三本の弾性棒からなる構造がある．弾性棒#3にΔTの温度変化が生じた．弾性棒の断面積をA，ヤング率をE，線膨張係数をαとする．弾性棒#1, #2, #3に生ずる軸力N_1，N_2，N_3を求めよ．また，弾性棒の変形後，剛体棒の軸線上の点でその位置を変えない点は存在するか．あれば，その位置を求めよ．

ヒント：たとえば，弾性棒の変形に伴って，剛体棒は図8のように傾斜すると考える．

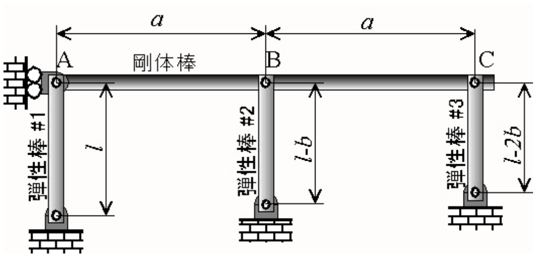


図7

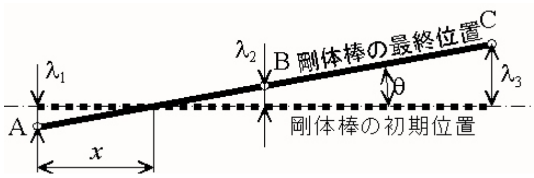


図8

Ans. 内力は，

$$N_1 = N_3 = -\frac{1}{6}\frac{l-2b}{l-b} AE\alpha\Delta T, \quad N_2 = \frac{1}{3}\frac{l-2b}{l-b} AE\alpha\Delta T.$$

位置を変えない点は存在し，点Aから右に$x = \dfrac{al}{3l-2b}$の位置．

補足：図8でλ_1，λ_2，λ_3のすべてが剛体棒の初期位置より上に移動したと仮定しても同じ内力の式が得られることを確認してみよう．

問題9．図9のように等間隔に設置された三本のケーブル＃1，＃2，＃3に剛体棒が取り付けられ，力Pがケーブル＃2に対して対称に作用している．各ケーブルに発生する内力を求めよ．ケーブル＃1と＃3は同じ材料で断面積も等しい．（関連例題：**基本例題2.02**，**基本例題2.03**，**基本例題2.11**）

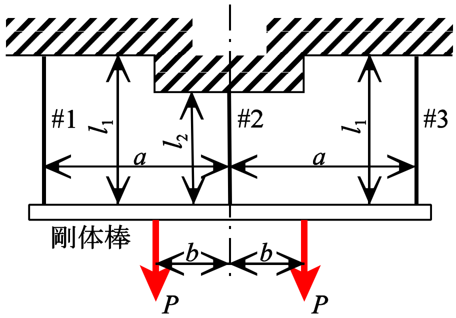


図9

Ans. $N_1 = \dfrac{A_1 E_1 l_2}{2A_1 E_1 l_2 + A_2 E_2 l_1} P$，$N_2 = \dfrac{A_2 E_2 l_1}{2A_1 E_1 l_2 + A_2 E_2 l_1} P$.

問題10．図10のように，第一章の問題8．の構造に部材BDを追加した．この構造の各部材に生ずる内力を求めよ．また，点Bの垂直方向変位δを表す式を求めよ．部材ABとBCの横断面積をA，ヤング率をE，部材BDの横断面積をA_1，ヤング率をE_1とする．（関連例題：**第1章の問題8．**）

ヒント：部材ABとBCの内力をN，部材BDの内力をN_1とすると，垂直方向の力のつりあいは$2\times(4/5)N + N_1 - P = 0$になることと，第1章の問題8．の答えで$P$を$2\times(4/5)N$に置き換えた$\delta$が部材BDの変位量$N_1 l_1/(A_1 E_1)$と等しいことを使う．

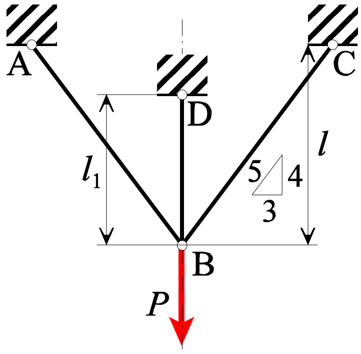


図10

Ans. $N=\dfrac{P}{\dfrac{8}{5}+\dfrac{25}{16}\dfrac{A_1E_1}{AE}\dfrac{l}{l_1}}$, $N_1=\dfrac{P}{\dfrac{128}{125}\dfrac{AE}{A_1E_1}\dfrac{l_1}{l}+1}$, $\delta=\dfrac{P}{\dfrac{128}{125}\dfrac{AE}{l}+\dfrac{A_1E_1}{l_1}}$.

第3章　ねじり

材料力学で考える外力は棒の伸縮に関係する軸力，棒をずらそうとするせん断力，曲げ変形に関係する曲げモーメント（第4章で詳細に調べる）のほかにもう一つ棒をねじろうとするねじりモーメントがある．ねじりモーメントがはたらくとその棒にはねじりのせん断応力が発生する．

ここでは，動力伝達軸のようなねじりモーメントがはたらいた棒に発生するねじりのせん断応力や棒の端面に生ずる角度変化などについて学ぶ．

基本事項1（丸棒のねじり）

1．ねじりモーメントTをうける丸棒の中心から半径rの位置に生ずるねじりのせん断応力τとせん断ひずみγは次の公式から計算することができる．

$$\tau=\frac{T}{I_p}r,\quad \gamma=\frac{\tau}{G}=\frac{Tr}{GI_p}$$

ここで，I_pは断面二次極モーメント，Gは横弾性係数である．

2．単位長さあたりのねじり角$d\varphi/dx$は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{GI_p}$$

である．GI_pを「丸棒のねじり剛性」と呼ぶ．特に，ねじりモーメントT，丸棒のねじり剛性GI_pがxに無関係であれば，長さLに対するねじり角は，

$$\varphi(L)=\frac{TL}{GI_p}$$

で表される．

基本例題3.01　図3.1のように丸棒の中心を通る長さdの棒の両端に互いに逆向きの力Pが作用する．ねじりモーメントTを求めよ．

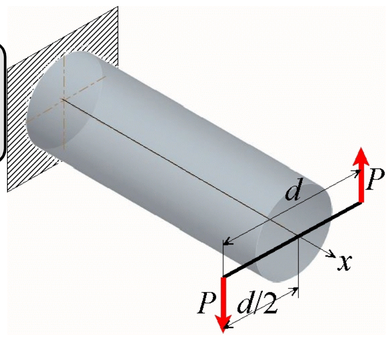


図3.1

解答　$T=Pd$ ■

解説1：図3.2は，ねじりモーメントを二重矢印線で表したものである．ねじりモーメントと二重矢印線の関係は右ネジの法則とよく似ていて，親指以外の指の向きでモーメントの向きを表し，親指の向きが二重矢印の向きを表す．この表記法を使うと，モーメントを力のように扱うことができて便利である．

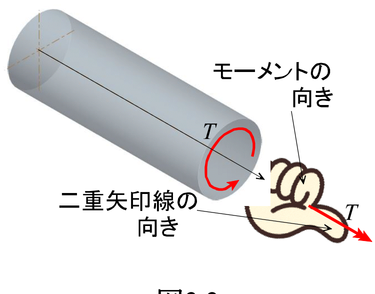


図3.2

解説2：図3.3のように二重矢印が棒の軸線に垂直な面から外に向いている場合(左)を正のねじりモーメントといい，内に向いている場合(右)を負のねじりモーメントという．右の場合，式を作ったり数値を入れる場合は，マイナス符号を付ける．

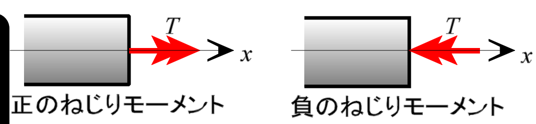


図3.3

解説3：図3.4(1)のような場合，力Pの作用点は丸棒の中心から$d/2$離れているのでねじりモーメントは$T=Pd/2$である．この場合，横荷重も発生することに注意する．力学的なモデルは図3.4(2)のようになる．このあたりの理屈については，教科書の1.1.4項を参照してください．

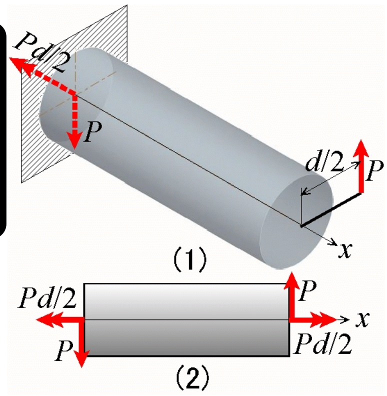


図3.4

基本例題3.02　図3.5のように剛体壁から突出た長さ$L=1$ [m]の一様な丸棒に$T=10$ [Nm]のねじりモーメントが作用する．ねじりのせん断応力を式で表し，最大せん断応力，最大せん断ひずみを求めよ．また，棒の先端の剛体壁に対するねじり角を求めよ．棒の直径$D=20$ [mm]，横弾性係数$G=25$ [GPa]とする．

指針　断面二次極モーメントを計算して公式に数値を当てはめて計算する．

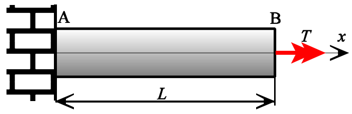


図3.5

解答　断面二次極モーメントは

$$I_p=\frac{\pi}{32}D^4=\frac{\pi}{32}\times(0.02)^4=15.7\times10^{-9}\ [m^4]$$

なので，ねじりのせん断応力の式は

$$\tau=\frac{T}{I_p}r=\frac{10}{15.7\times10^{-9}}r=637\times10^6\times r$$

である．ただし，rの範囲は$0\leq r\leq 0.01$ [m]である．

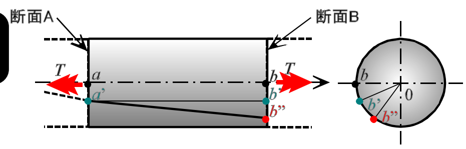
最大せん断応力は丸棒の外表面（$r=0.01$ [m]）に生じ，大きさは6.37 [MPa]，最大せん断ひずみは255×10^{-6}である．

棒の先端は剛体壁から1 [m]の距離にある．ゆえに，棒の先端の剛体壁に対するねじり角は

$$\varphi=\frac{10\times1}{25\times10^9\times15.7\times10^{-9}}=25.5\times10^{-3}\ [rad]=0.146\ [°]$$

である．■

解説1：最大せん断ひずみは図3.6の$\angle b''a'b'$である．



$\varphi_A=\angle a0a'=\angle b0b'$, $\varphi_B=\angle b0b''$, $\varphi_B-\varphi_A=\angle b'0b''$

図3.6

解説2：ねじり角を計算するときは，どの断面のどの断面に対する角度かをはっきりさせておくことが重要である．たとえば，図3.6は図3.5の一部を取り出したものである．この図で，ねじりモーメントが作用する前の軸線に平行な線分$a\,b$がねじりモーメントの作用の後$a'b''$になった場合，断面AとBの（図3.5左端の）剛体壁に対するねじり角を，それぞれ，φ_Aとφ_Bとすると，断面Bの断面Aに対するねじり角は$\varphi_B-\varphi_A$である．

解説3：最大せん断応力τ_{max}は丸棒の外表面に生ずるので，これだけを求めたい場合は

$$\tau_{max}=\frac{T}{I_p}\frac{D}{2}=\frac{T}{2I_p/D}=\frac{T}{Z_p}$$

と書いて，

$$Z_p=\frac{2I_p}{D}$$

をねじりの断面係数（torsional modulus of section）あるいは極断面係数（polar modulus of section）という．中実円形断面の場合，

$$Z_p=\frac{\pi}{16}D^3$$

であり，同心中空円形断面の場合，内径をD_1，外径をD_2で表すと，

$$Z_p=\frac{\pi}{16}\frac{D_2^4-D_1^4}{D_2}$$

である．

基本例題3.03　**基本例題3.02**の剛体壁をはずして，剛体壁がある場合と力学的に等価なモデルを作りたい．どのようなモデルになるか．

指針　剛体壁をはずしてしまうとねじりモーメントによって丸棒は回転運動を始める．回転運動が生じない条件を考える．

解答　図3.7のように，剛体壁に取り付けられていた側の端面に負荷のねじりモーメントと大きさが同じで逆向きのねじりモーメントを負荷する．■

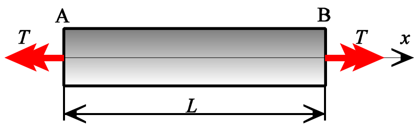


図3.7

解説1：剛体壁がある場合，丸棒の剛体壁側の端面には負荷のねじりモーメントと大きさが同じで逆向きのねじりモーメント（反モーメントと呼ぶことにする）が発生している．丸棒全体の系では，この反モーメントと負荷のモーメントがつりあうことになる．**基本例題3.03**では反モーメントに相当するモーメントを負荷のモーメントとして付加することになる．第1章の**基本例題1.06**の**指針**も参照．

解説2：図3.5と図3.7の関係は第1章の図1.7と図1.8の関係と同じである．すなわち，図3.7は図3.5に対するフリーボディダイヤグラムである．

基本例題3.04　図3.8のような長さ$L=1\ [m]$の同心中空丸棒に$T=10\ [Nm]$のねじりモーメントが作用する．ねじりのせん断応力を式で表せ．また，端Bの端Aに対するねじり角を求めよ．棒の外径$D_1=30\ [mm]$，内径 $D_2=15\ [mm]$とし，$G=80\ [GPa]$とする．

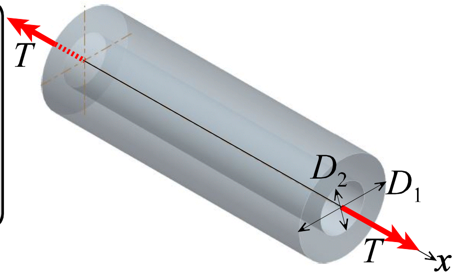


図3.8

解答　断面二次極モーメントは

$$I_p=\frac{\pi}{32}\left(D_1^4-D_2^4\right)=74.5\times10^{-9}\ [m^4]$$

基本事項1の1．の公式に代入すると，ねじりのせん断応力の式は

$$\tau=\frac{T}{I_p}r=\frac{10}{74.5\times10^{-9}}=134.3\times10^6\times r$$

である．ただし，rの範囲は$0.0075\leq r\leq 0.015$で単位はm（メートル）である．

端Bの端Aに対するねじり角は

$$\varphi=\frac{10\times1}{80\times10^9\times74.5\times10^{-9}}=1.68\times10^{-3}\ [rad]=96.3\times10^{-3}\ [°]$$

である．■

基本例題3.05　図3.9のような丸棒にねじりモーメントTが作用するとき，端Aを基準とした端Bのねじり角を求めよ．ただし，AC間の材料の横弾性係数をG_1，CB間のそれをG_2とする．

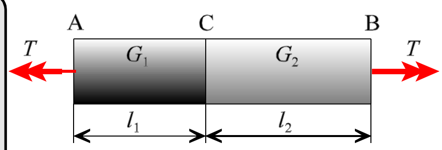


図3.9

解答　断面二次極モーメントをI_pとすると，CのAに対するねじり角とBのCに対するねじり角は，

$$\varphi_C-\varphi_A=\frac{Tl_1}{G_1I_p},\quad \varphi_B-\varphi_C=\frac{Tl_2}{G_2I_p}.$$

ゆえに，端Aを基準とした端Bのねじり角は

$$\varphi_B-\varphi_A=(\varphi_B-\varphi_C)+(\varphi_C-\varphi_A)=\left(\frac{l_1}{G_1}+\frac{l_2}{G_2}\right)\frac{T}{I_p}$$

である．■

基本例題3.06　図3.10のような丸棒にねじりモーメントTが作用するとき，端Aを基準とした端Bのねじり角を求めよ．AC間の断面二次極モーメントをI_{p1}，CB間のそれをI_{p2}とする．

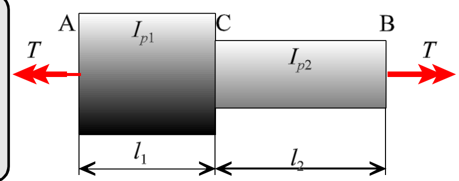


図3.10

解答　材料の横弾性係数をGとすると，CのAに対するねじり角とBのCに対するねじり角は，

$$\varphi_C-\varphi_A=\frac{Tl_1}{GI_{p1}},\quad \varphi_B-\varphi_C=\frac{Tl_2}{GI_{p2}}.$$

ゆえに，端Aを基準とした端Bのねじり角は

$$\varphi_B-\varphi_A=(\varphi_B-\varphi_C)+(\varphi_C-\varphi_A)=\left(\frac{l_1}{I_{p1}}+\frac{l_2}{I_{p2}}\right)\frac{T}{G}$$

である．■

基本例題3.07　図3.11のように両端A，Bが剛体壁に固定された丸棒の途中CにねじりモーメントT_Cが作用している．CのAに対するねじり角を求めよ．ねじり剛性をGI_pとする．

指針　AC間とCB間に発生するねじりモーメントを求め，AC間のねじりモーメントを用いてねじり角を求める．

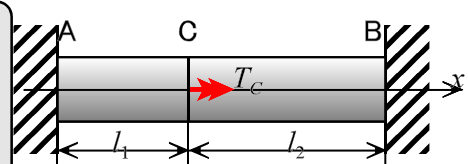


図3.11

解答　図3.12のようにAC間とCB間に生ずるねじりモーメントをT_{AC}とT_{CB}とすると，モーメントのつりあい式

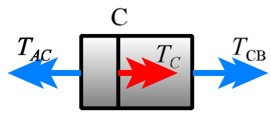


図3.12

$$T_C+T_{CB}-T_{AC}=0$$

から

$$T_{AC}-T_{CB}=T_C. \qquad \text{(A)}$$

CのAに対するねじり角とBのCに対するねじり角は

$$\varphi_C-\varphi_A=\int_0^{l_1}\frac{T_{AC}}{GI_p}dx=\frac{T_{AC}l_1}{GI_p},\quad \varphi_B-\varphi_C=\int_{l_1}^{l_1+l_2}\frac{T_{CB}}{GI_p}dx=\frac{T_{CB}l_2}{GI_p}$$

であり，AとBが剛体壁に固定されているのでBのAに対するねじり角はゼロ，すなわち，$\varphi_B-\varphi_A=0$が成立しなければならないから

$$\varphi_B-\varphi_A=(\varphi_B-\varphi_C)+(\varphi_C-\varphi_A)=0$$

となり，これから次の式が得られる．

$$T_{AC}l_1+T_{CB}l_2=0 \qquad \text{(B)}$$

(A)と(B)から

$$T_{AC}=\frac{l_2}{l_1+l_2}T_C,\quad T_{CB}=-\frac{l_1}{l_1+l_2}T_C.$$

CのAに対するねじり角は

$$\varphi_C-\varphi_A=\frac{T_{AC}l_1}{GI_p}=\frac{T_Cl_1l_2}{GI_p(l_1+l_2)}$$

■

解説1：このような問題では，内力のねじりモーメントが常に正であると仮定するとよい．もし，内力のねじりモーメントが負であれば，マイナス符号がつくだけである．「正であると仮定する」とは，本章の最初に述べたように，「二重矢印線の矢印の向きが面の外に向かっていると仮定する」ことである．

解説2：この例題と第2章の**基本例題2.01**とを比較すると，力のつりあいがねじりモーメントのつりあいに，系の軸方向変位量がゼロである条件が系のねじり角がゼロである条件にそれぞれ置き換わっただけであることがわかる．

解説3：CのAに対するねじり角とBのCに対するねじり角の式と**基本例題2.01**のAB間とBC間の長さの変化量λ_{AB}，λ_{BC}の式を比較してみよう．これらは同じ形をしていることに気づくだろう．対応する量を考えてみよう．

　同じような問題を次の例題で扱ってみよう．

基本例題3.08　図3.13のAC間，CD間，DB間のねじりモーメントを求めよ．
指針　**基本例題3.07**のように，AC間，CD間，DB間のねじりモーメントを仮定してつりあい式を作り，B端のA端に対するねじり角がゼロであることを用いる．

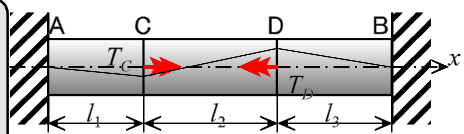


図3.13

解答　AC間，CD間，DB間のねじりモーメントをT_{AC}，T_{CD}，T_{DB}で表すと，図3.14を参照してモーメントのつりあい式から

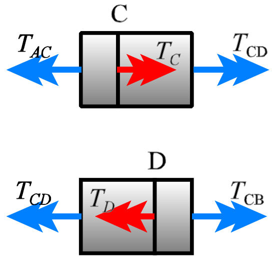


図3.14

$$T_{AC}-T_{CD}=T_C,$$

$$T_{CD}-T_{DB}=-T_D. \qquad \text{(A)}$$

CのAに対するねじり角，DのCに対するねじり角，BのDに対するねじり角は

$$\varphi_C-\varphi_A=\frac{T_{AC}l_1}{GI_p},\ \varphi_D-\varphi_C=\frac{T_{CD}l_2}{GI_p},\ \varphi_B-\varphi_D=\frac{T_{DB}l_3}{GI_p}.$$

であり，BのAに対するねじり角はゼロであるから，

$$\varphi_B-\varphi_A=(\varphi_B-\varphi_D)+(\varphi_D-\varphi_C)+(\varphi_C-\varphi_A)=0$$

となり，これから

$$T_{AC}l_1+T_{CD}l_2+T_{DB}l_3=0 \qquad \text{(B)}$$

(A)の二つの式と(B)から

$$T_{AC}=\frac{(l_2+l_3)T_C-l_3T_D}{l_1+l_2+l_3},\ T_{CD}=-\frac{l_1T_C+l_3T_D}{l_1+l_2+l_3},\ T_{DB}=\frac{-l_1T_C+(l_1+l_2)T_D}{l_1+l_2+l_3}.$$

■

発展例題3.09　図3.15のように直径の変化が一次関数で表されるような丸棒にねじりモーメントが作用する．端Bの端Aに対するねじり角を求めよ．
指針　直径が軸方向に変化するため断面二次極モーメントI_pも軸方向に変化するので，ねじり角の計算には**基本事項1**．の2．に述べた単位長さあたりのねじり角$d\varphi/dx$の式を使う．

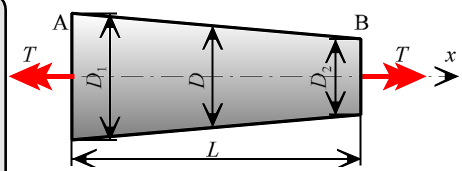


図3.15

解答　直径の変化は

$$D=D_1+\frac{D_2-D_1}{L}x$$

で表すことができるので，断面二次極モーメントI_pは

$$I_p=\frac{\pi}{32}\left(D_1+\frac{D_2-D_1}{L}x\right)^4$$

である．端Bの端Aに対するねじり角$\varphi_B-\varphi_A$は

$$\varphi_B-\varphi_A=\int_0^L\frac{d\varphi}{dx}dx=\frac{32}{\pi}\frac{T}{G}\int_0^L\left(D_1+\frac{D_2-D_1}{L}x\right)^{-4}dx$$

から，

$$\varphi_B-\varphi_A=\frac{32}{3\pi}\frac{TL}{G}\frac{D_1^2+D_1D_2+D_2^2}{D_1^3D_2^3}$$

である．■

解説：積分の際は，

$$D = D_1 + \frac{D_2 - D_1}{L} x$$

から

$$dx = \frac{L}{D_2 - D_1} dD$$

となるから

$$\int_0^L \left(D_1 + \frac{D_2 - D_1}{L} x \right)^{-4} dx = \frac{L}{D_2 - D_1} \int_{D_1}^{D_2} D^{-4} dD$$

とすればよい．

発展例題3.10　図3.16のように同心中空丸棒（外径D_2，内径D_1）に中実丸棒（直径D_1）が隙間なくはめ込まれた長さLの棒にねじりモーメントTが作用する．せん断応力の式と長さLに対するねじり角を求めよ．中実丸棒の横弾性係数をG_1，中空丸棒の横弾性係数をG_2とする．

指針　中実丸棒と中空丸棒の間に隙間がないことから，直径D_2の面でせん断ひずみが連続することに注意する．

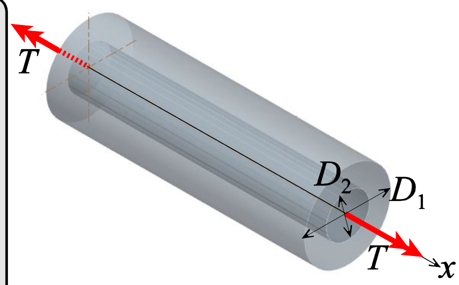


図3.16

解答　中実丸棒と中空丸棒の断面二次極モーメントをI_{p1}とI_{p2}で表し，中実丸棒と中空丸棒が負担するねじりモーメントをT_1とT_2で表すと，ねじりのせん断応力は

$$0 \le r \le D_1/2 \text{ で } \tau_1 = \frac{T_1}{I_{p1}} r,\quad D_1/2 \le r \le D_2/2 \text{ で } \tau_2 = \frac{T_2}{I_{p2}} r$$

である．

$r = D_1/2$でせん断ひずみが等しい(材料の横弾性係数が違うので，せん断応力は等しくないことに注意)条件から，

$$\frac{T_1}{G_1 I_{p1}} = \frac{T_2}{G_2 I_{p2}} \qquad \text{(A)}$$

であり，それぞれの棒が負担するねじりモーメントの和が外力のモーメントに等しいことから，

$$T_1 + T_2 = T \qquad \text{(B)}$$

となる．式(A)と(B)から，T_1とT_2は

$$T_1 = \frac{G_1 I_{p1}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} T,\quad T_2 = \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} T$$

となる．これらをせん断応力の式に代入するとせん断応力の式は

$$0 \le r \le D_1/2 \text{ で } \tau_1 = \frac{G_1 T}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} r$$

$D_1/2 \leq r \leq D_2/2$ で $\tau_2 = \dfrac{G_2 T}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}} r$.

長さLに対するねじり角は中実丸棒，中空丸棒，それぞれについて

$$\varphi_1 = \frac{T_1 L}{G_1 I_{p1}},\ \ \varphi_2 = \frac{T_2 L}{G_2 I_{p2}}$$

であり，これらにT_1とT_2を代入すると，

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{TL}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}$$

となる．■

解説：式（A）にLをかけると$\varphi_1 = \varphi_2$であることが直ちにわかる．

発展例題3.11　発展例題3.10でT=3 [kNm]，L=2 [m]である．D_1=54 [mm]，D_2=72 [mm]，G_1=77 [GPa]，G_2=27 [GPa]のときの各棒に生ずる最大せん断応力とB端のA端に対するねじり角を求めよ．

解答　各棒のねじり剛性は

$$G_1 I_{p1} = 77 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times (54 \times 10^{-3})^4 = 64.3 \times 10^3\ [Nm^2]$$

$$G_2 I_{p2} = 27 \times 10^9 \times \frac{\pi}{32} \times [(72 \times 10^{-3})^4 - (54 \times 10^{-3})^4] = 48.7 \times 10^3\ [Nm^2]$$

であるから，

$$G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2} = 64.3 \times 10^3 + 48.7 \times 10^3 = 113.0\ [Nm^2].$$

中実棒に生ずる最大せん断応力は**発展例題3.10**のτ_1の式で$r = D_1/2$として

$$\tau_{1\max} = \frac{77 \times 10^9}{113 \times 10^3} \times 3 \times 10^3 \times \frac{54 \times 10^{-3}}{2} = 55.2\ [MPa],$$

中空棒に生ずる最大せん断応力は**発展例題3.10**のτ_2の式で$r = D_2/2$として

$$\tau_{2\max} = \frac{27 \times 10^9}{113 \times 10^3} \times 3 \times 10^3 \times \frac{72 \times 10^{-3}}{2} = 25.8\ [MPa].$$

B端のA端に対するねじり角は

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{3 \times 10^3 \times 2}{113 \times 10^3} = 53.1 \times 10^{-3}\ [rad] = 3.04\ [°]$$

■

発展例題3.12　図3.17の棒のCのAに対するねじり角を求めよ．

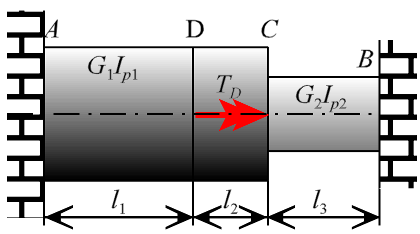


図3.17

解答　AD間とDB間のねじりモーメントをT_{AD}とT_{DB}で表すと，モーメントのつりあい式

$$T + T_{DB} - T_{AD} = 0$$

から

$$T_{AD}-T_{DB}=T. \qquad \text{(A)}$$

太い棒のねじり剛性をG_1I_{p1}，細い棒のそれをG_2I_{p2}とおくと，DのAに対するねじり角，CのDに対するねじり角，BのCに対するねじり角は

$$\varphi_D-\varphi_A=\frac{T_{AD}l_1}{G_1I_{p1}},\ \varphi_C-\varphi_D=\frac{T_{DB}l_2}{G_1I_{p1}},\ \varphi_B-\varphi_C=\frac{T_{DB}l_3}{G_2I_{p2}}.$$

BのAに対するねじり角がゼロである条件から

$$\varphi_B-\varphi_A=(\varphi_B-\varphi_C)+(\varphi_C-\varphi_D)+(\varphi_D-\varphi_A)=\frac{l_1}{G_1I_{p1}}T_{AD}+\left(\frac{l_2}{G_1I_{p1}}+\frac{l_3}{G_2I_{p2}}\right)T_{DB}=0 \qquad \text{(B)}$$

式(A)と(B)からT_{AD}とT_{DB}を求めることができる.

CのAに対するねじり角は

$$\varphi_C-\varphi_A=(\varphi_C-\varphi_D)+(\varphi_D-\varphi_A)=\frac{T_{AD}l_1}{G_1I_{p1}}+\frac{T_{DB}l_2}{G_1I_{p1}}.$$

あるいは，式(B)を少し変形して

$$\varphi_C-\varphi_A=(\varphi_C-\varphi_D)+(\varphi_D-\varphi_A)=-(\varphi_B-\varphi_C)=-\frac{T_{DB}l_3}{G_2I_{p2}}.$$

どちらでもかまわない. ■

発展例題3.13　発展例題3.12において，太い棒と細い棒の直径が$D_1=72$ $[mm]$と$D_2=54$ $[mm]$. 横弾性係数が$G_1=77$ $[GPa]$，$G_2=27$ $[GPa]$. $T_D=3$ $[kNm]$，$l_1=1$ $[m]$，$l_2=0.3$ $[m]$，$l_3=0.7$ $[m]$である. それぞれの棒に生ずるねじりの最大せん断応力とCのAに対するねじり角を計算せよ.

解答　各棒のねじり剛性と極断面係数は

$$G_1I_{p1}=77\times10^9\times\frac{\pi\times(72\times10^{-3})^4}{32}=203\times10^3\ [Nm^2],\ Z_{p1}=72.3\times10^{-6}\ [m^3],$$

$$G_2I_{p2}=27\times10^9\times\frac{\pi\times(54\times10^{-3})^4}{32}=22.5\times10^3\ [Nm^2],\ Z_{p2}=30.9\times10^{-6}\ [m^3].$$

内力のねじりモーメントは

$$T_{DB}=-\frac{G_2I_{p2}l_1}{G_1I_{p1}l_3+G_2I_{p2}(l_1+l_2)}T=-394\ [Nm],\ T_{AD}=2606\ [Nm].\ (20170425)$$

それぞれの棒のねじりの最大せん断応力は各区間で

$$\tau_{AD}=\frac{T_{AD}}{Z_{p1}}=\frac{2606}{72.3\times10^{-6}}=36.1\ [MPa],$$

$$\tau_{DC}=\frac{T_{DB}}{Z_{p1}}=\frac{-394}{72.3\times10^{-6}}=-5.45\ [MPa],$$

$$\tau_{CB}=\frac{T_{DB}}{Z_{p2}}=\frac{-394}{30.9\times10^{-6}}=-12.8\ [MPa].$$

なお，ねじりの最大せん断応力が生ずる棒はAD間で，その大きさは12.8 $[MPa]$である.

CのAに対するねじり角は

$$\varphi_C - \varphi_A = -\frac{T_{DB} l_3}{G_2 I_{p2}} = -\frac{-394\times 0.3}{22.5\times 10^3} = 5.25\times 10^{-3}\ [rad] = 0.301\ [°].$$

■

応用例題3.14　図3.18のように，直径50 mmと250 mmの二つの摩擦車（摩擦力を使って動力を伝達するための機械部品）が接触している．D端にT=0.25 kNmのねじりモーメントが作用するとき，D端のA端に対する角度変化量を求めよ．棒ABと棒CDの横弾性係数を，それぞれ，85 GPaと35 GPaとする．摩擦車は剛体であるとする．

指針　D端にはたらくねじりモーメントによって摩擦車Cに発生する力を求め，軸ABに生ずるねじりモーメントを求めてそれぞれの棒のねじり角を求める．

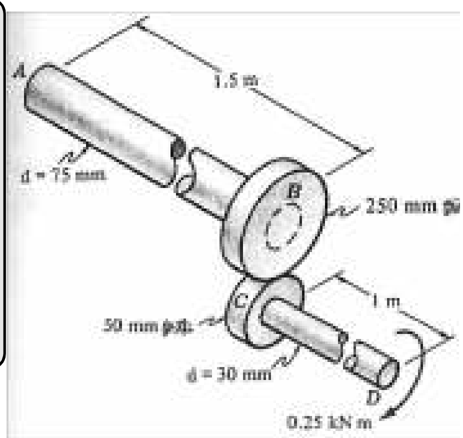


図3.18

解答　棒ABと棒CDのねじり剛性を$G_1 I_{p1}$と$G_2 I_{p2}$とすると，

$$G_1 I_{p1} = 85\times 10^9 \times \frac{\pi\times(75\times 10^{-3})^4}{32} = 264\times 10^3\ Nm^2$$

$$G_2 I_{p2} = 35\times 10^9 \times \frac{\pi\times(30\times 10^{-3})^4}{32} = 2.78\times 10^3\ Nm^2$$

である．

D端のC端に対するねじり角は

$$\varphi_D - \varphi_C = \frac{0.25\times 10^3\times 1}{2.78\times 10^3}$$
$$= 0.09\ rad = 5.15\ °$$

棒ABに生ずるねじりモーメントを求めるために，まず，摩擦車Cに作用する力Pは，図3.19上を参照して，モーメントのつりあい

$$25\times 10^{-3}\times P = 0.25\times 10^3\ Nm$$

から，P=10 kNとなる．この力がそのまま摩擦車Bに伝達されるから，棒ABに作用するねじりモーメントは，図3.19下を参照して，

$$T_{AB} = 10\times 10^3\times 125\times 10^{-3}$$
$$= 1.25\times 10^3\ Nm$$

となり，端Bの端Aに対するねじり角は

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{1.25\times 10^3\times 1.5}{264\times 10^3}$$
$$= 7.10\times 10^{-3}\ rad = 0.407\ °$$

となる．

以上から，D端のA端に対する角度変化量は

$$\varphi_D - \varphi_A = 5\times 7.10\times 10^{-3} + 0.09 = 0.126\ rad = 14.4\ °$$

である．■

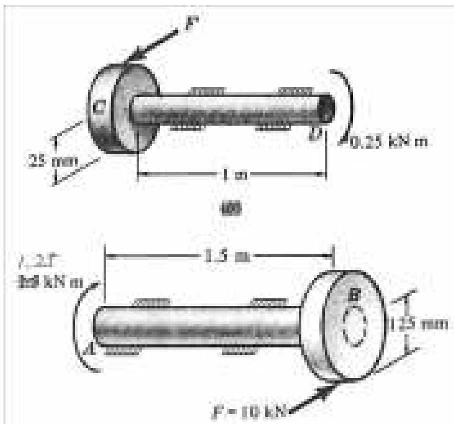


図3.19

解説1：最後の答の式で$5×7.10×10^{-3}$の数字「5」はなんだろうか．棒ABが$7.10×10^{-3}$ radねじれると，摩擦車Bも同じ角度だけねじれるので，摩擦面上の一点は$125×7.10×10^{-3}mm$移動する．摩擦車Cの摩擦面上の一点も同じだけ（$125×7.10×10^{-3}mm$）移動するから，摩擦車C自体の角度の変化量をφ_Cとすると

$$125×7.10×10^{-3}=25×\varphi_C$$

が成り立たなければならない．ゆえに，

$$\varphi_C=(125/25)×7.1×10^{-3}=5×7.1×10^{-3}\ rad$$

となる．すなわち，数字「5」は摩擦車の直径比を表している．

解説2：摩擦で動力を伝達する例として，VプーリーとVベルトを使った動力伝達方法がよく見られる．調べてみよう．

解説3：摩擦車は歯車のモデルとしてよく使われる．歯車を摩擦車に置き換える場合，歯車の基準ピッチ円直径を摩擦車の直径とする．

解説4：二つの歯車は，基準ピッチ円上の単位長さあたりの歯数が等しいもの同士でかみ合う．すなわち，歯車AとBの歯数をZ_AとZ_Bで表し，基準ピッチ円直径をd_Aとd_Bで表すと，基準ピッチ円上の単位長さあたりの歯数が等しいということは

$$\frac{Z_A}{\pi d_A}=\frac{Z_B}{\pi d_B}$$

が成り立つことである．ゆえに次の式が成り立つ（図3.20）．

$$\frac{Z_A}{Z_B}=\frac{d_A}{d_B}.$$

歯車Aの軸にT_Aのねじりモーメントが作用しているとき，歯車AとBの接触点では基準ピッチ円の接線方向に$P=T_A/(d_A/2)$の力が生ずると考える．この力と大きさが同じで逆向きの力が歯車Bに生ずるから，歯車Bの軸に生ずるねじりモーメントをT_Bとすると

$$P=\frac{T_A}{d_A/2}=\frac{T_B}{d_B/2}$$

が成り立つので，

$$\frac{T_A}{T_B}=\frac{d_A}{d_B}=\frac{Z_A}{Z_B}$$

が成り立つ．

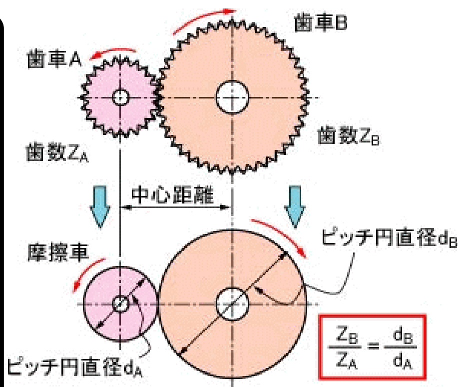


図3.20

応用例題3.15 図3.21のような，モーターAから機械ユニットFへ動力を伝達するためのシステムの軸を設計せよ．モーターAは1800 rpm，7.5 kW であり，各軸の許容せん断応力はτ_a=60 MPaである．

指針 まず，1800 rpmで7.5 kW出力をNm単位のねじりモーメントに換算する必要がある．換算式は，動力をW [W(ワットと読む)]，ねじりモーメントをT [Nm]，回転数をn [rpm]（アールピーエムと読む）で表すと，

$$W=\frac{2\pi n}{60}T.$$

単位rpmはrevolution per minuteまたはrotation per minuteの意味で一分間あたりの回転数を表す単位である．なお，1 W（ワット）=1 Nm/s．

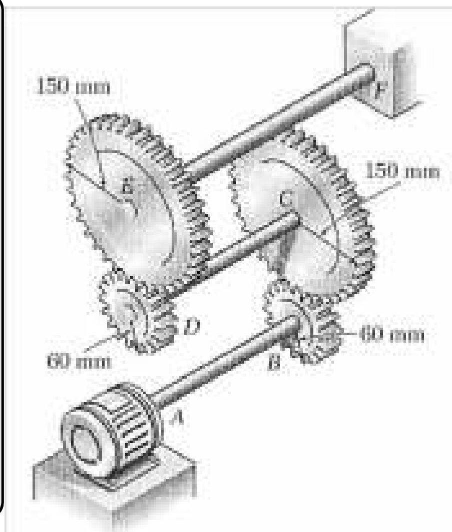


図3.21

解答 モーターAがつくるねじりモーメントは

$$T=\frac{60W}{2\pi n}=\frac{60\times 7.5\times 10^3}{2\pi\times 1800}=39.8\ Nm.$$

軸ABには$T_{AB}=T=39.8\ Nm$のねじりモーメントが生ずるので，軸径をd_{AB}とすると最大せん断応力τ_{AB}は，

$$\tau_{AB}=\frac{16T_{AB}}{\pi d_{AB}^3}\leq\tau_a$$

でなければならない．これより

$$d_{AB}\geq\sqrt[3]{\frac{16T_{AB}}{\pi\tau_a}}=\sqrt[3]{\frac{16\times 39.8}{\pi\times 60\times 10^6}}=15.0\times 10^{-3}\ m.$$

軸CDには

$$T_{CD}=\frac{D_C}{D_B}T_{AB}=\frac{150}{60}\times 39.8=99.5\ Nm$$

のねじりモーメントが生ずるから，

$$d_{CD}\geq\sqrt[3]{\frac{16T_{CD}}{\pi\tau_a}}=\sqrt[3]{\frac{16\times 99.5}{\pi\times 60\times 10^6}}=20.4\times 10^{-3}\ m.$$

軸EFには

$$T_{EF}=\frac{D_E}{D_D}T_{CD}=\frac{150}{60}\times 99.5=249\ Nm$$

のねじりモーメントが生ずるから，

$$d_{EF}\geq\sqrt[3]{\frac{16T_{EF}}{\pi\tau_a}}=\sqrt[3]{\frac{16\times 249}{\pi\times 60\times 10^6}}=27.7\times 10^{-3}\ m.$$

以上まとめると，$d_{AB}\geq 15\ mm$，$d_{CD}\geq 20.4\ mm$，$d_{EF}\geq 27.7\ mm$．■

解説1：各軸の回転数を求めてみると，かみ合っている歯車間で回転数×π×基準ピッチ円直径が等しくなければならないことから，

$$n_{CD}=\frac{D_B}{D_C}n_{AB}=\frac{60}{150}\times1800=720\ rpm,\qquad n_{EF}=\frac{D_D}{D_E}n_{CD}=\frac{60}{150}\times720=288\ rpm$$

となる．ちなみに，n_{EF}とT_{EF}を使ってFに伝達される動力を計算してみると

$$\frac{2\pi n_{EF}}{60}T_{EF}=\frac{2\pi\times288}{60}\times249=7.51\times10^3 W$$

となり，当然のことであるが，モーター出力と一致していることがわかる．なお，最後の桁の数字の違いは切り上げ計算のために生じた誤差であるので，気にしなくてもよい．

解説2：動力の単位W（ワット）のほかにPS（馬力）がよく使われる．1 PSは

$$1\ PS=735\ Nm/s=735\ W$$

である．

解説3：SI単位系ではrpmの代わりにHz（ヘルツと読む）を使う．これは一秒間あたりの繰り返し回数を表す．rpmは併用単位で，1 Hz=60 rpmである．「回数」を表す単位はないので，Hzはs^{-1}のこと．rpmも$\min^{-1}$．つまり，1800 rpm=1800 $\min^{-1}$であり，30 Hz=30 s^{-1}という具合なのである．ついでに，**指針**の式の中にある$2\pi n/60$の単位はrad/s（radian per second）で角速度の単位．rad（ラジアン）は角度を表すSI単位でありながら，もともとは円弧長さと半径の比なので本来次元を持たない．実際，長さの単位を持つ半径をかけると周速度（単位はm/s）になってradは消える．どうせ消えるからといって，たとえば，$2\pi n/60\ rad/s$のradを省略してs^{-1}にすると何のことやら分からなくなるので要注意である．単位の話は長くなる・・・．

基本事項2（円形断面棒以外のねじり）

楕円断面の公式と長方形断面の公式を挙げておく．

楕円断面：図3.22のような長軸の長さ$2a$，短軸の長さ$2b$の楕円断面棒の表面に生ずるねじり応力の計算式は

$$\tau_{xz\max}=\frac{2T}{\pi a^2 b},\quad \tau_{xy\max}=\frac{2T}{\pi ab^2}.$$

単位長さあたりのねじり角$d\varphi/dx$は，

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{a^2+b^2}{\pi a^3 b^3 G}T.$$

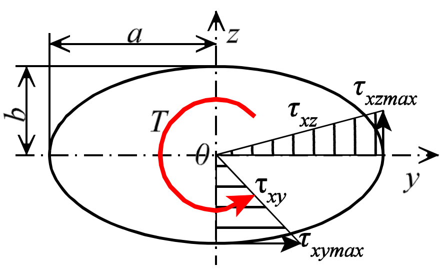


図3.22

長方形断面：図3.23のような長辺の長さ$2a$，短辺の長さ$2b$の長方形断面の表面に生ずるねじり応力の計算式は，

$a\geq b$の場合，

$$\tau_{\max}=\frac{T}{k_1(2a)(2b)^2}.$$

単位長さあたりのねじり角$d\varphi/dx$は，

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{k_2 G(2a)(2b)^3}.$$

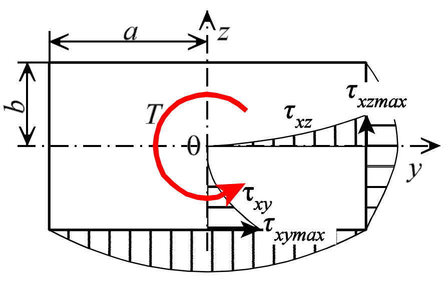


図3.23

係数k_1とk_2の値を図3.24に挙げておく．

基本例題3.16 長方形断面

1) 40 mm×40 mm

2) 64 mm×25 mm

の棒にねじりモーメントT=500 Nmが作用する．ねじり応力と単位長さあたりのねじり角 $d\varphi/dx$を求めよ．横弾性係数をG=80GPaとする．

a/b	k_1	k_2
1.0	0.208	0.141
1.2	0.219	0.166
1.5	0.231	0.196
2.0	0.246	0.229
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

図3.24

解答 1) a/b=40/40=1.0であるので，図3.24の表からk_1=0.208，k_2=0.141である．ゆえに，ねじり応力は

$$\tau_{max}=\frac{T}{k_1(2a)(2b)^2}=\frac{500}{0.208\times(40\times10^{-3})^3}=37.6\ MPa.$$

単位長さあたりのねじり角 $d\varphi/dx$は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{k_2G(2a)(2b)^3}=\frac{500}{0.141\times80\times10^9\times(40\times10^{-3})^3}=693\times10^{-6}\ rad/m.$$

2) $a/b=(2a)/(2b)$=64/25=2.56であり，図3.24の表には値がないので，a/b=2.0とa/b=3.0のk_1とk_2の値を使って補間すると

$$k_1(2.56)=(0.267-0.246)\times0.56+0.246=0.258$$

$$k_2(2.56)=(0.263-0.229)\times0.56+0.229=0.248$$

となるから，ねじり応力は

$$\tau_{max}=\frac{500}{0.258\times64\times10^{-3}\times(25\times10^{-3})^2}=48.4\ MPa.$$

単位長さあたりのねじり角は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{500}{0.248\times80\times10^9\times64\times10^{-3}\times(25\times10^{-3})^2}=630\times10^{-6}\ rad/m.$$

■

解説1：ここでは，補間する際にa/b=2.0とa/b=3.0の値を使ったが，より詳しい表によるとa/b=2.5の場合 k_1=0.258とk_2=0.249となっているので，これらを使って$k_1(2.56)$と$k_2(2.56)$を求めるために補間すると

$$k_1(2.56)=(0.267-0.258)\times0.06+0.258=0.259$$

$$k_2(2.56)=(0.263-0.249)\times0.06+0.249=0.250$$

となるが，1％の誤差も生じないので図3.24の表程度で十分である．

解説2：剛性とは，本来，負荷に対する変形抵抗を言うので，ねじり剛性は$T/(d\varphi/dx)$で定義されるもので，GI_pではない．たとえば，長方形断面棒で$a\geq b$の場合，ねじり剛性は

$$\frac{T}{d\varphi/dx}=k_2G(2a)(2b)^3$$

である．GI_pをねじり剛性と呼ぶのは円形断面の丸棒の場合だけだと考えてほしい．

基本事項3（薄肉閉断面棒のねじり）

薄肉閉断面棒，たとえば，パイプのようなもののねじりのせん断応力は次のような公式から計算される．

$$\tau=\frac{T}{2St}$$

ここで，t は薄肉断面棒の厚さ，Sは厚さの中央線が囲む面積（図3.25）である．

単位長さあたりのねじり角 $d\varphi/dx$ は，Gを横弾性係数として

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{4S^2}\oint\frac{1}{Gt}ds$$

である．ここで，積分は厚さの中央線sに沿った一周積分である．積分の中に横弾性係数Gと厚さt はsの関数でもよい．

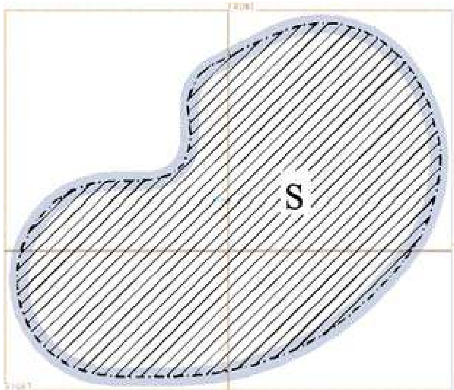


図3.25

基本例題3.17　厚さの中央線の直径がD，厚さがt の中空円形断面棒の断面二次極モーメントは

$$I_p=\frac{1}{4}\pi D^3 t$$

となることを示せ．

解答　外径D_1，内径D_2は中央線の直径と厚さを用いて

$$D_1=D+t,\ D_2=D-t$$

と表すことができる．これらを中空円筒の断面二次極モーメントの式

$$I_p=\frac{1}{32}\pi(D_1^4-D_2^4)$$

に代入すると，

$$I_p=\frac{1}{4}\pi Dt(D^2+t^2)=\frac{1}{4}\pi D^3 t\left[1+\left(\frac{t}{D}\right)^2\right]$$

となる．薄肉であるから$D \gg t$とするとt^2の項はD^2の項に比べて無視できるので，

$$I_p=\frac{1}{4}\pi D^3 t$$

となる．■

解説：断面二次極モーメントの厳密な値に対して1%の誤差を許すなら，$t/D\leq 0.1$ であればよい．すなわち，$D=100\ mm$に対して厚さは$10\ mm$以下であればよいが，このようなパイプが薄肉と仮定してよいかは微妙である．

基本例題3.18　厚さの中央線の直径D，厚さt の薄肉断面棒にねじりモーメントTが作用する．**基本例題3.17**で求めたI_pを用いて，$r=D/2$ におけるねじりのせん断応力の式を，厚さの中央線が囲む面積Sを用いて，書け．

解答　**基本例題3.17**で求めたI_pを用いると，$r=D$ におけるねじりのせん断応力は

$$\tau=\frac{T}{I_p}\frac{D}{2}=\frac{T}{\pi D^3t/4}\frac{D}{2}=\frac{T}{\pi D^2/4\cdot tD}\frac{D}{2}$$

であるが，中央線が囲む面積は$S=\pi D^2/4$であるので，

$$\tau=\frac{T}{2St}$$

となる．■

> **基本例題3.19**　厚さの中央線の直径D，厚さtの薄肉断面棒にねじりモーメントTが作用する．厳密な式から求めたねじりの最大せん断応力と薄肉断面の式から得られるせん断応力とを比較せよ．

解答　厚さの中央線が囲む面積は$S=\pi D^2/4$であるので，薄肉断面の式から，せん断応力τは

$$\tau=\frac{2T}{\pi D^2t}.$$

厳密な式によるねじりの最大せん断応力τ_{max}は

$$\tau_{max}=\frac{T}{Z_p}=\frac{16TD_1}{\pi(D_1^4-D_2^4)}=\frac{2T}{\pi D^2t}\frac{D(D+t)}{D^2+t^2}.$$

以上から$(\tau_{max}-\tau)/\tau_{max}$を求めると

$$\frac{\tau_{max}-\tau}{\tau_{max}}=1-\frac{D^2+t^2}{D(D+t)}=1-\frac{1+(t/D)^2}{1+t/D}$$

となり，この式に種々のt/Dの値を代入すると$(\tau_{max}-\tau)/\tau_{max}$の値は

$t/D=0.1$　　$(\tau_{max}-\tau)/\tau_{max}=0.082$

$t/D=0.05$　　$(\tau_{max}-\tau)/\tau_{max}=0.045$

$t/D=0.025$　　$(\tau_{max}-\tau)/\tau_{max}=0.024$

$t/D=0.01$　　$(\tau_{max}-\tau)/\tau_{max}=0.010$

となる．■

> 解説：薄肉断面の式による応力は厳密な値より常に小さいが，厚さが中央線の直径に比べて薄くなる（t/Dが小さくなる）と共に差は小さくなる．$t/D=0.1$で約8%の差が大きいか小さいかは微妙であるが，$(\tau_{max}-\tau)/\tau_{max}$の値はほぼ$t/D$の値程度であるので，薄肉断面の式で$\tau$を求めておいて$\tau_{max}$を見積もることはそう難しいことでもない．

> **基本例題3.20**　横断面が図3.26のような薄肉閉断面棒にねじりモーメント$T=500\ Nm$が作用する．ねじりのせん断応力を求めよ．

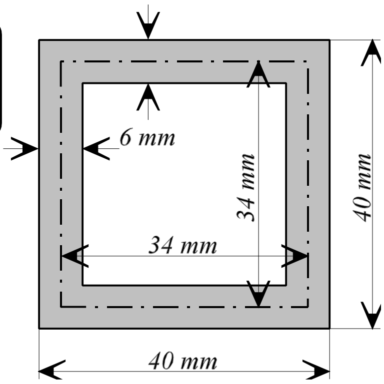


図3.26

解答　厚さの中央線は一辺が34 mmの正方形で$S=1.156\times10^{-3}\ m^2$．厚さ$t=6\ mm$．公式から，ねじりのせん断応力は

$$\tau=\frac{T}{2St}=\frac{500}{2\times1.156\times10^{-3}\times6\times10^{-3}}=36.1\ MPa.$$

■

発展例題3.21　横断面が図3.27のような二つの薄肉閉断面棒1)，2)にねじりモーメントT=500 Nmが作用する．ねじり応力を求めよ．

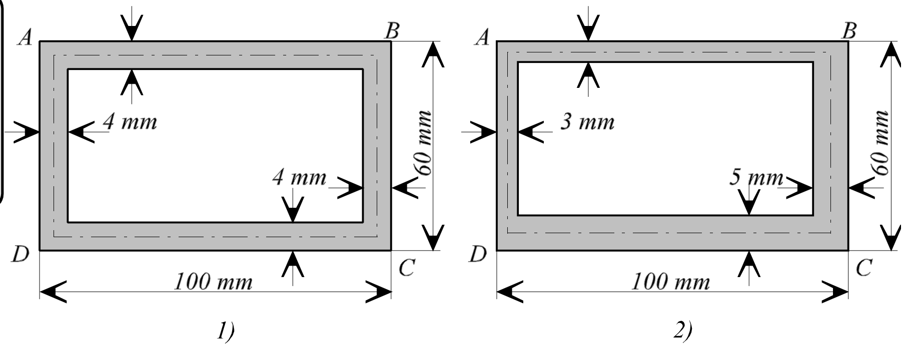


図3.27

解　答　　1）　$S=5.376\times10^{-3}\ m^2$，$t=4\times10^{-3}\ m$であるから，

$$\tau=\frac{500}{2\times5.376\times10^{-3}\times4\times10^{-3}}=11.7\ MPa$$

2）$S=5.376\times10^{-3}\ m^2$で1）と同じであるが，厚さが3 mmと5 mmの辺があるので，せん断応力は

$$\tau_{AB}=\tau_{AD}=\frac{500}{2\times5.376\times10^{-3}\times3\times10^{-3}}=15.5\ MPa,\quad \tau_{BC}=\tau_{CD}=\frac{500}{2\times5.376\times10^{-3}\times5\times10^{-3}}=9.30\ MPa$$

である．■

発展例題3.22　発展例題3.21の二つの薄肉閉断面棒について，単位長さあたりのねじり角を求めよ．横弾性係数をG=80GPaとする．

指針　横弾性係数Gが一定なので**基本事項3**の$d\varphi/dx$は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{4S^2}\oint\frac{1}{Gt}ds=\frac{T}{4S^2G}\oint\frac{1}{t}ds$$

から計算する．

解答　1）厚さはすべての辺で$t=4\times10^{-3}\ m$で厚さの中央線の長さは

$$2\times96\times10^{-3}+2\times56\times10^{-3}=304\times10^{-3}\ m$$

なので，

$$\oint\frac{1}{t}ds=\frac{304\times10^{-3}}{4\times10^{-3}}=76.0$$

ゆえに，単位長さあたりのねじり角は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{4S^2G}\oint\frac{1}{t}ds=\frac{500}{4\times(5.376\times10^{-3})^2\times80\times10^9}\times76=4.11\times10^{-3}\ rad/m.$$

2）厚さが3 mmと5 mmの辺があるので，

$$\oint\frac{1}{t}ds=\frac{152\times10^{-3}}{3\times10^{-3}}+\frac{152\times10^{-3}}{5\times10^{-3}}=81.1$$

ゆえに，単位長さあたりのねじり角は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{4S^2G}\oint\frac{1}{t}ds=\frac{500}{4\times(5.376\times10^{-3})^2\times80\times10^9}\times81.1=4.39\times10^{-3}\ rad/m.$$

■

発展例題3.23　図3.27の二つの薄肉閉断面棒の辺ABとCDの部分の横弾性係数がG=200 GPaで辺BCとDAの部分の横弾性係数がG=80GPaである．単位長さあたりのねじり角を求めよ．ねじりモーメントをT=500 Nmとする．

指針　基本事項3の$d\varphi/dx$の式の中の一周積分は

$$\oint\frac{1}{Gt}ds=\frac{s_{AB}}{G_{AB}t_{AB}}+\frac{s_{BC}}{G_{BC}t_{BC}}+\frac{s_{CD}}{G_{CD}t_{CD}}+\frac{s_{DA}}{G_{DA}t_{DA}}$$

から計算する．

解答　1）Gtは辺ABとCDの部分では

$$G_{AB}t_{AB}=G_{CD}t_{CD}=200\times10^{9}\times4\times10^{-3}=800\times10^{6}\ N/m\,,$$

辺BCとDAの部分では

$$G_{BC}t_{BC}=G_{DA}t_{DA}=80\times10^{9}\times4\times10^{-3}=320\times10^{6}\ N/m$$

となるので，

$$\oint\frac{1}{Gt}ds=\frac{2\times96\times10^{-3}}{800\times10^{6}}+\frac{2\times56\times10^{-3}}{320\times10^{6}}=0.59\times10^{-9}\ N/m^{2}.$$

ゆえに，単位長さあたりのねじり角は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{4S^{2}}\oint\frac{1}{Gt}ds=\frac{500}{4\times(5.376\times10^{-3})^{2}}\times0.59\times10^{-9}=2.55\times10^{-3}\ rad/m.$$

2）厚さが3 mmと5 mmの辺があるので，Gtは各部で

$$G_{AB}t_{AB}=200\times10^{9}\times3\times10^{-3}=500\times10^{6}\ N/m\,,$$

$$G_{BC}t_{BC}=80\times10^{9}\times5\times10^{-3}=400\times10^{6}\ N/m\,,$$

$$G_{CD}t_{CD}=200\times10^{9}\times5\times10^{-3}=1000\times10^{6}\ N/m\,,$$

$$G_{DA}t_{DA}=80\times10^{9}\times3\times10^{-3}=240\times10^{6}\ N/m$$

となるので，

$$\oint\frac{1}{Gt}ds=\frac{96\times10^{-3}}{500\times10^{6}}+\frac{96\times10^{-3}}{1000\times10^{6}}+\frac{56\times10^{-3}}{400\times10^{6}}+\frac{56\times10^{-3}}{240\times10^{6}}=0.661\times10^{-9}\ N/m^{2}.$$

ゆえに，単位長さあたりのねじり角は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{4S^{2}}\oint\frac{1}{Gt}ds=\frac{500}{4\times(5.376\times10^{-3})^{2}}\times0.661\times10^{-9}=2.85\times10^{-3}\ rad/m.$$

■

ねじりモーメントに関する補足

本章で問題にしているねじりモーメントは棒に発生するねじりモーメントである．ねじりモーメントの直感的イメージは図3.1であるが，図3.1は外力のねじりモーメントを表している．イメージがなかなかつかない例としては，たとえば，**基本例題3.07**で棒の途中の点CにはたらいているねじりモーメントT_Cである．T_Cは外力のねじりモーメントなので，棒の途中に剛体棒が出ていてその棒に図3.1のように力がはたらいてねじりモーメントがつくられていると考えればよい．一方，同例題のT_{AC}とT_{CB}は内力のねじりモーメントなので，AC部分とCB部分に発生しているねじりのせん断応力（せん断応力はもちろん内力です）がつくるモーメント．それぞれの部分に発生しているねじりのせん断応力をτ_{AC}とτ_{CB}で表すと，棒の中心からの距離をr，面積にわたる積分を$\int_A \cdots dA$で表すと

$$T_{AC}=\int_A \tau_{AC} r dA,\quad T_{CB}=\int_A \tau_{CB} r dA$$

である．これら内力のねじりモーメントと外力のねじりモーメントT_Cとの間でモーメントのつりあい式をつくることになる．

さて，第1章で，力のつりあいを考える際はひたすら内力が正であると仮定すればよいと述べた．ねじりの場合も同じで，図3.3の左図のように二重矢印線が考えている面の外に向かうねじりモーメントが正のねじりモーメントであるから，**基本例題3.07**の場合は図3.12のように内力のねじりモーメントT_{AC}とT_{CB}が共に正であると仮定することになる．この図を参照して得られるつりあい式は，右向きの二重矢印線に正の符号をつけて考えて$-T_{AC}+T_{CB}+T_C=0$となり，この式から

$$T_{AC}-T_{CB}=T_C$$

が得られる．これは，第2章の**基本例題2.01**の力のつりあいと類似の関係式である．この点は，**基本例題3.07**の解説1と2で述べた．

ついでに，変形について補足しておこう．ねじりの場合の変形は基本的に角度変化である．ところが，角度変化が二つあるからややこしい．そう．一つは軸線に平行な直線の角度変化（図3.6左）で，もう一つは横断面の中心から半径方向に引いた直線の角度変化（図3.6右）である．図3.6左の角度変化がせん断ひずみになる．

せん断ひずみは，**基本例題1.13**の解説3に書いたように，角度変化である．ねじりのせん断ひずみの場合に当てはめると，円柱表面では図3.6を参照して

$$\gamma=\frac{弧b'b''の長さ}{線分a'b'の長さ}$$

である（曲面上の話なのでイメージしにくいが，図3.28のように円柱表面の極薄い層を平面に展開して考えるとわかりやすいかもしれない）．

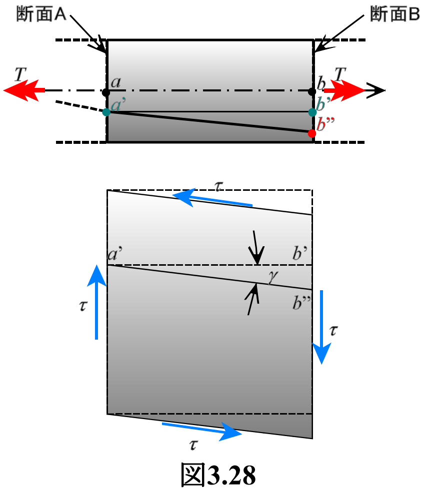


図3.28

材料力学ではねじりモーメントを受ける円柱の横断面（軸線に垂直な断面）はゆがむことなく平面を保ち，軸線を通る横断面上の直線は直線のままなので，図3.6の弧$b'b''$の長さは，Rを円柱表面の半径として，$R(\varphi_C-\varphi_A)$で表現され，円柱の中心からの距離rの点の移動量は$r(\varphi_C-\varphi_A)$となる．したがって，この円柱面のせん断ひずみは

$$\gamma(r)=\frac{弧b'b''の長さ}{線分a'b'の長さ}\times\frac{r}{R}=\frac{\varphi_C-\varphi_A}{線分a'b'の長さ}\times r$$

で表すことができ，$(\varphi_C-\varphi_A)/$(線分$a'b'$の長さ)を一般化して単位長さあたりのねじり角$d\varphi/dx$で表すと，

$$\gamma(r)=\frac{d\varphi}{dx}r$$

となる．ねじりのせん断応力は横弾性係数Gをかければ得られる．

第3章　演習問題

問題1．図1のように端Aが壁に固定され，端BにねじりモーメントTが作用する丸棒がある．端Aからxの点にあるCのAに対するねじり角，BのCに対するねじり角を求め，AのBに対するねじり角を求めよ．ねじり剛性をGI_pとする．（関連例題：**基本例題3.02**，**基本例題3.03**）

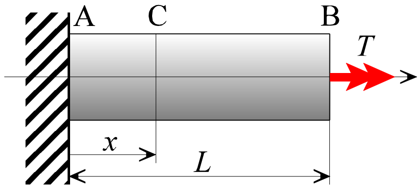


図1

Ans．$\varphi_C-\varphi_A=\dfrac{Tx}{GI_p}$，$\varphi_B-\varphi_C=\dfrac{T(L-x)}{GI_p}$，$\varphi_A-\varphi_B=-(\varphi_B-\varphi_A)=-\dfrac{TL}{GI_p}$．

問題2．図2のような，区間ごとに横弾性係数が異なる丸棒の

1）BのAに対するねじり角，

2）CのBに対するねじり角，

3）DのCに対するねじり角

を求めよ．（関連例題：**発展例題3.09**，問題1）

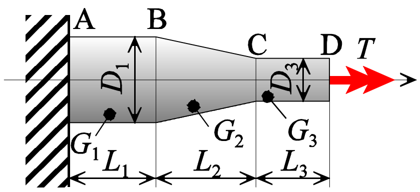


図2

Ans．1）$\varphi_B-\varphi_A=\dfrac{32}{\pi}\dfrac{TL_1}{G_1D_1^4}$，2）$\varphi_C-\varphi_B=\dfrac{32}{3\pi}\dfrac{D_1^2+D_1D_3+D_3^2}{D_1^3D_3^3}\dfrac{TL_2}{G_2}$，

3）$\varphi_D-\varphi_C=\dfrac{32}{\pi}\dfrac{TL_3}{G_3D_3^4}$．

問題3．図3のように途中CにねじりモーメントTが作用する丸棒がある．AC間とCB間に生ずるねじりモーメントを求めよ．ACの横弾性係数をG_1，CBの横弾性係数をG_2とし，断面二次極モーメントをI_pとする．（関連例題：**基本例題3.07**，**発展例題3.12**）

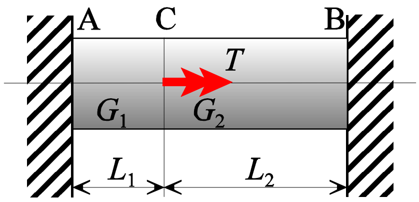


図3

Ans．$T_{AC}=\dfrac{G_1L_2}{G_1L_2+G_2L_1}T$，$T_{CB}=-\dfrac{G_2L_1}{G_1L_2+G_2L_1}T$．

問題4．図4のように棒が剛体壁で挟まれていて，$T_1=15$ kNm，$T_2=10$ kNmである．対応するフリーボディダイヤグラムを描き，端AとDに生ずる反ねじりモーメントT_AとT_Dを求めよ．（関連例題：第2章演習問題　問題2．）

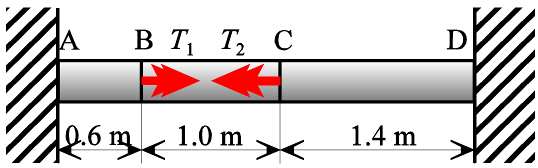


図4

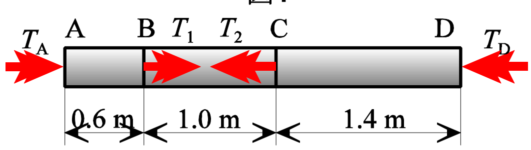


図5

Ans．フリーボディダイヤグラムの一例として図5のように考える．図5において，$T_A=-7.33$ kNm，$T_D=-2.33$ kNm．

問題5．図6のように同じ材料で長さの等しい直径D_0の中実丸棒と外径D_2，内径D_1の中空丸棒がある．中実丸棒の質量m_0の中空丸棒の質量m_1に対する比を次の条件の下で求め，比較せよ．

1)　ねじり剛性が等しいとき

2)　ねじりの最大せん断応力が等しいとき

ヒント：$n=D_2/D_0>1$とおくと

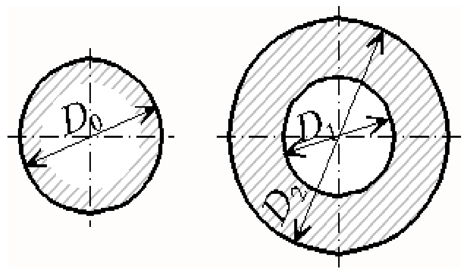


図6

1）の場合$D_1^2=\sqrt{n^4-1}D_0$（断面二次極モーメントが等しい），2）の場合

$D_1^2=\sqrt{n^4-n}D_0$（ねじりの断面係数が等しい条件から）．これらを使って質量比$\dfrac{m_0}{m_1}=\dfrac{D_0^2}{D_2^2-D_1^2}$を$n$を使って表す．

Ans. 1）$\dfrac{m_0}{m_1}=n^2+\sqrt{n^4-1}$　2）$\dfrac{m_0}{m_1}=n+\sqrt{n^2-\dfrac{1}{n}}$

$n>1$なので，いずれの場合も$m_0>m_1$となるので中実丸棒の質量が大きい．

問題6．問題5で，中実丸棒と中空丸棒の質量が等しい．このとき，

1)　中空丸棒のねじり剛性GI_{p2}の中実丸棒のねじり剛性GI_{p1}に対する比

2)　中空丸棒のねじりの最大せん断応力τ_{max2}の中実丸棒のねじりの最大せん断応力τ_{max1}に対する比

を求めよ．

ヒント：材料が同じで長さも等しいから，質量が等しい条件は断面積が等しいことと同じ．$n=D_2/D_0>1$とすると，断面積が等しい条件から$D_1^2=(n^2-1)D_0^2$となることを利用する．

Ans. 1）$\dfrac{GI_{p2}}{GI_{p1}}=2n^2-1$　　2）$\dfrac{\tau_{max2}}{\tau_{max1}}=\dfrac{n}{2n^2-1}$

$n>1$なので，同じ質量なら，中空丸棒のねじり剛性は中実丸棒のねじり剛性より大きく，ねじりの最大せん断応力は中空丸棒のほうが小さい．

問題7．図7のように，半径r_1の円筒Aと半径r_2の円筒Bが共に同じ軸Oまわりに回転する．Bに巻かれたケーブルC2を引いてAに巻かれたケーブルC1で重さP Nの物体を引き上げる．ケーブルC2を引くために半径r_3の軸Cを回転数n_C rpmで回転させる．必要な動力を求める式を導け．

ヒント：ケーブルC1の上昇速度をv_1とすると，必要な動力は$W=Pv_1$．v_1を軸Cの回転数n_C rpmを用いて表して式を導く．

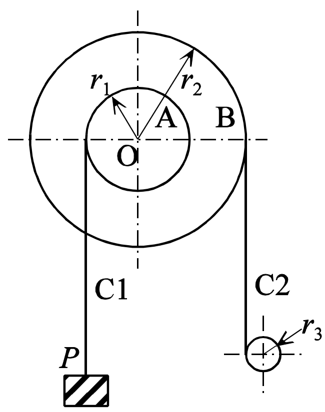


図7

Ans. $W=\frac{2\pi}{60}n_C\frac{r_1 r_3}{r_2}P$

問題8．問題7で，$P=50\,kN$，$r_1=50\,mm$，$r_2=200\,mm$，$r_3=10\,mm$，$n_C=5\,rpm$である．必要な動力の値を計算せよ．また，Aの回転数n_Aは何 rpmになるか．

Ans. 必要な動力は問題7．の答えの式に数値を代入して$W=65.5\,Nm/s, W$．Aの回転数は，CとBの周速度が等しいこととAとBが一緒に回転することから$n_A=\frac{r_3}{r_2}n_C=0.25\,rpm$．

問題9．問題7で，Aの回転数を$n_A=5\,rpm$にしたい．必要な動力の値はどれだけか．また，軸Cの許容せん断応力$\tau_a=60\,MPa$である．軸Cは耐えられるか．$P=50\,kN$，$r_1=50\,mm$，$r_2=200\,mm$，$r_3=10\,mm$とする．

Ans. 問題8．の答えから逆に$n_C=\frac{r_2}{r_3}=100\,rpm$になり，問題7．の答えの式を用いて$W=1.31\,kNm/s, kW$．または，$W=\frac{2\pi}{60}n_A r_1 P$から計算してもよい．ねじりモーメントは$T=\frac{60}{2\pi n_C}W$から計算できるから，軸Cに生ずるねじりの最大せん断応力は$\tau_{\max}=68.8\,MPa$となり，軸Cの許容せん断応力を超える．

解説：さて，困った．許容せん断応力$\tau_a=60\,MPa$に対してねじりの最大せん断応力$\tau_{\max}=68.8\,MPa$は極端に大きいとは言えないため微妙である．このような場合，定まった答えがないものと考えるほうがよいかもしれない．$\tau_a>\tau_{\max}$を重視するなら設計変更か運転条件の変更が必要であろうし，軸Cの材料変更や寸法変更でコストが高くなれば「このまま」も選択肢の一つかもしれない．

問題10．図8のように，長さLの一様な丸棒に，軸方向の単位長さあたり$t\,[Nm/m]$のねじりモーメントを一様に作用させた．Aに生ずるねじりモーメントT_Aを求めよ．また，Aからxの距離にある断面CのAに対するねじり角を求めよ．丸棒のねじり剛性をGI_pとする．

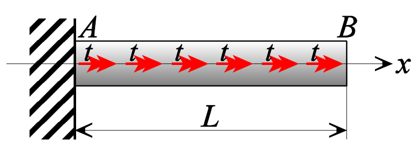


図8

ヒント：図9のように考えると，ねじりモーメントのつりあい（**発展例題1.17**の内力NをねじりモーメントT_xに，遠心力の項をtdxに，それぞれ置き換えたものと同じ）は

$$-T_x+\left(T_x+\frac{dT_x}{dx}dx\right)+tdx=0 \text{から} \frac{dT_x}{dx}=-t.$$

これを，$x=0$で$T_x=T_A$，$x=L$で$T_x=0$の条件で解いてT_Aを決める．ねじり

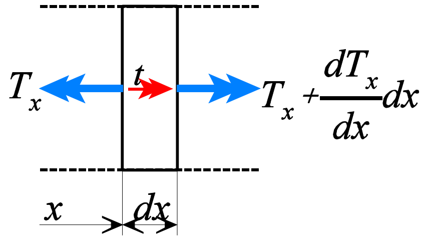


図9

角は$\dfrac{d\varphi}{dx}=\dfrac{T_x}{GI_p}$から求める.

Ans. $T_A=tL$. $\varphi_C-\varphi_A=\dfrac{t}{GI_p}\left(Lx-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

問題１１. 図１０のような薄肉中空四角形断面棒のねじり剛性の式をa, b, tを用いて表せ. 横弾性係数をGとする. また, $a=60\ mm$, $b=40\ mm$, $t=2\ mm$, $G=77\ GPa$である. ねじり剛性を求めよ. (関連例題:**発展例題3.22**)

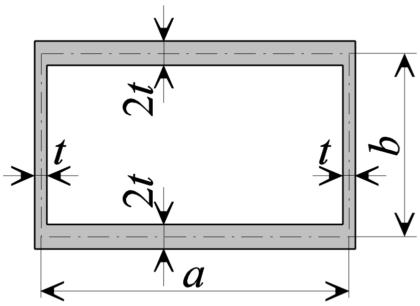


図10

Ans. $\dfrac{T}{d\varphi/dx}=\dfrac{4a^2b^2tG}{a+2b}=25.3\ kNm^2$

第4章　はりの応力とSFD，BMD

はりに発生する応力は，大別して，曲げ応力(bending stress)とせん断応力(shearing stress)の二種類である．せん断応力は第1章で述べたようにせん断力と関係し，せん断力はせん断応力の合力であるが，第1章で少し触れた曲げモーメントは曲げ応力の合モーメントである．

ここでは，外力を受けるはりに生ずる曲げ応力やせん断応力の計算法や曲げモーメントやはりのせん断力を求める方法について種々の例題を通して学ぶ．

はりの曲げ応力

基本事項1(曲げ応力)

1．曲げ応力σ_xは，はりの横断面に垂直に生ずるはりの軸線(x軸)方向の応力であり，次の式から計算することができる．

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y$$

ここで，Mは曲げモーメント(bending moment)，I_zは中立軸(neutral axis：ここでは，z軸)に関する断面二次モーメント，yは横断面内でz軸を基準に下向きにとられた座標である(図4.1)．

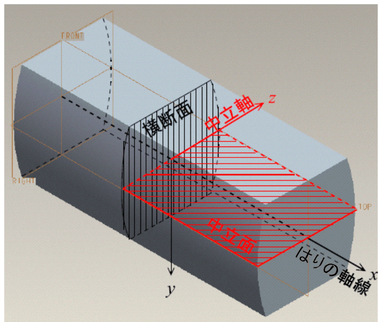


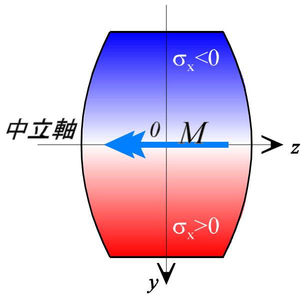
図4.1

2．曲げモーメントMは曲げ応力σ_xの合モーメントであり，曲げ応力の合力はゼロである．すなわち，

$$M = \int_A \sigma_x y dA\,,\quad N = \int_A \sigma_x dA = 0\,.$$

3．図4.2は図4.1の横断面を$x>0$の方から見た曲げ応力の分布のイメージをグラデーションで示す．色の濃い部分が応力の値が高い．曲げモーメントは第3章で導入した二重矢印線で表示している．

＊本来，モーメントもベクトル量で，二重矢印線の向きが座標軸の正の向きと一致するモーメントが正である．したがって，図4.2の曲げモーメントの定義は逆である．ここでは，y軸の正の向きに生ずるたわみを正にするので，このように定義している．



曲げ応力のイメージ

図4.2

> **基本例題4.01**　はりの軸線上のある点での曲げモーメントがM=500 [Nm]である．横断面形状が図4.3のような長方形であるとき，曲げ応力をyの関数として表せ．
>
> **指針**　長方形の断面二次モーメントの公式と曲げの公式を使う

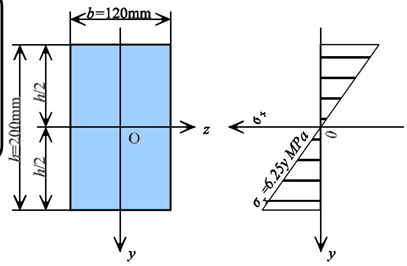


図4.3

解答　長方形断面の断面二次モーメントの公式から

$$I_z = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12}(120\times10^{-3})\times(200\times10^{-3})^3 = 80\times10^{-6}\ [m^4].$$

曲げ応力の公式にMとI_zの値を代入すると，

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y = \frac{500}{80\times10^{-6}} y = 6.25\times10^6 y\ [Pa] = 6.25y\ [MPa].$$

ただし，$-0.1\ [m] \le y \le 0.1\ [m]$である．■

注意：数値を代入して計算する際は，単位に注意しておくこと．応力の単位[Pa]（パスカルと読む）は[N/m^2]なので，長さの単位は常にメートル[m]にそろえておくと間違えにくい．また，何度も繰り返すが，単位[MPa]のMは「メガ」と読み10^6を表す．

基本例題4.02　図4.4のようなI型断面に生ずる曲げ応力をyの関数として表せ．$b_0=h_0=75$ [mm]，$h_1=63$ [mm]，$b_1=12$ [mm]とする．曲げモーメントは$M=500$ [Nm]であるとする．

指針　I型の断面二次モーメントの公式と曲げ応力の公式を使う．

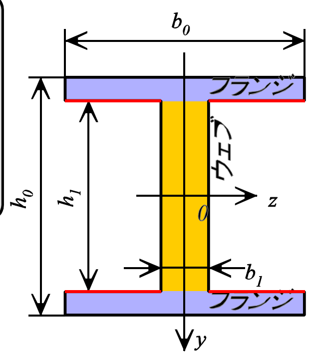


図4.4

解答　I型断面の断面二次モーメントは，公式

$$I_z=\frac{1}{12}b_0h_0^3-\frac{1}{12}(b_0-b_1)h_1^3$$

に所定の値を代入して，$I_z=1.324\times10^{-6}$ [m^4]．

　曲げ応力の公式にMとI_zの値を代入すると，

$$\sigma_x=\frac{500}{1.324\times10^{-6}}y=378\times10^6y\ [Pa]=378y\ [MPa].$$

ただし，-0.375 [m]$\leq y\leq 0.375$ [m]である．■

基本例題4.03　はりの軸線上のある点での曲げモーメントが$M=500$ [Nm]である．横断面形状が図4.5のような二等辺三角形であるとき，曲げ応力をyの関数として表せ．ただし，底辺の長さを120 [mm]，高さを150 [mm]とする．

指針　三角形の断面二次モーメントの公式と曲げ応力の公式を使う．

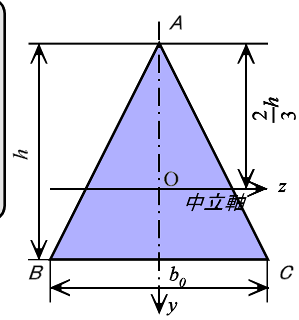


図4.5

解答　二等辺三角形断面の中立軸に関する断面二次モーメントの公式に$b_0=0.12$ [m]，$h=0.15$ [m]を代入すると，

$$I_z=\frac{1}{36}b_0h^3=\frac{1}{36}\times0.12\times0.15^3=11.25\times10^{-6}\ [m^4]$$

となる．

　曲げ応力の公式にMとI_zの値を代入すると，

$$\sigma_x=\frac{500}{11.25\times10^{-6}}y=44.4\times10^6y\ [Pa]=44.4y\ [MPa]$$

となる．ただし，-0.1 [m]$\leq y\leq 0.05$ [m]である．■

注意：この例題では，yの範囲は-0.1 [m]$\leq y\leq 0.05$ [m]である．

発展例題4.04　二等辺三角形断面の中立軸に関する断面二次モーメントの公式

$$I_z=\frac{1}{36}b_0h^3$$

を，中立軸（z軸）に平行で頂点Aを通る軸（Z軸とする）に関する断面二次モーメントと平行軸の定理を用いて求めよ（図4.6）．

指針　Z軸から下向きにy軸に沿ってY軸を取る．Z軸に関する断面二次モーメントは公式$I_Z=\int_A Y^2dA$で$dA=b(Y)dY$，$b(Y)=b_0Y/h$とすればよい．平行軸の定理は，図心のY座標を$\bar{Y}$として$I_Z=I_z+\bar{Y}^2A$．

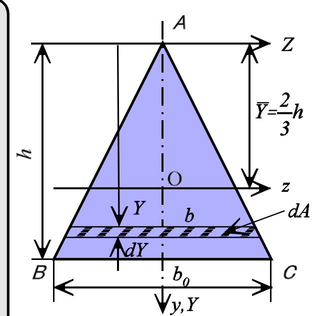


図4.6

解答　Z軸に関する断面二次モーメントは

$$I_Z=\int_A Y^2 dA=\int_0^h Y^2 b(Y)dY=\frac{b_0}{h}\int_0^h Y^3 dY=\frac{1}{4}b_0 h^3$$

このI_Zと$\overline{Y}=\frac{2}{3}h$，三角形の面積$A=\frac{1}{2}b_0 h$を平行軸の定理に代入すると，

$$\frac{1}{4}b_0 h^3=I_z+\left(\frac{2}{3}h\right)^2\times\frac{1}{2}b_0 h$$

この式からI_zが求められる．■

> 解説：三角形の図心はZ軸から下方$2h/3$にある．このような基本的な図形の図心の位置は覚えておいてもよい．式で求めるなら，
>
> $$\int_A YdA=\overline{Y}A$$
>
> を覚えておくとよい．いまの場合，
>
> $$\int_A YdA=\frac{b_0}{h}\int_0^h Y^2 dY=\frac{1}{3}b_0 h^2=\overline{Y}\frac{1}{2}b_0 h$$
>
> から$\overline{Y}=2h/3$を求めることができる．

基本例題4.05　基本例題4.03で，最大曲げ応力はどこに発生するか．
指針　曲げ応力はyの一次関数なので，曲げ応力の式にyの最大値と最小値を代入して，応力の絶対値が大きくなるyを見つける．

解答　曲げ応力の式が一次関数で，yの範囲は -0.1 [m]$\leq y\leq$0.05 [m]なので，

-4.44 [MPa]$\leq\sigma_x\leq$2.22 [MPa]

の範囲にある．したがって，最大曲げ応力は$y=-0.1$ [m]の面（図4.5の点A）に発生し，その大きさは -4.44 [MPa]である．■

> 解説1：この例題で問われていることは数学的な意味の最大値ではなく，強度設計をするための最大値であるので，-4.44 [MPa]になる．強度設計上は，正の応力(引張応力)と負の応力(圧縮応力)を区別せずに，絶対値の大きいほうの応力を許容応力と比較して設計することが多いが，引張応力と圧縮応力で個別に許容応力が定められることもある．

解説2：**基本例題4.05**で，0.1 $[m]$ に h_1 という文字を，0.05 $[m]$ に h_2 という文字を，それぞれ，当てることにすると，

$$\sigma_x|_{y=-h_1} = -\frac{M}{I_z}h_1 = -\frac{M}{I_z/h_1},\quad \sigma_x|_{y=h_2} = \frac{M}{I_z}h_2 = \frac{M}{I_z/h_2}$$

と表すことができる．ここで，

$$Z_1 = \frac{I_z}{h_1},\quad Z_2 = \frac{I_z}{h_2}$$

と表すと，はりの上下面に発生する曲げ応力は，

$$\sigma_x|_{y=-h_1} = -\frac{M}{Z_1},\quad \sigma_x|_{y=h_2} = \frac{M}{Z_2}$$

と表すことができ，Z_1，Z_2 を断面係数(section modulus)という．はりの上下面の曲げ応力だけを求めるためなら，断面係数を用いるほうが便利なことが多い．

基本例題4.06　基本例題4.05で断面係数の値を求めなさい．また，最大応力を求めなさい．
指針　断面係数を求め，曲げモーメントを断面係数で割って応力を計算する．

解答　h_1=0.1 $[m]$，h_2=0.05 $[m]$，I_z=11.25×10^{-6} $[m^4]$ であるから，断面係数はそれぞれ，

$$Z_1 = \frac{I_z}{h_1} = \frac{11.25\times10^{-6}\ [m^4]}{0.1\ [m]} = 112.5\times10^{-6}\ [m^3]$$

$$Z_2 = \frac{I_z}{h_2} = \frac{11.25\times10^{-6}\ [m^4]}{0.05\ [m]} = 225\times10^{-6}\ [m^3]$$

である．$y=-h_1=-0.1$ $[m]$ および $y=h_2=0.05$ $[m]$ での曲げ応力は，

$$\sigma_x|_{y=-h_1} = -\frac{M}{Z_1} = -\frac{500\ [Nm]}{112.5\times10^{-6}\ [m^3]} = -4.44\ [MPa]$$

$$\sigma_x|_{y=h_2} = \frac{M}{Z_2} = \frac{500\ [Nm]}{225\times10^{-6}\ [m^3]} = 2.22\ [MPa]$$

となり，h_1=0.1 $[m]$ に最大曲げ応力が発生し，大きさは −4.44 $[MPa]$ である．■

解説：この例題からわかるように，最大曲げ応力は断面係数の小さいほうに発生する．したがって，最大曲げ応力を計算するなら，断面係数を計算して小さいほうの断面係数で曲げモーメントを割ればよい．もう少し考えると，中立軸から遠い面（この場合，図4.5の点A）に最大曲げ応力が発生することがわかる．

発展例題4.07　基本例題4.03で求めた曲げ応力の式$\sigma_x=44.4y\ [MPa]$を用いて

1)　$N=\int_A \sigma_x dA=0\ [N]$, 2)　$M=\int_A \sigma_x y dA=500\ [Nm]$

を確かめよ.

指針　曲げ応力の式を代入して断面にわたって積分する. このとき, yの範囲に注意する. また, 幅bがyの関数になっていることにも注意する.

解答　幅の変化は

$$b(y)=\frac{b_0}{h}\left(y+\frac{2}{3}h\right)$$

で表される. ここで, $b_0=0.12\ [m]$, $h=0.15\ [m]$である.

まず, 微小面素$dA=b(y)dy$と$-0.1\ [m]\leq y\leq 0.05\ [m]$に注意して曲げ応力の式を代入すると,

$$N=\int_A \sigma_x dA=\int_{-0.1}^{0.05}\sigma_x b(y)dy=\int_{-0.1}^{0.05}44.4\times10^6 y\times\frac{0.12}{0.15}\times\left(y+\frac{2}{3}\times0.15\right)dy$$

$$=35.52\times10^6\times\int_{-0.1}^{0.05}\left(y^2+\frac{2}{3}\times0.15y\right)dy$$

$$=3.552\times10^6\times\left[\frac{1}{3}y^3+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times0.15y^2\right]_{-0.1}^{0.05}=0\ [N]$$

となり, 1)が確かめられた.

次に, 2)を確かめるために, 同じようにすると,

$$M=\int_A \sigma_x y dA=\int_{-0.1}^{0.05}44.4\times10^6 y\times\frac{0.12}{0.15}\times\left(y+\frac{2}{3}\times0.15\right)ydy$$

$$=35.52\times10^6\times\left[\frac{1}{4}y^4+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times0.15y^3\right]_{-0.1}^{0.05}$$

$$=35.52\times10^6\times\left[(1.563\times10^{-6}+4.167\times10^{-6})-(25.0\times10^{-6}-33.333\times10^{-6})\right]$$

$$=499.5\ [Nm]$$

となり, 2)が確かめられた. ■

解説:このように, 曲げ応力を計算した後で曲げモーメントを逆に求めておくと自分の計算が正しいかどうかを確認できる. なお, 上の例題でMの値が与えられた値500 $[Nm]$になっていないが, 数値を入れて計算する際によくあることなので, 気にしなくてよい.

注意:この例題では, 応力の単位は$[Pa]=[N/m^2]$, 長さの単位はメートル$[m]$に統一していることに注意しよう. また, $\sigma_x=44.4y\ [MPa]=44.4\times10^6 y\ [Pa]$として代入する習慣を付けよう.

基本事項2(はりのせん断応力)

1. せん断応力τ_{xy}は, はりの横断面に沿ったy方向の応力であり, 次の式から計算することができる.

$$\tau_{xy}=-\frac{F}{b(y)I_z}\int_{-h_1}^{y}b(\eta)\eta d\eta$$

ここで, 図4.7左に示すように, Fはせん断力(shearing force), $b(y)$(積分中では混同を避けるために, yの代わりにηを積分変数として用いて

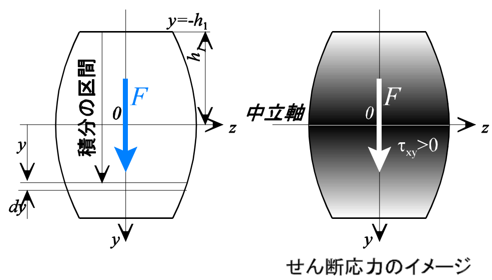


図4.7

いる)は横断面の幅の変化を表す関数，h_1ははりの横断面の中立軸から測った上部の高さである.

2．せん断力Fはせん断応力τ_{xy}の合力として定義される．すなわち，

$$F=\int_A \tau_{xy} dA$$

である.

3．図4.7左にせん断応力のイメージをグラデーションで示す．色の濃い部分が応力の値が高い.

基本例題4.08　はりの軸線上のある点でのせん断力が500 [N]である．横断面形状が図4.3のような長方形であるとき，せん断応力をyの関数として表せ.

指針　はりの上面のy座標を$-h/2$で表すと，せん断力をF，断面二次モーメントをI_zとして，せん断応力τ_{xy}は次式から計算することができる.

$$\tau_{xy}=-\frac{F}{2I_z}\left[y^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

解答　$I_z=80\times10^{-6}$ [m^4]，$h=0.2$ [m]，$F=500$ [N]を公式に代入して，

$$\tau_{xy}=-\frac{500}{2\times80\times10^{-6}}\left[y^2-\left(\frac{0.2}{2}\right)^2\right]=-3.125\times10^6\times(y^2-0.1^2)\ [Pa]$$

となる．ただし，$-0.1\ [m]\leq y\leq 0.1\ [m]$である．■

基本例題4.09　基本例題4.08で，最大せん断応力はどこに生じるか．また，その大きさを求めよ.

指針　τ_{xy}の式をyで微分してゼロにおいてyの値を計算する.

解答　$\tau_{xy}=-3.125\times10^6\times(y^2-0.1^2)$を$y$で微分してゼロにおくと，

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy}=-3.125\times10^6\times2y=0$$

から，τ_{xy}は$y=0$で最大になり，その最大値$\tau_{xy\max}$は，

$$\tau_{xy\max}=-3.125\times10^6\times(0^2-0.1^2)=31.25\ [kPa]$$

である．■

基本例題4.10　基本例題4.09で長方形断面の場合の最大せん断応力は

$$\tau_{xy\max}=\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

で表されることを示せ.

指針　長方形断面のせん断応力の公式に$y=0$を代入して最大せん断応力を求め，断面二次モーメントの式を代入して式を整える.

解答　長方形断面の場合，τ_{xy}は$y=0$で最大になるので，

$$\tau_{xy\max}=\frac{Fh^2}{8I_z}$$

となる．さらに，長方形断面の断面二次モーメント$I_z=bh^3/12$を代入すると

$$\tau_{xy\max}=\frac{Fh^2}{8I_z}=\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

が得られる．■

解説：　$$\tau_{xy\max}=\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

を長方形断面の最大せん断応力の公式として憶えておくと便利である．この式から，最大せん断応力は平均せん断応力F/bhの1.5倍であることがわかる．

基本例題4.11　はりの軸線上のある点でのせん断力が500 [N]である．せん断応力をyの関数として表せ．横断面形状は図4.8のようなI型で，$b_0=h_0=75$ [mm]，$h_1=63$ [mm]，$b_1=12$ [mm]とする．

指針　フランジ部とウェブ部で使う公式が異なり，次のようである

フランジ部（$-h_0/2\le y\le -h_1/2$，$h_1/2\le y\le h_0/2$）

$$\tau_{xy}^F=\frac{F}{2I_z}\left[\left(\frac{h_0}{2}\right)^2-y^2\right]$$

ウェブ部（$-h_1/2\le y\le h_1/2$）

$$\tau_{xy}^W=\frac{Fh_0^2}{8I_z}\left[\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2\left(1-\frac{b_0}{b_1}\right)+\frac{b_0}{b_1}-4\left(\frac{y}{h_0}\right)^2\right]$$

ここで，フランジ部の式には上添字F，ウェブ部の式には上添字Wを付けて区別している．

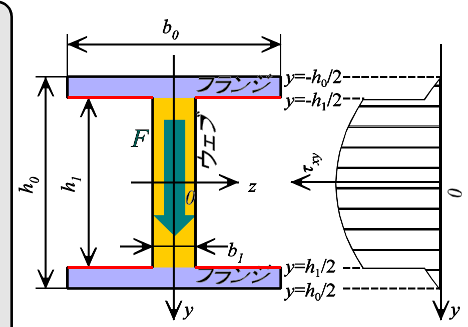


図4.8

解答　まず，断面二次モーメントは，公式

$$I_z=\frac{1}{12}b_0h_0^3-\frac{1}{12}(b_0-b_1)h_1^3$$

に所定の数値を代入すると，$I_z=1.324\times10^{-6}$ [m^4]となる．これを用いると，フランジ部では

$$\tau_{xy}^F=\frac{500}{2\times1.324\times10^{-6}}\left[\left(\frac{0.075}{2}\right)^2-y^2\right]$$

$$=188.8\times10^6\times(0.0375^2-y^2)\ [Pa]$$

であり，ウェブ部では

$$\tau_{xy}^W=\frac{500\times0.075^2}{8\times1.324\times10^{-6}}\left[\left(\frac{0.063}{0.075}\right)^2\times\left(1-\frac{0.075}{0.012}\right)+\frac{0.075}{0.012}-4\times\left(\frac{y}{0.075}\right)^2\right]$$

$$=265.5\times10^3\times\left[2.5465-4\times\left(\frac{y}{0.075}\right)^2\right][Pa]$$

である．応力の分布は図4.8の右のようになる．■

解説：$y=\pm h_1/2$ で $\tau_{xy}^F \neq \tau_{xy}^W$．フランジとウェブの境でせん断応力は不連続になる．

発展例題4.12　基本例題4.11の指針に挙げたI型断面はりのせん断応力を計算するための式を，フランジ部とウェブ部それぞれについて導け．

指針　ウェブ部のせん断応力の式を求める際には，積分の外の $b(y)$ は b_1 であり，積分の中の $b(\eta)$ はフランジ部では b_0，ウェブ部では b_1 であることに注意する．

解答　まず，フランジ部（$-h_0/2 \leq y \leq -h_1/2$）では，$b(y)=b_0$，$b(\eta)=b_0$ である．積分の下限の h_0 ははりの横断面の中立軸から測った上部の高さであり，図4.5では $h_0/2$ である．ゆえに，

$$\tau_{xy}^F = -\frac{F}{b(y)I_z}\int_{-h_1}^{y} b(\eta)\eta d\eta = -\frac{F}{b_0 I_z}\int_{-h_0/2}^{y} b_0 \eta d\eta = -\frac{F}{2I_z}\left[y^2 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^2\right]$$

となり，導けた．

ウェブ部（$-h_1/2 \leq y \leq h_1/2$）では，$b(y)=b_1$ である．積分範囲は $-h_0/2$ からウェブ部の考えている点までで，フランジ全体とウェブの一部を含む．そこで，積分を二つに分け，積分中の $b(\eta)$ は，フランジ全体（$-h_0/2 \leq \eta \leq -h_1/2$）では $b(\eta)=b_0$，ウェブ部の点（$-h_{012} \leq \eta \leq y(\leq h_1/2)$）までは $b(\eta)=b_1$ なので，

$$\tau_{xy}^W = -\frac{F}{b(y)I_z}\int_{-h_1}^{y} b(\eta)\eta d\eta = -\frac{F}{b_1 I_z}\left[\int_{-h_0/2}^{-h_1/2} b_0 \eta d\eta + \int_{-h_1/2}^{y} b_1 \eta d\eta\right]$$

から導くことができる．■

発展例題4.13　基本例題4.11に挙げた二つのせん断応力の式を用いて

$$b_0 \tau_{xy}^F\big|_{y=-h_1/2} = b_1 \tau_{xy}^W\big|_{y=-h_1/2}$$

が成り立つことを示せ．

指針　フランジ部，ウェブ部それぞれのせん断応力の式に $y=-h_1/2$ を代入してせん断応力を求め，フランジ部の式に b_0 を，ウェブ部の式に b_1 をそれぞれかけて等式が成立するか調べればよい．

解答　まず，フランジ部の式に $y=-h_1/2$ を代入し，b_0 をかけると次式が得られる．

$$b_0 \tau_{xy}^F\big|_{y=-h_1/2} = \frac{b_0 F}{2I_z}\left[\left(\frac{h_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{h_1}{2}\right)^2\right] = \frac{b_0 F}{8I_z}(h_0^2 - h_1^2)$$

次に，ウェブ部の式に $y=-h_1/2$ を代入し，b_1 をかけると

$$b_1 \tau_{xy}^W\big|_{y=-h_1/2} = \frac{b_1 F h_0^2}{8I_z}\left[\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2\left(1-\frac{b_0}{b_1}\right)+\frac{b_0}{b_1}-4\left(\frac{1}{h_0}\frac{-h_1}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{F h_0^2}{8I_z} b_0\left[1-\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2\right] = \frac{b_0 F}{8I_z}(h_0^2 - h_1^2)$$

が得られる．これらから

$$b_0\tau_{xy}^F|_{y=-h_1/2}=b_1\tau_{xy}^W|_{y=-h_1/2}$$

が示された．■

解説：**基本例題4.11**でみたように$y=\pm h_1/2$でせん断応力は不連続になるが，この例題はせん断応力の合力は連続であることを示している．ただし，この「合力」は$[N/m]$の単位を持っていて少し理解に苦しむ．ここでは，次のように理解しておこう．

力$[N]$は応力$[Pa=N/m^2]$×面積$[m^2]$であるので，もう一つ長さの単位を持つ量をかける必要がある．ここでかけるべき長さの単位を持つ量は，x軸方向の長さである．この例題では何も指定していないので，両辺にいわゆる「単位長さ」をかけていると考えればよいが，あえてx軸方向の長さをpで表すと，

$$(b_0p)\tau_{xy}^F|_{y=-h_1/2}=(b_1p)\tau_{xy}^W|_{y=-h_1/2}$$

となり，力の単位になる．両辺にpがあるので，これを落とすと**発展例題4.13**の答えになる．

ここで，τ_{xy}がx軸に垂直な面に生ずるy方向の応力であるのに，面積b_1pやb_0pはτ_{xy}が生じている面に垂直な面（中立面に平行な面）の面積であることに気付くだろう．とすると，応力はτ_{yx}のはず．「その通り！」なので，せん断応力の共役性$\tau_{yx}=\tau_{xy}$を用いて，

$$(b_0p)\tau_{yx}^F|_{y=-h_1/2}=(b_1p)\tau_{yx}^W|_{y=-h_1/2}$$

と表現するほうが自然である．

このような関係を使った設計問題を次の例題で考えてみよう．

発展例題4.14　図4.9のようにI型断面のはりの上下面に補強プレートを付ける．はりのフランジ部とプレートとをx軸方向に間隔（ピッチという）$p\,[m]$で配置したボルトで結合する．ボルトの断面積を決めよ．はりのせん断力はx軸方向に変化しない．

指針　まず，フランジ上面とプレートとの間にはたらくせん断力を求める．次に，ボルトのせん断応力を求め，許容せん断応力以下でなければならない条件からボルト断面積を決める．

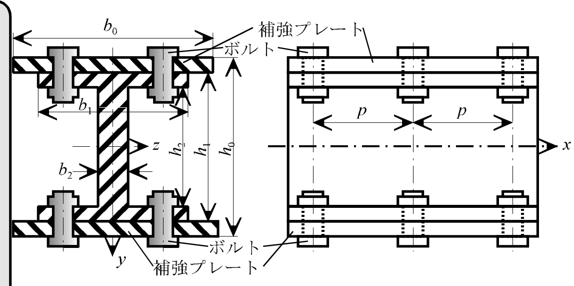


図4.9

解答　断面二次モーメントI_zとする．プレートのせん断応力の式に上添字P，フランジ部の式に上添字Fを付けて区別すると，プレートとフランジ境界面では

$$(b_0p)\tau_{yx}^P|_{y=-h_1/2}=(b_1p)\tau_{yx}^F|_{y=-h_1/2}$$

が成立しており，この力がボルト二本に作用するせん断力になる．（式の導出は**発展例題4.12**とその解説を参照）

いま，一本のボルトの断面積をA，許容せん断応力をτ_aで表すと，ボルト一本に発生するせん断応力はτ_a以下でなければならない．すなわち，

$$\frac{1}{2A}(b_0p)\tau_{yx}^P|_{y=-h_1/2}\leq\tau_a$$

でなければならない．この式をAについて書き直すと，ボルトの断面積Aは

$$A\geq\frac{1}{2\tau_a}(b_0p)\tau_{yx}^P|_{y=-h_1/2}$$

から計算することができる．■

解説1：x軸方向のボルト列の間隔はpなので，一本のボルトはそのボルトの前後$p/2$に発生するせん断力を負担する．そのため，プレート側のせん断応力$\tau^{P}_{yx}|_{y=-h_1/2}$に面積$b_0p$を乗ずるとボルトに作用するせん断力を計算できる．

解説2：使うボルトが決まっているとしてピッチpを決める場合

$$p \le \frac{2\tau_a A}{b_0 \tau^{P}_{yx}|_{y=-h_1/2}}$$

から決めればよい．

解説3：図4.10のような断面のはりでボルト②の断面積を決める場合，$y=\pm h_3/2$でのせん断応力ははりのせん断力をFで表して

$$\tau_{xy}|_{y=-h_3/2} = -\frac{F}{b(y)I_z}\int_{-h_1}^{y} b(\eta)\eta d\eta$$
$$= -\frac{F}{b_2 I_z}\left[\int_{-h_0/2}^{-h_1/2} b_0\eta d\eta + \int_{-h_1/2}^{-h_2/2} b_1\eta d\eta + \int_{-h_2/2}^{-h_3/2} b_2\eta d\eta\right]$$

で計算でき，ボルトにはたらくせん断力Qは

$$Q = b_2 p \tau_{xy}|_{y=-h_3/2}$$

から計算できる．

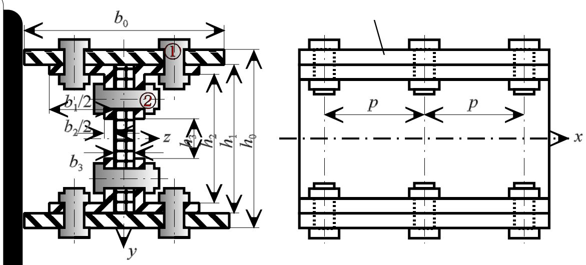


図4.10

発展例題4.15　図4.11のような横断面が長方形の棒①の上下面に厚さtの薄い板②を貼りあわせてはりとして用いる．このはりに生ずる曲げ応力の式を求めよ．棒①の材料のヤング率をE_1，板②の材料のヤング率をE_2で，それぞれ表す．

指針　棒①と板②との貼りあわせ面ではひずみが等しくなければならない．

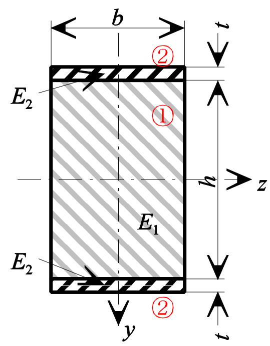


図4.11

解答　中立面の曲率半径をR，yの原点を横断面の中立軸に取り，下向きを正とする．このとき，はりの横断面に生じている軸線方向のひずみε_xは

$$\varepsilon_x = \frac{y}{R}$$

であり，曲げ応力σ_xはフックの法則から

$$-\frac{h}{2}-t<y<-\frac{h}{2}\ \text{で}\ \sigma_x = E_2\varepsilon_x = E_2\frac{y}{R}$$

$$-\frac{h}{2}<y<\frac{h}{2}\ \text{で}\ \sigma_x = E_1\varepsilon_x = E_1\frac{y}{R}$$

$$\frac{h}{2}<y<\frac{h}{2}+t\ \text{で}\ \sigma_x = E_2\varepsilon_x = E_2\frac{y}{R}$$

である．

曲げモーメントMはσ_xの合モーメントであるので

$$M = \int_A \sigma_x y dA.$$

この式で，$dA=bdy$とおき，曲げ応力の式を代入すると，

$$M=\int_{-h/2-t}^{-h/2}E_2\frac{y}{R}bydy+\int_{-h/2}^{h/2}E_1\frac{y}{R}bydy+\int_{h/2}^{h/2+t}E_2\frac{y}{R}bydy$$

となる．ここで，

$$I_{z1}=b\int_{-h/2}^{h/2}y^2dy\text{，}I_{z2}=b\int_{-h/2-t}^{-h/2}y^2dy+b\int_{h/2}^{h/2+t}y^2dy$$

で表すと，曲げモーメントは

$$M=\frac{1}{R}\left(E_1I_{z1}+E_2I_{z2}\right)$$

となる．

軸線方向のひずみε_xは

$$\varepsilon_x=\frac{y}{R}=\frac{M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}y$$

となり，曲げ応力の式はMを用いて

$$-\frac{h}{2}-t<y<-\frac{h}{2}\text{で}\ \sigma_x=E_2\varepsilon_x=\frac{E_2M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}y$$

$$-\frac{h}{2}<y<\frac{h}{2}\text{で}\ \sigma_x=E_1\varepsilon_x=\frac{E_1M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}y$$

$$\frac{h}{2}<y<\frac{h}{2}+t\text{で}\ \sigma_x=E_2\varepsilon_x=\frac{E_2M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}y$$

と書くことができる．■

解説1：弾性的性質の異なる複数の材料を貼りあわせて作ったはりのことを一般に組み合わせはり（Composite beam）というが，この種のはりの問題で重要な点は，はりの軸線方向のひずみが貼りあわせ部分で等しいこと．この例題では，$y=\pm h/2$で棒①のx軸方向のひずみと板②のx軸方向のひずみが等しい．ゆえに，はりの横断面内で$\varepsilon_x=y/R$．しかし，ヤング率が材料ごとに異なるので，曲げ応力は不連続である．

解説2：特に，棒①の上下面に板②を貼りあわせている．このような，板で棒を挟みこむような構造はサンドイッチ構造の一種である．サンドイッチ構造では，軽い心材（コア材．この例題では棒①）を引張や圧縮に強い板（この例題では板②）で挟んで一体にしたものである．コア材にハニカム（蜂の巣）構造を使用したものをハニカム・サンドイッチ構造という．

基本事項3（せん断力と曲げモーメント）

1．荷重区間（荷重と荷重の間）ごとにせん断力Fと曲げモーメントMを仮定して静力学的つりあい式を立てる．

2．断面でのせん断力は正（下向き）であると仮定し，その断面の左にあるすべての外力（下向きに＋符号，上向きに－符号）とのつりあいから求める（図4.11左）．

3．断面での曲げモーメントは正（反時計まわり）であると仮定し，その断面の左にあるすべて外力のモーメント（反時計まわりに＋符号，時計まわりに－符号）とのつりあいから求める．（図4.12右）

この表現は第1章の**基本例題1.29**のF_CとM_Cに対応する．

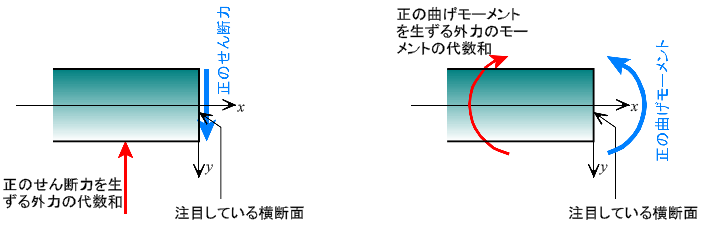
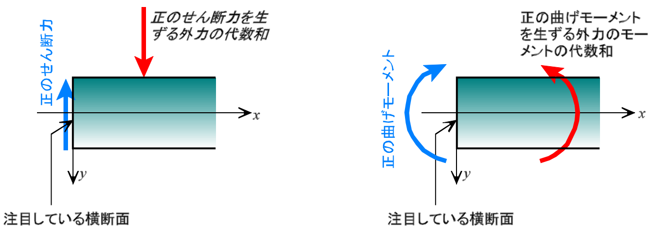


図4.11+1

本書では使わないが，次のような表現もある．

2’．せん断力は上向きを正とし，その断面の右にあるすべての外力（上向きに＋符号，下向きに－符号）とのつりあいから求める．

3’．曲げモーメントは時計まわりを正とし，その断面の右にあるすべての外力のモーメント（時計まわりに＋符号，反時計まわりに－符号）とのつりあいから求める．



この表現は第1章の**基本例題1.29**のF'_CとM'_Cに対応する．

4．憶えておくと便利な関係式として，

$$F = \frac{dM}{dx}$$

がある．普通，せん断力の式を積分して曲げモーメントの式を出すが，曲げモーメントの式を直接書き下せるなら，その式を微分すればせん断力の式が書ける．慣れるとこの方が簡単である．

はりの支持条件を表現するための本書の標記は図4.13右の通りである．意味は以下のとおりである．

(a)移動支点：角度変化と軸方向の移動が可能な支点．外力のうち，軸線に垂直な力の成分(横荷重)に対してのみ反力を生じ，上下移動は不可．

(b)回転支点：角度変化のみ可能な支点．はりに作用する力の垂直成分および水平成分に対して支点反力を生じ，上下左右の移動は不可．

(c)固定支点：角度変化も上下左右の移動もできない支点．はりに作用する力の垂直成分および水平成分に対して支点反力を生ずることに加えて，反モーメントとして固定モーメントも生ずる．

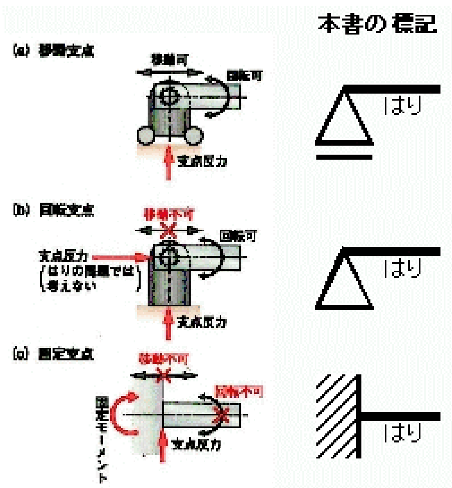


図4.11+2

基本事項4（せん断力線図と曲げモーメント線図）

1．せん断力線図（Shearing Force Diagram, 略してSFD）は，はりの軸線に沿ったせん断力の変化を表す線図のこと．

2．曲げモーメント線図（Bending Moment Diagram, 略してBMD）は，はりの軸線に沿った曲げモーメントの変化を表す線図のこと．

3．SFDとBMDで最大せん断力と最大曲げモーメントの大きさと位置を図的に探すことができる．

基本例題4.16　図4.14に示すはりのSFDとBMDを描け．$l=1$ [m]，　$a=0.4$ [m]，$P=1$ [kN]とする．

指針　せん断力と曲げモーメントの式を求めるには，

1. 荷重区間ごとにせん断力と曲げモーメントを仮定する．
2. 荷重区間ごとに静力学的つりあい式をたて，せん断力と曲げモーメントについて解く．

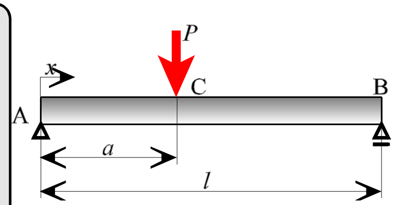


図4.11+3

解答　荷重区間はAC間とCB間の二つである．対応するフリーボディダイヤグラムは図4.15上である．

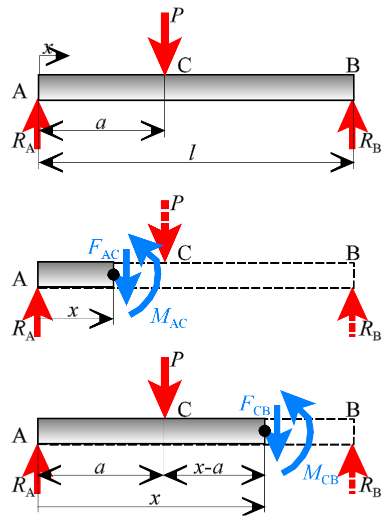


図4.11+4

支点Aの反力をR_A，AC間$(0<x<a)$のせん断力と曲げモーメントをF_{AC}とM_{AC}で表すと(図4.15中)，静力学的つりあい条件

$$-R_A+F_{AC}=0,\quad -R_Ax+M_{AC}=0$$

から，F_{AC}とM_{AC}は

$$F_{AC}=R_A,\quad M_{AC}=R_Ax.$$

CB間$(a<x<l)$ではF_{CB}とM_{CB}で表すと(図4.15下)，静力学的つりあい条件

$$-R_A+P+F_{CB}=0,$$

$$-R_Ax+P(x-a)+M_{CB}=0$$

から，F_{CB}とM_{CB}は

$$F_{CB}=R_A-P,\quad M_{CB}=R_Ax-P(x-a).$$

二つの支点$(x=0)$，B$(x=l)$では外力のモーメントが作用していないので，$M_{AC}|_{x=0}=0$，$M_{CB}|_{x=l}=0$でなければならない．$M_{AC}|_{x=0}=0$は満足され，$M_{CB}|_{x=l}=0$より，

$$M_{CB}|_{x=l}=R_Al-P(l-a)=0$$

が成り立ち，これから，R_Aは

$$R_A=\frac{l-a}{l}P.$$

所定の数値を代入すると，1 [kN]$=1000$ [N]を使って

$$R_A=\frac{l-a}{l}P=\frac{1-0.4}{1}\times1000=600\ [N],\quad R_B=P-R_A=400\ [N]$$

となり，各区間のせん断力と曲げモーメントは

$$F_{AC}=R_A=600\ [N],\quad F_{CB}=R_A-P=-400\ [N]$$

$$M_{AC}=R_Ax=600x\ [Nm],\quad M_{CB}=R_Ax-P(x-a)=600x-1000\times(x-0.4)\ [Nm]$$

として求めることができる．

以上の結果を元にSFDとBMDを描くと，図4.16のように描くことができる．この図から，最大せん断力はAC間に，最大曲げモーメントは点Cに生じ，値は，それぞれ，600 [N]と240 [Nm]である．■

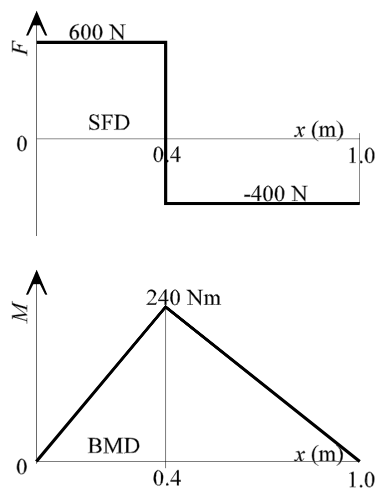


図4.11+5

解説1：この例題では，支点Aの反力R_Aは支点Bで曲げモーメントがゼロである条件から決まる．支点Bの反力R_Bは系全体の力のつりあい$P-(R_A+R_B)=0$から決まる．

解説2：**基本事項3**の4．を使って曲げモーメントの式を微分すると，AC間$(0<x<a)$のせん断力F_{AC}は

$$F_{AC}=\frac{dM_{AC}}{dx}=\frac{d}{dx}(R_A x)=R_A$$

CB間$(a<x<l)$でのせん断力F_{CB}は

$$F_{CB}=\frac{dM_{CB}}{dx}=\frac{d}{dx}[R_A x-P(x-a)]=R_A-P$$

というように求められる．

解説3：たとえば，M_{AC}とM_{CB}の式に注目すると，M_{CB}の式はM_{AC}の式に項$-P(x-a)$が加わっただけである．F_{AC}とF_{CB}の式についても同じことが言える．本章の類題を注意して観察しておこう．

解説4：$M_{CB}=R_A x-P(x-a)$は$P_A=P-aP/l$を代入して$M_{CB}=(1-x/l)Pa$と整理できるが，この演習書では整理した形の式は用いず，荷重が追加されるごとにその荷重の影響を加算していく方法をとる．その理由は，後の章で述べるように，たわみ角の式やたわみ関数を求める際に便利だからである．この章の例題で慣れておこう．

基本例題4.17　基本例題4.16のはりの横断面形状が幅b=24 [mm]，高さh=40 [mm]の長方形である．このはりに生ずる最大せん断応力と最大曲げ応力を求めよ．

指針　SFDとBMDからせん断力と曲げモーメントの最大値がわかるので，これらの値を最大せん断応力と最大曲げモーメントの式に代入して計算する．

解答　最大せん断応力τ_{xymax}は，公式

$$\tau_{xymax}=\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

にF_{AC}=600 [N]，b=24 [mm]，h=40 [mm]を代入して

$$\tau_{xymax}=\frac{3}{2}\frac{600}{0.024\times0.04}=937.5\times10^3\ [Pa]=938\ [kPa]$$

断面係数Zは

$$Z=\frac{I_z}{h/2}=\frac{bh^3}{12}\frac{2}{h}=\frac{bh^2}{6}=\frac{(0.024)\times(0.04)^2}{6}=6.4\times10^{-6}\ [m^3]$$

となるから，最大曲げ応力σ_{xmax}はM=240 [Nm]，$Z=6.4\times10^{-6}$ [m^3]を使って，

$$\sigma_{xmax}=\frac{M}{Z}=\frac{240}{6.4\times10^{-6}}=37.5\times10^6\ [Pa]=37.5\ [MPa]$$

となる．■

基本例題4.18　図4.17のはりのSFDとBMDを描け．a=0.2 m，b=0.5 m，c=0.3 m，P_1=200 N，P_2=400 Nとする．

指針　ここでは，まず各荷重区間での曲げモーメントの式を書き下し，それらを微分してせん断力の式を求める（**基本事項3**の4．）．

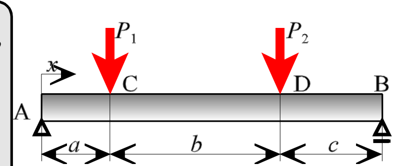


図4.11+6

解答　支点Aの反力を上向きにR_Aとすると，曲げモーメントの式は

AC間 $M_{AC}=R_A x$

CD間 $M_{CD}=R_A x-P_1(x-a)$

DB間 $M_{DB}=R_A x-P_1(x-a)-P_2(x-a-b)$

となる．せん断力の式はこれらを微分して

AC間 $F_{AC}=R_A$

CD間 $F_{CD}=R_A-P_1$

DB間 $F_{DB}=R_A-P_1-P_2$

である．

SFDとBMDを描くために支点Aの反力R_Aの式を求める．支点Bの右側にモーメントが存在しないので支点Bで曲げモーメントがゼロであることから，$x=a+b+c$で$M_{DB}=0$として

$$R_A=\frac{1}{a+b+c}[(b+c)P_1+cP_2]$$

所定の数値を代入するとR_A=280 Nとなる．これと所定の数値を用いるとSFDとBMDは図4.18のように描くことができる．■

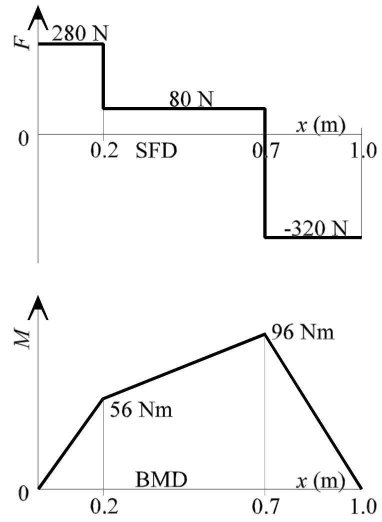


図4.11+7

基本例題4.19　図4.19のはりのSFDとBMDを描け．l=1 m，a=0.4 m，P=1 kNとする．

指針　**基本例題4.18**と同じ．

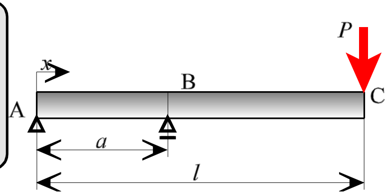


図4.11+8

解答　荷重区間はAB間とBC間の二つである．対応するフリーボディダイヤグラムは図4.20上である．

支点A，Bの反力をR_A，R_B，AB間$(0<x<a)$の曲げモーメントをM_{AB}(図4.20中)，BC間$(a<x<l)$でM_{BC}で表す(図4.20下)と，各区間でのモーメントのつりあい条件

AB間 $-R_A x+M_{AB}=0$，

BC間 $-R_A x-R_B(x-a)+M_{BC}=0$

から，曲げモーメントは

$M_{AB}=R_A x$，$M_{BC}=R_A x+R_B(x-a)$

となる．これらをxで微分すると，せん断力は

$F_{AB}=R_A$，$F_{BC}=R_A+R_B$

となる．

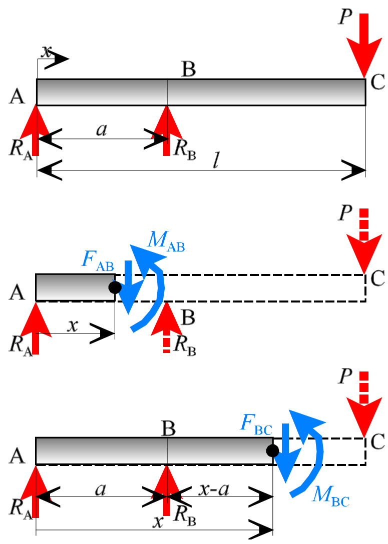


図4.11+9

支点A (x=0) と荷重点C (x=l) では外力のモーメントが作用していないので，$M_{AB}|_{x=0}=0$，$M_{BC}|_{x=l}=0$でなければならない．$M_{AB}|_{x=0}=0$は満足されている．$M_{BC}|_{x=l}=0$より，

$$M_{BC}|_{x=l}=R_A l+R_B(l-a)=0$$

が得られる．一方，系全体の力のつりあいは

$$-R_A-R_B+P=0$$

であり，以上二つの式から

$$R_A=-\frac{l-a}{a}P,\ R_B=\frac{l}{a}P$$

となる．

所定の数値を代入すると，1 [kN]=1000 [N]を使って

$$R_A=-\frac{l-a}{a}P=-\frac{1-0.4}{0.4}\times 1000=-1500\ [N],\ R_B=P-R_A=2500\ [N]$$

となり，各区間のせん断力は

$$F_{AB}=R_A=-1500\ [N],\ F_{BC}=R_A+R_B=1000\ [N]$$

各区間の曲げモーメントは

$$M_{AB}=R_A x=-1500x\ [Nm],$$

$$M_{CB}=R_A x+R_B(x-a)=-1500x+2500\times(x-0.4)\ [Nm]$$

として求めることができる．

以上の結果を元にSFDとBMDを描くと，図4.21のように描くことができる．この図から，最大せん断力はAB間に，最大曲げモーメントは点Bに生じ，値は，それぞれ，-1500 [N]と-600 [Nm]である．■

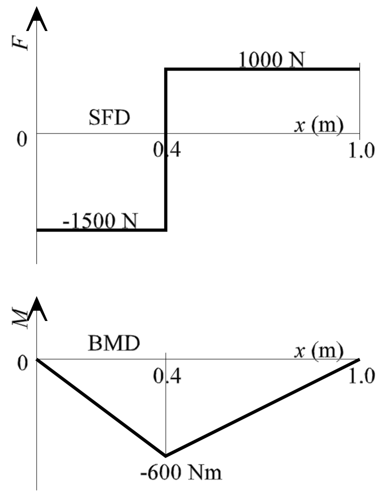


図4.11+10

基本例題4.20　図4.22に示す点CにモーメントM_Cが作用するはりのSFDとBMDを描け．l=1 [m]，a=0.4 [m]，M_C=1 [kNm]とする．

指針　基本例題4.17の指針と同じであるが，外力としてモーメントだけが作用している場合は，力の和がゼロであることに注意する．

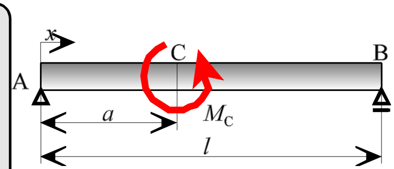


図4.11+11

解答　荷重区間はAC間とCB間の二つである．対応するフリーボディダイヤグラムは図4.23上である．

支点Aの反力をR_A，AC間 ($0<x<a$) の曲げモーメントをM_{AC}(図4.23中)，CB間 ($a<x<l$) でM_{CB}(図4.23下)で表すと，各区間でのモーメントのつりあい条件

AC間　$-R_A x+M_{AC}=0$，

CB間　$-R_A x+M_C+M_{CB}=0$

から，曲げモーメントは

$$M_{AC}=R_A x,\ M_{CB}=R_A x-M_C$$

となる．xで微分するとせん断力は

$$F_{AC}=R_A,\ F_{CB}=R_A$$

となり，はり全体で一定である．

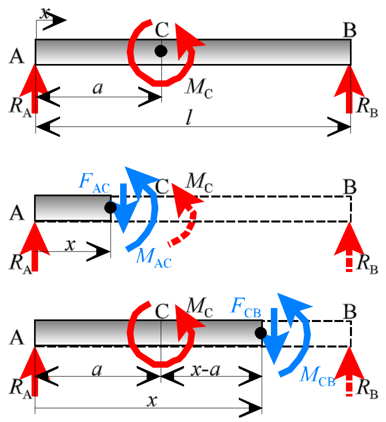


図4.11+12

二つの支点A，Bでは外力のモーメントが作用していないので，$M_{AC}|_{x=0}=0$，$M_{CB}|_{x=l}=0$でなければならない．$M_{AC}|_{x=0}=0$は満足されている．$M_{CB}|_{x=l}=0$から，

$$M_{CB}|_{x=l}=R_A l-M_C=0$$

となり，R_Aは次のように求められる．

$$R_A=\frac{M_C}{l}$$

支点反力R_Bは，系全体の力の和がゼロ，すなわち，$R_A+R_B=0$から，

$$R_B=-R_A$$

となる．所定の数値を代入すると，支点反力は

$$R_A=\frac{M_C}{l}=\frac{1000}{1}=1000\ [N]\ ,R_B=-R_A=-1000\ [N]$$

各区間のせん断力は

$$F_{AC}=F_{CB}=R_A=1000\ [N].$$

各区間の曲げモーメントは

$$M_{AC}=R_A x=1000x\ [Nm],$$

$$M_{CB}=R_A x-M_C=1000x-1000\ [Nm].$$

以上の結果を元にSFDとBMDを描くと，図4.24のように描くことができる．最大せん断力はAC間で，最大曲げモーメントは点Cに生じ，値は，それぞれ，1000 [N]と-600 [Nm]である．■

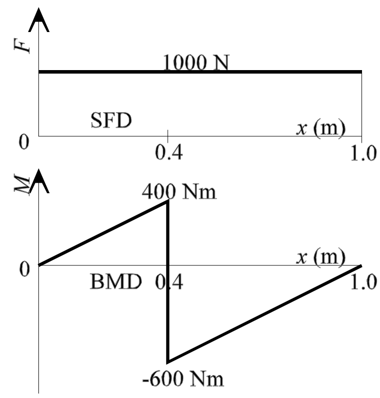


図4.11+13

基本例題4.21　基本例題4.20で，1) aを限りなくlに近づける(図4.25上)．SFDとBMDを描け．また，2) aを限りなく0に近づける(図4.25下)．SFDとBMDを描け．
指針　1) $a\to l$, 2) $a\to 0$としたときに残る式は何かを考える．

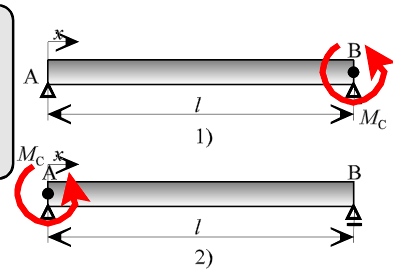


図4.11+14

解答　1) $a\to l$とすると，**基本例題4.20**のAC間の式のみ残り，全区間で，

$$F=R_A=\frac{M_C}{l}=1000\ [N],$$

$$M=R_A x=1000x\ [Nm].$$

2) $a\to 0$とすると，同例題のCB間の式のみ残るから，全区間で，

$$F=R_A=\frac{M_C}{l}=1000\ [N],$$

$$M=R_A x-M_C=1000x-1000\ [Nm].$$

なお，支点反力R_Bは，力の和がゼロ，すなわち，$R_A+R_B=0$から，

$$R_B=-R_A=-1000\ [N]$$

となる．SFDとBMDは図4.26のようである．■

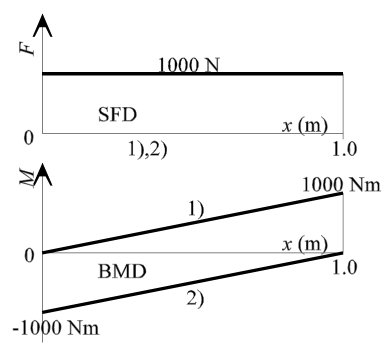


図4.11+15

解説：1) は支点Bにのみ反時計回りのモーメントM_Cが作用する場合であり，2) は支点Aにのみ反時計回りのモーメントM_Cが作用する場合である．

基本例題4.22　両端支持はりの支点Aに時計回りのモーメントM_A，Bに反時計回りのモーメントM_Bが作用する(図4.27)．SFDとBMDを描け．$M_A>M_B$とする．

指針　**基本例題4.21**の2)の解答の式で$M_C=-M_A$とおいた式と1)の解答の式で$M_C=M_B$とおいた式を加える．

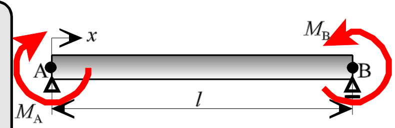


図4.11+16

解答　支点Aにのみ時計回りのモーメントM_Aが作用する場合，**基本例題4.21**の結果の2)の式で$M_C=-M_A$とおくと，

$$F=-\frac{M_A}{l},\quad M=-\frac{M_A}{l}x+M_A.$$

支点Bにのみ反時計回りのモーメントM_Bが作用する場合，**基本例題4.21**の結果の1)の式で$M_C=M_B$と置くと，

$$F=\frac{M_B}{l},\quad M=\frac{M_B}{l}x.$$

M_AとM_Bが同時に作用しているので，二つの式を足すと，求める式は

$$F=-\frac{M_A-M_B}{l},\quad M=-\frac{M_A-M_B}{l}x+M_A$$

となる．なお，支点反力は

$$R_A=-\frac{M_A-M_B}{l},\quad R_B=-R_A=-\frac{M_A-M_B}{l}$$

である．SFDとBMDは図4.28のようである．■

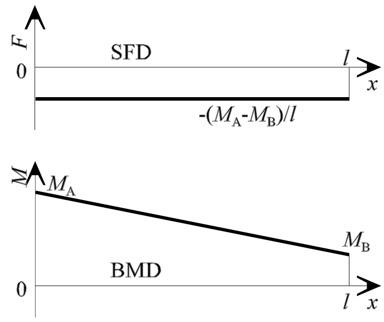


図4.11+17

解説1：ここでは，**基本例題4.21**で調べたような二つの解を使って新たな解を作った．このような方法を解の**重ね合わせ**という．

解説2：重ね合わせを使うと，たとえば，図4.29のはりの場合，曲げモーメントの式は，**基本例題4.21**の2)，**基本例題4.16**，**基本例題4.20**の結果を使って，

AC間　$M_{AC}=M_A+R_Ax$　(**基本例題4.21**の2))

CD間　$M_{CD}=M_A+R_Ax-P(x-a)$　(＋**基本例題4.16**)

DB間　$M_{DB}=M_A+R_Ax-P(x-a)-M_D$　(＋**基本例題4.20**)

のように式を書き下すことができる．反力は$x=l$で$M_{DB}=0$から

$$R_A=\frac{l-a}{l}P+\frac{M_A}{l}-\frac{M_D}{l},$$

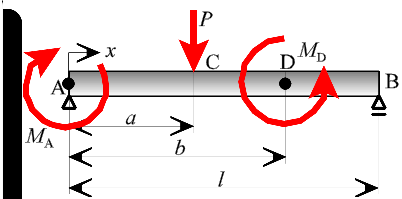


図4.11+18

基本例題4.23 図4.30に示す等分布荷重を受けるはりのSFDとBMDを描け．ただし，l=1 [m]，a=0.4 [m]，q=1 [kN/m]とする．

指針 等分布荷重の場合，考えている位置xまでの合力とその位置での合力のモーメントをどのように求めるかがポイント．

荷重の大きさは，分布荷重は単位長さあたりの力なので，分布荷重の始点から考えている点までの合力として求めることができ，その合力を含めた外力とせん断力との間でつりあい式を作ればよい．

分布荷重によるモーメントは，分布荷重の合力の作用線と考えている点間の距離を求め，合力にその距離を掛けることで求めることができる(図4.31)．求めた合力のモーメントを含めた外力のモーメントと曲げモーメントとの間でつりあい式を作ればよい．

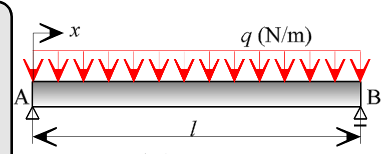


図4.11+19

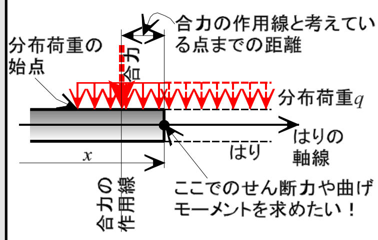


図4.11+20

解答 支点Aの反力をR_Aで表す．系のフリーボディダイヤグラムは図4.32上である．

分布荷重の合力は下向きにqx．合力の作用線と考えている横断面との距離は$x/2$で，分布荷重のモーメントは反時計回りに$qx^2/2$(図4.32下)．曲げモーメントをMで表して，モーメントのつりあい条件

$$-R_A x+\frac{1}{2}qx^2+M=0$$

から，曲げモーメントの式は

$$M=R_A x-\frac{1}{2}qx^2$$

となり，せん断力Fの式はMをxで微分して，

$$F=R_A-qx$$

である．

R_Aは，$M|_{x=l}=0$から，

$$R_A=\frac{1}{2}ql$$

となり，所定の数値を代入すると，

$$R_A=500\ [N],\ F=500-1000x\ [N],$$

$$M=500x-500x^2\ [Nm]$$

となる．SFDとBMDを描くと，図4.33のように描くことができる．この図から，最大せん断力は支点A，Bで生じ500 [N]．最大曲げモーメントは$x=l/2=0.5$ [m]で生じ125 [Nm]である．■

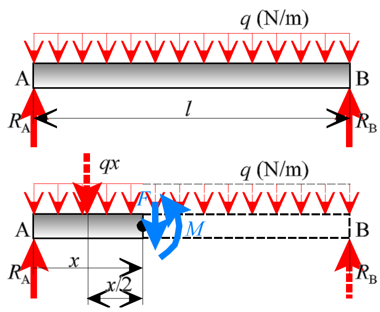


図4.11+21

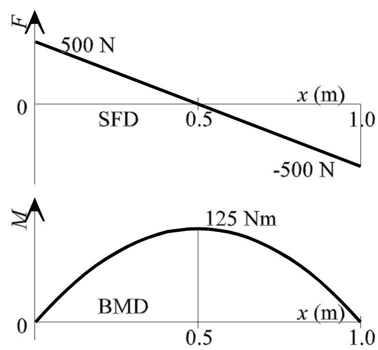


図4.11+22

解説：分布荷重というと「圧力」が思い浮かぶ(図4.34左)が，はりの問題では，実際のはりを軸線方向にのみ長さの単位を持つものとしてモデル化するので，分布荷重が圧力のように[N/m^2]の単位を持つと都合が悪い．そこで，単位面積あたりの力[N/m^2]にはりのはばの寸法[m]を掛けた単位長さあたりの荷重[N/m](図4.34右)を分布荷重(distributed load)として用いる．はりの自重を考慮して解析する場合は，はりの材料の質量密度[kg/m^3]×断面積[m^2]×重力加速度[m/s^2]を計算して分布荷重とする．ちなみに，1[N]=1[$kg{\cdot}m/s^2$]に注意．

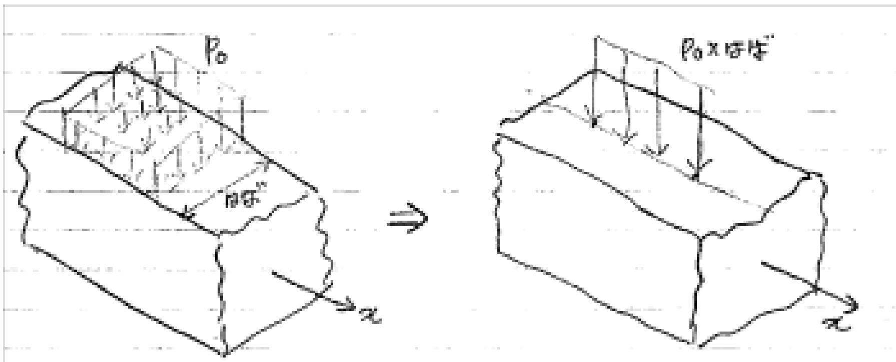


図4.11+23

発展例題4.24　図4.35に示すはりのSFDとBMDを描け．l=1 [m]，a=0.4 [m]，q=1.67 [kN/m]とする．

指針　AC間では分布荷重が作用していないことに注意．

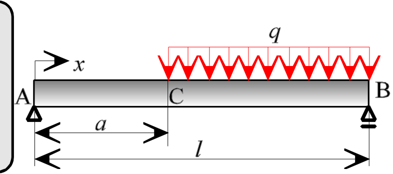


図4.11+24

解答　荷重区間はAC間とCB間の二つで，それぞれの荷重区間でのフリーボディダイヤグラムは図4.36である．

支点Aの反力をR_A，AC間$(0<x<a)$の曲げモーメントをM_{AC}で表すと，

$$M_{AC}=R_A x.$$

CB間$(a<x<l)$の曲げモーメントをM_{CB}で表すと，モーメントのつりあい条件

$$-R_A x+\frac{1}{2}q(x-a)^2+M_{CB}=0$$

から，M_{CB}は

$$M_{CB}=R_A x-\frac{1}{2}q(x-a)^2.$$

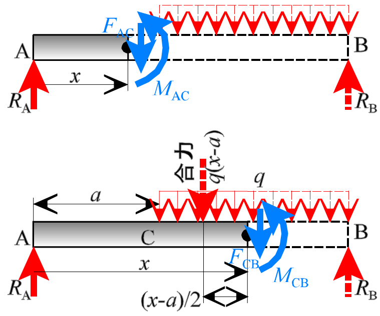


図4.11+25

各区間でのせん断力は，M_{AC}とM_{CB}をxで微分して，

$$F_{AC}=R_A,\ F_{CB}=R_A-q(x-a)$$

となる．

二つの支点A，Bでは外力のモーメントが作用していないので，支点A，Bで$M_{AC}|_{x=0}=0$，$M_{CB}|_{x=l}=0$でなければならない．$M_{AC}|_{x=0}=0$であり，$M_{CB}|_{x=l}=0$から，R_Aは

$$R_A=\frac{(l-a)^2}{2l}q.$$

所定の数値を代入すると，支点反力は

$$R_A=\frac{(l-a)^2}{2l}q=\frac{(1-0.4)^2}{2\times1}\times1670=300.6\ [N],\ R_B=q(l-a)-R_A=701.4\ [N]$$

となり，各区間のせん断力は

$$F_{AC}=R_A=301\ [N],$$

$$F_{CB}=R_A-q(x-a)$$
$$=301-1670\times(x-0.4)\ [N]$$

各区間の曲げモーメントは

$$M_{AC}=R_A x=301x\ [Nm],$$

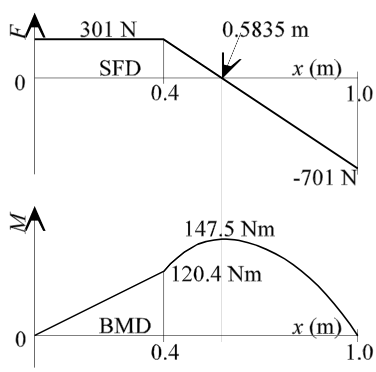


図4.11+26

$$M_{CB}=R_A x-\frac{1}{2}q(x-a)^2$$
$$=301x-835\times(x-0.4)^2\ [Nm]$$

と求めることができる．SFDとBMDは図4.37のようである．■

発展例題4.24の別解：詳しい説明は材料力学の教科書に譲るが，せん断力Fと分布荷重$q(x)$との間に次の関係がある．

$$\frac{dF}{dx}=-q(x)$$

ここで，$q(x)$は軸線方向の座標xの関数である．この式を積分すると，

$$F(x)=F_0-\int_{x_0}^{x}q(\xi)d\xi \qquad \text{(A)}$$

と書くことができる．ここで，F_0は積分の下限$x=x_0$でのせん断力である（積分の上限がxであるので，積分変数としてξを用いて混同を避けている）．

式（A）で$x_0=a$，$F_0=F_C=F_{AC}|_{x=a}=R_A$とおくと，**発展例題4.24**の$F_{CB}$は

$$F_{CB}=R_A-q\int_a^x d\xi=R_A-q(x-a).$$

曲げモーメントは，**基本事項3**の4．に挙げた関係式

$$\frac{dM}{dx}=F$$

を積分して，

$$M(x)=M_0+\int_{x_0}^{x}F(\xi)d\xi \qquad \text{(B)}$$

と書くことができる．ここで，M_0は積分の下限$x=x_0$での曲げモーメントである．

式（B）で$x_0=a$，$M_0=M_C=M_{AC}|_{x=a}=R_A a$ とおくと**発展例題4.24**のM_{CB}は

$$M_{CB}=R_A a+\int_a^x[R_A-q(\xi-a)]d\xi=R_A a+\left[R_A x-\frac{1}{2}q(\xi-a)^2\right]_a^x$$
$$=R_A a+R_A(x-a)-\frac{1}{2}q(x-a)^2=R_A x-\frac{1}{2}q(x-a)^2$$

と求めることができる．■

解説：別解で示した積分による方法を使うと，分布荷重$q(x)$がxのどのような関数であっても，$q(x)$の合力の作用点を意識することなく，せん断力や曲げモーメントを計算できる．次の例題で慣れてみよう．

発展例題4.25　図4.38に示すはりのせん断力と曲げモーメントの式を導け．分布荷重$q(x)$は$a<x<b$で

$$q(x)=q_0+q_1\frac{x-a}{b-a}$$

で表されるものとする．

指針　**発展例題4.24**の別解の式（A）と（B）を使う．

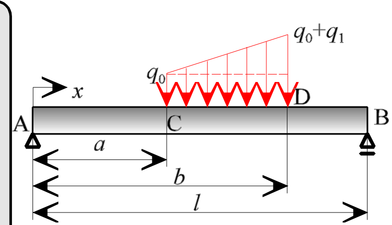


図4.11+27

解答　荷重区間は，AC間とCD間とDB間の三つである．

支点Aの反力をR_A，AC間$(0<x<a)$でのせん断力をF_{AC}，曲げモーメントをM_{AC}で表すと，

$$F_{AC}=R_A,\ M_{AC}=R_Ax.$$

次に，CD間$(a<x<b)$でのせん断力をF_{CD}，曲げモーメントをM_{CD}で表す．F_{CD}は，**発展例題4.24**の別解の式（A）で$x_0=a$，$F_0=R_A$とおいて，

$$F_{CD}=R_A-\int_a^x\left(q_0+q_1\frac{\xi-a}{b-a}\right)d\xi=R_A-q_0(x-a)-\frac{q_1}{b-a}\frac{1}{2}(x-a)^2$$

となり，M_{CD}は，**発展例題4.24**の別解の式（B）で$x_0=a$，$M_0=R_Aa$とおいて，

$$M_{CD}=R_Aa+\int_a^x\left[R_A-q_0(\xi-a)-\frac{q_1}{b-a}\frac{1}{2}(\xi-a)^2\right]d\xi=R_Ax-\frac{1}{2}q_0(x-a)^2-\frac{q_1}{b-a}\frac{1}{6}(x-a)^3$$

となる．ただし，F_{CD}とM_{CD}の式は$a<x<b$でのみ成り立つことに注意する．

DB間$(b<x<l)$でのせん断力をF_{DB}，曲げモーメントをM_{DB}で表す．この区間では荷重が作用していないので，せん断力は

$$F_{DB}=F_D-\int_b^x 0d\xi=F_D\quad ただし，F_D=R_A-q_0(b-a)-\frac{1}{2}q_1(b-a)$$

曲げモーメントは

$$M_{DB}=M_D+\int_b^x F_{DB}d\xi=M_D+(x-b)F_D\quad ただし，M_D=R_Ab-\frac{1}{2}q_0(b-a)^2-\frac{1}{6}q_1(b-a)^2$$

という式で表すことができる．R_Aは$M_{DB}|_{x=l}=0$から求めることができる．SFDとBMDを図4.39のようである．■

解説：DB間$(b<x<l)$でのせん断力F_{DB}と曲げモーメントM_{DB}について少し補足しておく．F_{DB}の第二項目と第三項目は分布荷重の合力になっている．M_{DB}の式にM_DとF_Dの値を代入して少し書き直すと次のようになる．

$$M_{DB}=R_Ax-q_0(b-a)\left[x-b+\frac{1}{2}(b-a)\right]-\frac{1}{2}q_1(b-a)\left[x-b+\frac{1}{3}(b-a)\right]$$

この式の第二項目と第三項目は「分布荷重の合力」×「DB間のxと分布荷重の合力の作用点との距離」になっている．

発展例題4.25の別解：分布荷重$q(x)=q_0+q_1\dfrac{x-a}{b-a}$がCB間（$a<x<l$）で作用すると考え，DB間（$b<x<l$）では新たに$-\left(q_0+q_1+q_1\dfrac{x-b}{b-a}\right)$が加わったと考える．このとき，DB間（$b<x<l$）でこれら二つを合成した分布荷重は

$$q(x)=\left(q_0+q_1\frac{x-a}{b-a}\right)-\left(q_0+q_1+q_1\frac{x-b}{b-a}\right)=0$$

であるから，図4.38の荷重と同じになるので，DB間（$b<x<l$）のせん断力の式と曲げモーメントの式は，

$$F_{DB}=R_A-q_0(x-a)-\frac{1}{2}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^2+(q_0+q_1)(x-b)+\frac{1}{2}\frac{q_1}{b-a}(x-b)^2$$

$$M_{DB}=R_Ax-\frac{1}{2}q_0(x-a)^2-\frac{1}{6}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^3+\frac{1}{2}(q_0+q_1)(x-b)^2+\frac{1}{6}\frac{q_1}{b-a}(x-b)^3$$

と書くこともできる．■

解説：別解の式はシンプルであると共に，せん断力や曲げモーメントにどの外力がどのように影響しているかがよくわかる．同時に，表計算ソフトを使った計算に適している．計算例を図4.40に示す．ここではa/l=0.25，b/l=0.6，q_1/q_0=2として計算していて，A7以下がx/lの値で座標を表し，B7以下の「第1項」がF_{DB}の右辺第一項の値，C7以下の「第2・3項」がx/l≥0.25での右辺第二・三項の値，D7以下の「第4・5項」がx/l≥0.6での右辺第四・五項の値である．E7以下が「第1項」から「第4・5項」までの和になっている．E7からE17がAC間のせん断力F_{AC}，E17からE31がCD間のせん断力F_{CD}，E31からE47までがDB間のせん断力F_{DB}になっていることがわかるだろう．F列からI列は曲げモーメントの計算である．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a/l=	0.25							
2	b/l=	0.6							
3	q0/q0=	1							
4	q1/q0=	2							
5	RA/(q0l)=	0.382033							
6	x/l	第1項	第2・3項	第4・5項	Shearing	第1項	第2・3項	第4・5項	Bending M
7	0	0.382033			0.382	0.0000			0.0000
8	0.025	0.382033			0.382	0.0096			0.0096
9	0.05	0.382033			0.382	0.0191			0.0191
10	0.075	0.382033			0.382	0.0287			0.0287
11	0.1	0.382033			0.382	0.0382			0.0382
12	0.125	0.382033			0.382	0.0478			0.0478
13	0.15	0.382033			0.382	0.0573			0.0573
14	0.175	0.382033			0.382	0.0669			0.0669
15	0.2	0.382033			0.382	0.0764			0.0764
16	0.225	0.382033			0.382	0.0860			0.0860
17	0.25	0.382033	0.0000		0.382	0.0955	-0.0000		0.0955
18	0.275	0.382033	-0.0268		0.3553	0.1051	-0.0003		0.1047
19	0.3	0.382033	-0.0571		0.3249	0.1146	-0.0014		0.1133
20	0.325	0.382033	-0.0911		0.2910	0.1242	-0.0032		0.1210
21	0.35	0.382033	-0.1286		0.2535	0.1337	-0.0060		0.1278
22	0.375	0.382033	-0.1696		0.2124	0.1433	-0.0097		0.1336
23	0.4	0.382033	-0.2143		0.1678	0.1528	-0.0145		0.1384
24	0.425	0.382033	-0.2625		0.1196	0.1624	-0.0204		0.1420
25	0.45	0.382033	-0.3143		0.0678	0.1719	-0.0276		0.1443
26	0.475	0.382033	-0.3696		0.0124	0.1815	-0.0362		0.1453
27	0.5	0.382033	-0.4286		-0.0465	0.1910	-0.0461		0.1449
28	0.525	0.382033	-0.4911		-0.1090	0.2006	-0.0576		0.1430
29	0.55	0.382033	-0.5571		-0.1751	0.2101	-0.0707		0.1394
30	0.575	0.382033	-0.6268		-0.2447	0.2197	-0.0855		0.1342
31	0.6	0.382033	-0.7000	0.0000	-0.3179	0.2293	-0.1021	0.0000	0.1272
32	0.625	0.382033	-0.7768	0.0768	-0.3179	0.2388	-0.1205	0.0010	0.1192
33	0.65	0.382033	-0.8571	0.1571	-0.3179	0.2484	-0.1410	0.0039	0.1113
34	0.675	0.382033	-0.9411	0.2411	-0.3179	0.2579	-0.1634	0.0088	0.1033
35	0.7	0.382033	-1.0286	0.3286	-0.3179	0.2675	-0.1880	0.0160	0.0954
36	0.725	0.382033	-1.1196	0.4196	-0.3179	0.2770	-0.2149	0.0253	0.0874
37	0.75	0.382033	-1.2143	0.5143	-0.3179	0.2866	-0.2440	0.0370	0.0795
38	0.775	0.382033	-1.3125	0.6125	-0.3179	0.2961	-0.2756	0.0510	0.0715
39	0.8	0.382033	-1.4143	0.7143	-0.3179	0.3057	-0.3097	0.0676	0.0636
40	0.825	0.382033	-1.5196	0.8196	-0.3179	0.3152	-0.3464	0.0868	0.0556
41	0.85	0.382033	-1.6286	0.9286	-0.3179	0.3248	-0.3857	0.1086	0.0477
42	0.875	0.382033	-1.7411	1.0411	-0.3179	0.3343	-0.4278	0.1332	0.0397
43	0.9	0.382033	-1.8571	1.1571	-0.3179	0.3439	-0.4728	0.1607	0.0318
44	0.925	0.382033	-1.9768	1.2768	-0.3179	0.3534	-0.5207	0.1911	0.0238
45	0.95	0.382033	-2.1000	1.4000	-0.3179	0.3630	-0.5717	0.2246	0.0159
46	0.975	0.382033	-2.2268	1.5268	-0.3179	0.3725	-0.6257	0.2612	0.0079
47	1	0.382033	-2.3571	1.6571	-0.3179	0.3821	-0.6830	0.3010	-0.0000

図4.11+28

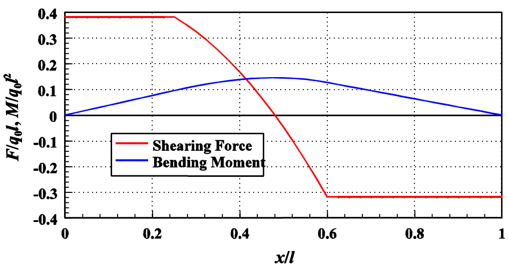


図4.11+29

発展例題4.26　発展例題4.25の別解の考え方を使って，図4.41に示すはりの任意の位置xでのせん断力と曲げモーメントの式を導け．

指針　発展例題4.25の別解のように考えると，図4.41のはりの系を図4.42のようにqがはりの全長にわたって作用した系（右図（A））とC以降に上向きのqが作用した系（右図（B））の重ね合わせとして考えることができる．

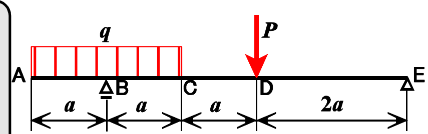


図4.11+30

解答　系（A），（B）の量に，それぞれ，上添字（A），（B）を付けて表すことにする．

系（A）：AB間（$0<x<a$）でのせん断力を$F_{AB}^{(A)}$，曲げモーメントを$M_{AB}^{(B)}$で表すと，静力学的つりあい条件

$$F_{AB}^{(A)}+qx=0,\ M_{AB}^{(A)}+\frac{1}{2}qx^2=0$$

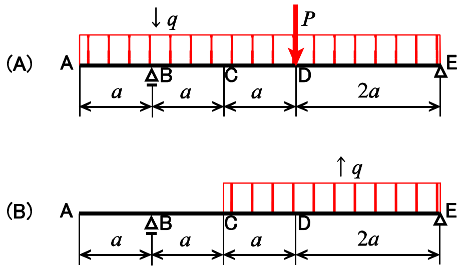


図4.11+31

から

$$F_{AB}^{(A)}=-qx,\ M_{AB}^{(A)}=-\frac{1}{2}qx^2.$$

BCD間 $(a<x<3a)$ では，Bで上向きの荷重 $R_B^{(A)}$ が加わるので，

$$F_{BCD}^{(A)}+qx-R_B^{(A)}=0,\ M_{BCD}^{(A)}+\frac{1}{2}qx^2-R_B^{(A)}(x-a)=0$$

から

$$F_{BCD}^{(A)}=-qx+R_B^{(A)},\ M_{BCD}^{(A)}=-\frac{1}{2}qx^2+R_B^{(A)}(x-a).$$

DE間 $(3a<x<5a)$ では，Dで下向きの力 P が加わるので，

$$F_{DE}^{(A)}=-qx+R_B^{(A)}-P,\ M_{DE}^{(A)}=-\frac{1}{2}qx^2+R_B^{(A)}(x-a)-P(x-3a).$$

以上の式で，$R_B^{(A)}$ は $M_{DE}^{(A)}|_{x=5a}=0$ から求めることができ，$R_B^{(A)}=\frac{25}{8}qa+\frac{1}{2}P$ である．

系(B)：AB間では $F_{AB}^{(B)}=0$，$M_{AB}^{(B)}=0$．

BC間 $(a<x<2a)$ では，Bで上向きの荷重 $R_B^{(B)}$ が加わるので，

$$F_{BC}^{(B)}=R_B^{(B)},\ M_{BC}^{(B)}=R_B^{(B)}(x-a).$$

CDE間 $(2a<x<5a)$ では，

$$F_{CDE}^{(B)}=R_B^{(B)}+q_0(x-2a),\ M_{CDE}^{(B)}=R_B^{(B)}(x-a)+\frac{1}{2}q_0(x-2a)^2.$$

以上の式で，$R_B^{(B)}$ は $M_{CDE}^{(B)}|_{x=5a}=0$ から求めることができ，$R_B^{(B)}=-\frac{9}{8}qa$ である．

以上から，図4.41の系のせん断力と曲げモーメントの式は系(A)と(B)を重ね合わせ(系(A)と(B)の式を各区間ごとに足し合わせ)て，

AB間 $(0<x<a)$：　$F_{AB}=-qx,\ M_{AB}=-\frac{1}{2}qx^2.$

BC間 $(a<x<2a)$：　$F_{BC}=-qx+R_B,\ M_{BC}=-\frac{1}{2}qx^2+R_B(x-a).$

CD間 $(2a<x<3a)$：　$F_{CD}=-qx+R_B+q(x-2a),$

$$M_{CD}=-\frac{1}{2}qx^2+R_B(x-a)+\frac{1}{2}q(x-2a)^2.$$

DE間 $(3a<x<5a)$：　$F_{DE}=-qx+R_B+q(x-2a)-P,$

$$M_{DE}=-\frac{1}{2}qx^2+R_B(x-a)+\frac{1}{2}q(x-2a)^2-P(x-3a).$$

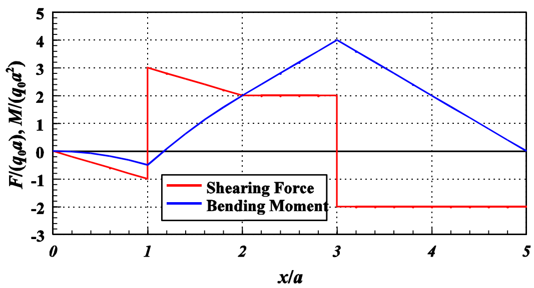


図4.11+32

となる．ここで，$R_B=R_B^{(A)}+R_B^{(B)}=2qa+\frac{1}{2}P$ である．$P/(qa)=4$ としたときのSFDとBMDを図4.43のようである．■

解説：表計算ソフトを使って$P/(qa)=4$としたときの計算例を図4.44に示す．A列4行目以下がx/aの値で座標を表し，B～E列の4行目以下がF_{DE}の右辺第1項～第4項の値を表し，F列がB列からE列までの和になっていてせん断力を表している．G～K列は曲げモーメントの場合である．ここで$x/a=1$と$x/a=3$が二行あることに気づくだろう．これらはSFDの不連続を表現するためである．この例題の場合は$x/a=1$で上向きのR_Bがはたらき，$x/a=3$で下向きのPがはたらく．これらは集中力なのでSFDに不連続を生ずる．

T1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	P/(qa)=	4									
2	RB/(qa)=	4									
3	x/a	第１項	第２項	第３項	第４項	Shearing	第１項	第２項	第３項	第４項	Bending M
4	0	0.0000				0.0000	0.0000				0.0000
5	0.2	-0.2000				-0.2000	-0.0200				-0.0200
6	0.4	-0.4000				-0.4000	-0.0800				-0.0800
7	0.6	-0.6000				-0.6000	-0.1800				-0.1800
8	0.8	-0.8000				-0.8000	-0.3200				-0.3200
9	1	-1.0000				-1.0000	-0.5000				-0.5000
10	1	-1.0000	4.0000			3.0000	-0.5000	0.0000			-0.5000
11	1.2	-1.2000	4.0000			2.8000	-0.7200	0.8000			0.0800
12	1.4	-1.4000	4.0000			2.6000	-0.9800	1.6000			0.6200
13	1.6	-1.6000	4.0000			2.4000	-1.2800	2.4000			1.1200
14	1.8	-1.8000	4.0000			2.2000	-1.6200	3.2000			1.5800
15	2	-2.0000	4.0000	0.0000		2.0000	-2.0000	4.0000	0.0000		2.0000
16	2.2	-2.2000	4.0000	0.2000		2.0000	-2.4200	4.8000	0.0200		2.4000
17	2.4	-2.4000	4.0000	0.4000		2.0000	-2.8800	5.6000	0.0800		2.8000
18	2.6	-2.6000	4.0000	0.6000		2.0000	-3.3800	6.4000	0.1800		3.2000
19	2.8	-2.8000	4.0000	0.8000		2.0000	-3.9200	7.2000	0.3200		3.6000
20	3	-3.0000	4.0000	1.0000		2.0000	-4.5000	8.0000	0.5000		4.0000
21	3	-3.0000	4.0000	1.0000	-4.0000	-2.0000	-4.5000	8.0000	0.5000	0.0000	4.0000
22	3.2	-3.2000	4.0000	1.2000	-4.0000	-2.0000	-5.1200	8.8000	0.7200	-0.8000	3.6000
23	3.4	-3.4000	4.0000	1.4000	-4.0000	-2.0000	-5.7800	9.6000	0.9800	-1.6000	3.2000
24	3.6	-3.6000	4.0000	1.6000	-4.0000	-2.0000	-6.4800	10.4000	1.2800	-2.4000	2.8000
25	3.8	-3.8000	4.0000	1.8000	-4.0000	-2.0000	-7.2200	11.2000	1.6200	-3.2000	2.4000
26	4	-4.0000	4.0000	2.0000	-4.0000	-2.0000	-8.0000	12.0000	2.0000	-4.0000	2.0000
27	4.2	-4.2000	4.0000	2.2000	-4.0000	-2.0000	-8.8200	12.8000	2.4200	-4.8000	1.6000
28	4.4	-4.4000	4.0000	2.4000	-4.0000	-2.0000	-9.6800	13.6000	2.8800	-5.6000	1.2000
29	4.6	-4.6000	4.0000	2.6000	-4.0000	-2.0000	-10.5800	14.4000	3.3800	-6.4000	0.8000
30	4.8	-4.8000	4.0000	2.8000	-4.0000	-2.0000	-11.5200	15.2000	3.9200	-7.2000	0.4000
31	5	-5.0000	4.0000	3.0000	-4.0000	-2.0000	-12.5000	16.0000	4.5000	-8.0000	-0.0000

図4.11+33

発展例題4.25の別解の考え方を使わない場合，

AB間$(0<x<a)$：　$F_{AB}=-qx$，$M_{AB}=-\frac{1}{2}qx^2$.

BC間$(a<x<2a)$：　$F_{BC}=-qx+R_B$，$M_{BC}=-\frac{1}{2}qx^2+R_B(x-a)$.

CD間$(2a<x<3a)$：　$F_{CD}=F_C$，$M_{CD}=M_C+F_C(x-2a)$．ただし，$F_C=-2qa+R_B$，$M_C=-2qa^2+R_Ba$.

DE間$(3a<x<5a)$：　$F_{DE}=F_C-P$，$M_{DE}=M_C+F_C(x-2a)-P(x-3a)$.

基本例題4.27　図4.45のようなはりの各荷重区間での曲げモーメントの式を書き下し，せん断力と曲げモーメントの関係式を用いて各区間でのせん断力の式を求めよ．また，$a=0.2\,m$，$b=0.6\,m$，$c=0.4\,m$，$d=0.2\,m$，$P_1=200\,N$，$P_2=200\,N$，$M_1=-100\,Nm$としてSFDとBMDを描け．

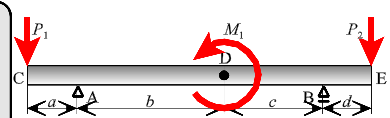


図4.11+34

解答　曲げモーメントの式は

$$M_{CA}=-P_1x$$

$$M_{CD}=-P_1x+R_A(x-a)$$

$$M_{DB}=-P_1x+R_A(x-a)-M_1$$

$$M_{BE}=-P_1x+R_A(x-a)-M_1+R_B(x-a-b-c)$$

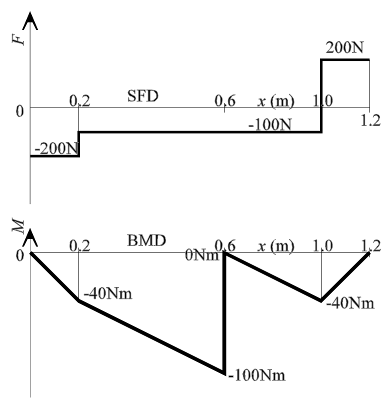


図4.11+35

である．支点反力は$x=a+b+c+d$で$M_{BE}=0$と力のつりあい式から求めることができる．せん断力の式は曲げモーメントの式を微分することで得られるが，省略する．所定の数値を用いるとSFDとBMDは図4.46のように描くことができる．■

片持ちはりに関する例題を2題挙げる．左端の固定支持点の扱い方に注意しよう．

基本例題4.28　図4.47に示すはりのせん断力と曲げモーメントの式を導け．
指針　左に固定支点がある場合，その点での反力のほかに固定モーメントも求める必要がある．

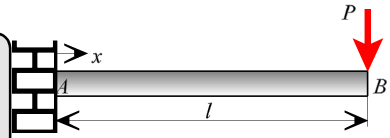


図4.11+36

解答　固定端での反力をR_Aで表し，上向きとすると，系全体の力のつりあい

$$-R_A+P=0$$

から，

$$R_A=P$$

となる．すなわち，R_Aは上向きで大きさはPである．

図4.48を参照して固定モーメントをM_Aで表し，時計回りを仮定する．曲げモーメントをMで表すと，固定端からxの点でのモーメントのつりあい

$$M-R_Ax-M_A=0$$

から

$$M=M_A+R_Ax$$

となり，せん断力はこれをxで微分して$F=R_A$となる．

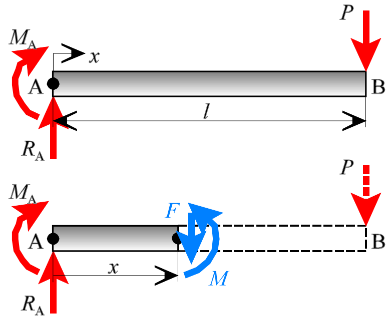


図4.11+37

曲げモーメントは点Bでゼロでなければならないので，$0=M_A+Pl$から$M_A=-Pl$，すなわち，固定モーメントは反時計回り（時計回りを仮定したが，－符号がついているので反時計回り）で大きさはPlである．■

解説：関連する例題は第1章の**基本例題1.26**であり，図1.36が図4.47に対するフリーボディダイヤグラムになっている．

発展例題4.29　図4.49に示す片持ちはりの任意の位置xでのせん断力と曲げモーメントの式を導け．
指針　**基本例題4.26**の指針と同じ．ただし，部分的に等分布荷重が作用していることに注意する．

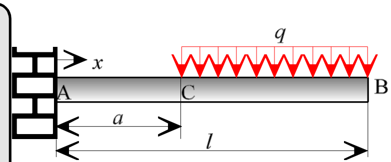


図4.11+38

解答　荷重区間はAC間とCB間の二つで，それぞれの荷重区間でのフリーボディダイヤグラムは図4.50である．

固定端での反力をR_A，固定モーメントをM_Aで表し，R_AとM_Aを，それぞれ，上向きと時計回りを仮定とする．

AC間での静力学的つりあい

$$F_{AC}-R_A=0, \qquad M_{AC}-R_Ax-M_A=0$$

から，

$$F_{AC}=R_A, \ M_{AC}=M_A+R_Ax$$

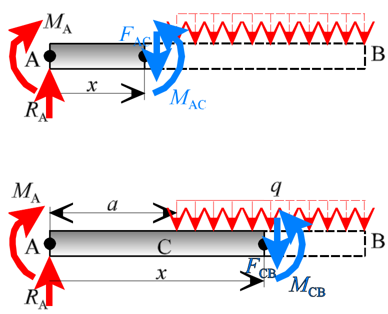


図4.11+39

である．CB間ではせん断力は，$F_C = R_A$を使って

$$F_{CB} = R_A - \int_a^x q d\xi$$

から，

$$F_{CB} = R_A - q(x-a).$$

曲げモーメントは，$M_C = M_A + R_A a$を使って

$$M_{CB} = M_A + R_A a + \int_a^x [R_A - q(\xi - a)] d\xi$$

から，

$$M_{CB} = M_A + R_A x - \frac{1}{2}q(x-a)^2.$$

反力R_Aは$F_{CB}|_{x=l} = 0$から$R_A = q(l-a)$．固定モーメントM_Aは，$M_{CB}|_{x=l} = 0$から，

$$M_A = -q(l-a)l + \frac{1}{2}q(l-a)^2 = -\frac{1}{2}q(l^2 - a^2)$$

となり，大きさは$q(l^2 - a^2)/2$で反時計回りである．■

応用例題4.30　図4.51のように，高さH=1.5 [m]のポールの上に一辺が2 [m]の傾斜した屋根（傾斜角は45°）を取り付ける．風速30 [m/s]に耐えるように支柱を設計せよ．支柱の横断面は一辺がaの正方形である．ただし，支柱材料の降伏応力をσ_Y=420 [MPa]，安全率をf=1.5，密度を7.84×10^3 [kg/m^3]とする．屋根の自重は150 [kgw]であり，風によって生ずる屋根に作用する荷重F_wは，屋根の面に垂直に作用し，

$$F_w = C_w \frac{1}{2} \varrho V^2 A$$

から計算できるものとする．ここで，C_wは風力係数でC_w=3.79，ϱは空気密度で1.225 [kg/m^3]，Vは風速 [m/s]，Aは受風面積 [m^2]であり，屋根の面積に等しいものとする．なお，屋根は剛体であるする．また，支柱の風力係数を2.0とする．

指針　最初に許容応力などの設計条件を明確にしておいて，構造物に最も厳しい荷重条件を選んで応力の解析を行い，設計条件を満たすように寸法を決める．

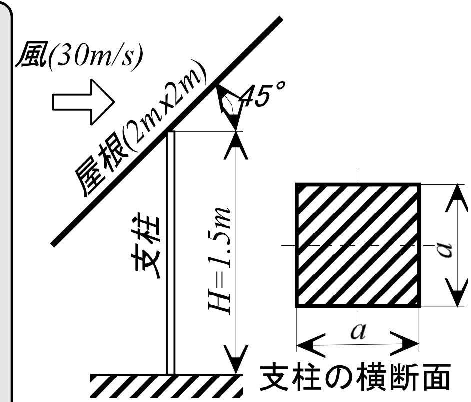


図4.11+40

解答　支柱の材料，高さと図4.52のように横断面形状が決まっているので，設計しなければならないものは横断面の一辺の長さaである．

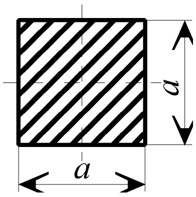


図4.11+41

◎許容応力　垂直応力に対する許容応力は

$$\sigma_a = \frac{\sigma_Y}{f} = \frac{420}{1.5} = 280\ [MPa].$$

せん断応力に対する許容せん断応力τ_aは，一般に，$\tau_a = \sigma_a/\sqrt{3}$にとるので，

$$\tau_a=\frac{\sigma_a}{\sqrt{3}}=162\ [MPa].$$

◎作用する力　図4.53左のように支柱に作用する力は，屋根の自重による力W_{roof}，風によって生ずる屋根に作用する力F_w，風によって生ずる支柱に作用する力F_{pole}，支柱の自重による力W_{pole}の四つに大別できる．これらのうちW_{roof}とF_wは，次のように計算することができる．

$$W_{roof}=150\ [kgw]=1470\ [N]$$

$$F_w=3.79\times\frac{1}{2}\times1.225\times30^2\times(2\times2)=8357\ [N]$$

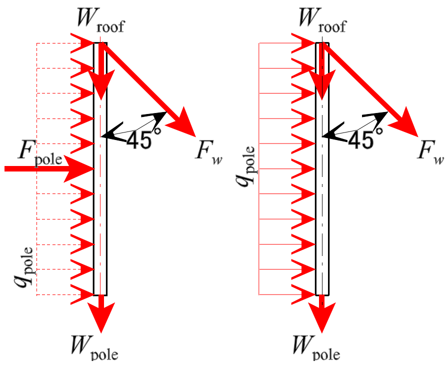


図4.11+42

特に，F_wは垂直方向分力と水平方向分力に分けることができ，今の場合，水平方向分力と垂直方向分力は等しく，$F_w/\sqrt{2}=5910\ [N]$である．

残る二つ，F_{pole}とW_{pole}は支柱の横断面の一辺の長さaに依存するため，現時点では決まらないが，仮に，一辺の長さを$a=100\ [mm]$と想定すると，

$$F_{pole}=2.0\times\frac{1}{2}\times1.225\times30^2\times(1.5\times0.1)=165.4\ [N]$$

$$W_{pole}=7.84\times10^3\times9.8\times0.1^2\times1.5=1153\ [N]$$

となる．

支柱に作用する風による荷重は支柱の高さ方向にわたって均等に作用するので，F_{pole}は等分布荷重の合力として考えなければならない．ゆえに，F_{pole}を支柱の高さで除して，単位長さあたりの荷重q_{pole}を求めると

$$q_{pole}=\frac{F_{pole}}{H}=\frac{165.4}{1.5}=110.3\ [N/m]$$

となる（図4.53右）．

最大軸力$N_{\max}$，最大曲げモーメント$M_{\max}$，最大せん断力$F_{\max}$は，いずれも支柱の固定部で生ずるので，図4.54を参照して数値を代入すると，

$$N_{\max}=F_w/\sqrt{2}+W_{roof}+W_{pole}$$
$$=5910+1470+1153=8533\ [N]$$

$$M_{\max}=\frac{F_w}{\sqrt{2}}H+\frac{1}{2}q_{pole}H^2$$
$$=5910\times1.5+\frac{1}{2}\times110.3\times1.5^2=8990\ [Nm]$$

$$F_{\max}=\frac{F_w}{\sqrt{2}}+q_{pole}H$$
$$=5910+110.3\times1.5=6076\ [N]$$

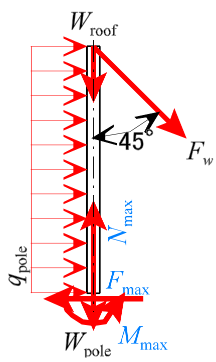


図4.11+43

となる．

◎応力　最大軸力による応力をσ_{x1}とすると，

$$\sigma_{x1}=\frac{N_{\max}}{A}=\frac{N_{\max}}{a^2}=\frac{8533}{0.1^2}=0.86\ [MPa]$$

最大曲げ応力をσ_{x2}とすると，

$$\sigma_{x2}=\frac{M_{\max}}{Z}=\frac{M_{\max}}{a^3/6}=\frac{8990}{0.1^3/6}=53.94\ [MPa]$$

最大せん断応力をτ_{xymax}とすると，

$$\tau_{xymax} = \frac{3}{2}\frac{F_{\max}}{a^2} = \frac{3}{2}\times\frac{6067}{0.1^2} = 0.91\ [MPa]$$

となり，σ_{x2}が支配的であることがわかる．

◎aの仮決定　最大曲げ応力が許容応力を超えないようにaを求めると，

$$a > \left(\frac{6|M_{\max}|}{\sigma_a}\right)^{1/3} = \left(\frac{6\times8990}{280\times10^6}\right)^{1/3} = 0.0578\ [m]$$

となる．角棒の規格を参照して$a = 0.06\ [m]$ (60 $[mm]$)と仮決定する．

◎確認計算　$a = 0.06\ [m]$として最大軸力，最大曲げモーメント，最大せん断力を再度計算すると，

$$W_{pole} = 7.84\times10^3\times9.8\times0.06^2\times1.5 = 415.1\ [N]$$

$$F_{pole} = 2.0\times\frac{1}{2}\times1.225\times30^2\times(1.5\times0.06) = 99.24\ [N]$$

$$q_{pole} = \frac{F_{pole}}{H} = \frac{99.24}{1.5} = 66.16\ [N/m]$$

を使って，

$$N_{\max} = F_w/\sqrt{2} + W_{roof} + W_{pole} = 5910 + 1470 + 416 = 7796\ [N]$$

$$M_{\max} = \frac{F_w}{\sqrt{2}}H + \frac{1}{2}q_{pole}H^2 = 5910\times1.5 + \frac{1}{2}\times66.16\times1.5^2 = 8940\ [Nm]$$

$$F_{\max} = \frac{F_w}{\sqrt{2}} + q_{pole}H = 5910 + 66.16\times1.5 = 6010\ [N]$$

となり，応力は次のように求められる．

$$\sigma_{x1} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{7796}{0.6^2} = 2.17\ [MPa]$$

$$\sigma_{x2} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{8940}{0.06^3/6} = 248.4\ [MPa]$$

$$\tau_{xymax} = \frac{3}{2}\frac{F_{\max}}{a^2} = \frac{3}{2}\times\frac{6010}{0.06^2} = 2.51\ [MPa] \ll \tau_a = 162\ [MPa]$$

最大垂直応力σ_{xmax}はσ_{x1}とσ_{x2}を加えればよいので

$$\sigma_{xmax} = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} = 251\ [MPa] < \sigma_a = 280\ [MPa]$$

となり，条件を満たす．

以上のことから，支柱の一辺を$a = 0.06\ [m]$とする．■

解説1:この例題では一辺をa=0.06 [m]としたが，a=0.058 [m]も可能である．しかし，実際に作る側からするとコスト面も考える必要があり，細かい寸法を指定した特注品を使うより市販品を使うほうが低コストである．ちなみに，一辺がa=0.06 [m]の軟鋼角棒は市販されている．

解説2:この設計例では風が吹き始めて所定の風速に達した後の定常的な状態を考えているが，実際の設計では突風に対する考慮や風速変動に伴うF_wの変動なども考慮する必要があることに注意しなければならない．これら設計上の注意事項は個々に定められることが多い．

解説3:この例題の最後のほうで，「最大垂直応力$\sigma_{x\max}$はσ_{x1}とσ_{x2}を加えればよい」と書いた．これは，σ_{x1}とσ_{x2}が共に横断面に垂直なx軸方向の応力であるので，両者を加え合わせる必要がある．また，この場合，最大せん断応力は許容せん断応力に比べてはるかに小さいが，安全であることを証明する上で，確認計算をしておくとよい．

応用例題4.31　応用例題4.30の一辺がa=0.06 [m]の支柱を一辺がa=75 [mm]の正方形角パイプに変更したい．角パイプの厚さを決めなさい．

指針　応力が許容応力を超えないようにパイプ内寸法を決める．

解答　図4.55のように内側の寸法をbで表すと，角パイプの断面二次モーメントと断面積は

$$I_z=\frac{1}{12}(a^4-b^4),\ A=a^2-b^2$$

であり，断面係数は

$$Z=\frac{1}{6}\frac{a^4-b^4}{a}$$

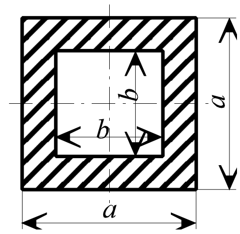


図4.11+44

である．aが決まっているので，**応用例題4.30**と同様に計算すると，q_{pole}=82.8 [N/m]となり，最大曲げモーメントは

$$M_{\max}=\frac{F_w}{\sqrt{2}}H+\frac{1}{2}q_{pole}H^2=5910\times1.5+\frac{1}{2}\times82.8\times1.5^2=8959\ [Nm]$$

である．

曲げモーメントのみ考慮した式で最大曲げ応力が満たさなければならない条件は

$$\sigma_{x\max}=\frac{|M_{\max}|}{Z}=\frac{6a|M_{\max}|}{a^4-b^4}<\sigma_a=280\ [MPa]$$

であるから，

$$b^4<a^4-\frac{6a|M_{\max}|}{\sigma_a}$$

が得られ，数値を代入して

$$b^4<0.075^4-\frac{6\times0.075\times8959}{280\times10^6}=17.24\times10^{-6}\ [m^4]$$

となる．これより，b<64.4×10^{-3} [m]，つまり，bは64.4 [mm]以内であればよく，角パイプの厚さは$(a-b)/2$=5.3 [mm]以上であれば条件を満たす．角パイプの規格を参照すると，a=0.075 [m]に対して計算値に近い規格品は厚さ4.5 [mm]と6.0 [mm]があるが，5.3 [mm]以上でなければならないので厚さ6.0 [mm]の角パイプを採用する．

次に，確認の計算を行う．まず，角パイプの自重による力W_{pole}はb=0.075−2×0.006=0.063 [m]であるから

$$W_{pole}=7.84\times10^3\times9.8\times(0.075^2-0.063^2)\times1.5=191\ [N]$$

となり，軸力は

$$N_{\max}=F_w/\sqrt{2}+W_{roof}+W_{pole}=5910+1470+191=7571\ [N]$$

この軸力による軸応力は

$$\sigma_{x1}=\frac{N_{\max}}{a^2-b^2}=\frac{7571}{0.075^2-0.063^2}=4.58\ [MPa]$$

最大曲げ応力は，

$$\sigma_{x2}=\frac{|M_{\max}|}{Z}=\frac{6a|M_{\max}|}{a^4-b^4}=\frac{6\times0.075\times8959}{0.075^4-0.063^4}=254\ [MPa]$$

となるから，最大垂直応力$\sigma_{x\max}=\sigma_{x1}+\sigma_{x2}$は$\sigma_{x\max}=259\ [MPa]$となり，許容応力$\sigma_a=280\ [MPa]$を超えないこととがわかる．

最大せん断力は

$$F_{\max}=\frac{F_w}{\sqrt{2}}+q_{pole}H=5910+82.8\times1.5=6035\ [N]$$

である．せん断応力を求めるために，まず，断面二次モーメントは

$$I_z=\frac{1}{12}(a^4-b^4)=\frac{1}{12}\times(0.075^4-0.063^4)=1.323\times10^{-6}\ [m^4]$$

発展例題4.10に挙げたI型断面のせん断応力の式のウェブ部の式

$$\tau_{xy}^W=\frac{Fh_0^2}{8I_z}\left[\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2\left(1-\frac{b_0}{b_1}\right)+\frac{b_0}{b_1}-4\left(\frac{y}{h_0}\right)^2\right]$$

で，$b_0=h_0=a=0.075\ [m]$，$h_1=0.063\ [m]$，$b_1=0.012\ [m]$，$F=F_{\max}=6035\ [N]$，$y=0$ とすると

$$\tau_{xy\max}=\frac{6035\times0.075^2}{8\times1.323\times10^{-6}}\times\left[\left(\frac{0.063}{0.075}\right)^2\left(1-\frac{0.075}{0.012}\right)+\frac{0.075}{0.012}\right]$$
$$=8.17\ [MPa]$$

となり，$\tau_a=162\ [MPa]$を超えない．

以上のことから，一辺が$a=0.075\ [m]$（外形寸法），厚さが$0.006\ [m]$の角パイプを採用する．■

解説1：この例題からは，**応用例題4.30**で設計した支柱を60 [mm]角から75 [mm]角に大きくして中空化することで，断面係数がほぼ同等で，支柱の重量が191/416=0.46倍になることがわかる．つまり，断面係数を同等に保って中空化することで，外形寸法が大きくなるが，軽量化できることがわかる．

解説2：せん断応力の計算にI型断面の式を使った．この点については演習問題で確認する．

発展例題4.32 図4.56のような途中にヒンジをもつ二つのはり1)，2)のせん断力と曲げモーメントの式を導け．

指針 Bで二つのはりに分けて考える．このとき，ヒンジBは回転自由なので，曲げモーメントはゼロであることに注目．

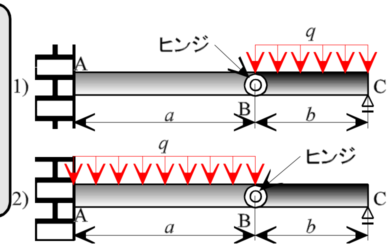


図4.11+45

解答 1)図4.57のように二つのはりに分ける．BC間では，Bでの反力（上向きを仮定）をR_Bとして，せん断力と曲げモーメントの式は

$$F_{BC}=R_B-q(x-a),$$

$$M_{BC}=R_B(x-a)-\frac{1}{2}q(x-a)^2.$$

$x=a+b$ で $M_{BC}=0$ であるから，

$$R_B=\frac{1}{2}qb.$$

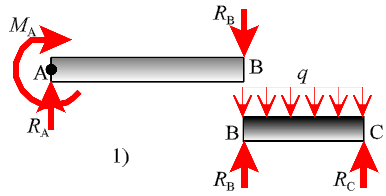


図4.11+46

AB間では，R_A と M_A をAでの反力と固定モーメントして

$$F_{AB}=R_A,\ M_{AB}=M_A+R_Ax.$$

B($x=a$)で $M_{AB}=0$ から，

$$M_A=-R_Aa.$$

Bには下向きに R_B が作用するので，力のつりあい $R_A-R_B=0$ から

$$R_A=R_B=\frac{1}{2}qb.$$

固定モーメントは

$$M_A=-\frac{1}{2}qab$$

となる．ゆえに，せん断力と曲げモーメントの式は次のようになる．

$$F_{AB}=\frac{1}{2}qb,\ M_{AB}=-\frac{1}{2}qab+\frac{1}{2}qbx,$$

$$F_{BC}=\frac{1}{2}qb-q(x-a),\ M_{BC}=\frac{1}{2}qb(x-a)-\frac{1}{2}q(x-a)^2.$$

2)図4.58のように二つのはりに分ける．BC間に着目して点Bにはたらく反力を上向きに R_B とすると，支持点Cまわりのモーメントのつりあいは

$$R_Bb=0$$

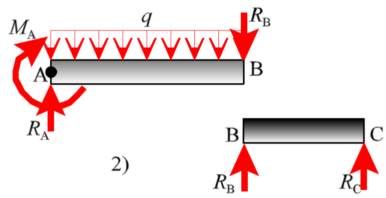


図4.11+47

となり，$R_B=0$ でなければならない．また，力のつりあい $R_B+R_C=0$ から $R_C=0$ である．ゆえに，BC間では

$$F_{BC}=0,\ M_{BC}=0.$$

AB間では

$$F_{AB}=qa-qx,\ M_{AB}=-\frac{1}{2}qa^2+qax-\frac{1}{2}qx^2$$

である．■

解説1：1)の系ではAB部分がBC部分を支えるバネのようになっている．2)の系ではBC部分の点BがAB部分の点Bに載っているだけになっているので力ははたらいていない．

解説2：**発展例題4.32**のはりは途中にヒンジ点を持つので難しそうに見えるが，静力学的つりあい条件だけで解くことができる．一方，同じように見える図4.59のようなはりの問題は静力学的つりあい条件からだけでは解けない(この問題については，第6章参照)．静力学的つりあい条件から解ける類題をもう一つ挙げておく．

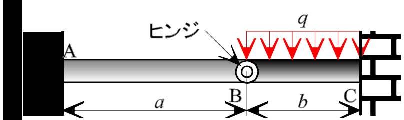


図4.11+48

発展例題4.33　図4.60のような途中に二つのヒンジを持つはりのせん断力と曲げモーメントの式を導け．xの原点をAにとる．

指針　二つのヒンジで囲まれたBC間に注目して静力学的つりあい式を立ててヒンジに作用する力を求め，次に両側のはりの静力学的つりあい式を立てる．図4.61を参照．

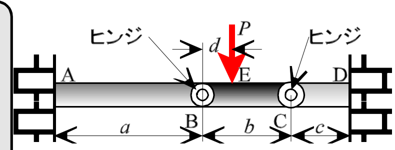


図4.11+49

解答　図4.61下のようにBC間だけを取り出して，BとCに上向きの反力R_BとR_Cが生ずるものとすると，静力学的つりあい条件から

$$R_B=\frac{b-d}{b}P,\ R_C=\frac{d}{b}P$$

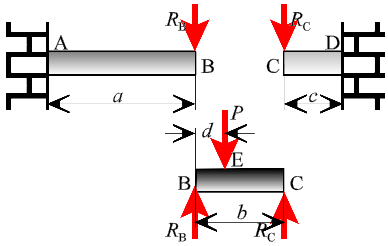


図4.11+50

となり，せん断力と曲げモーメントは

BE間　$F_{BE}=R_B,\ M_{BE}=R_B(x-a)$

EC間　$F_{EC}=R_B-P,\ M_{EC}=R_B(x-a)-P(x-a-d)$

である．

R_BははりABの点Bで下向き荷重としてはたらき，R_CははりCD間の点Cで下向き荷重としてはたらくので，せん断力と曲げモーメントは

AB間　$F_{AB}=R_B,\ M_{AB}=-R_Ba+R_Bx$

CD間　$F_{CD}=-R_C,\ M_{CD}=-R_C(x-a-b)$

となる．■

発展例題4.34　図4.62のような構造において，床板の点B，C，Dと剛な壁との間にケーブル#1～#3を配置し，点B，C，Dで床板の曲げモーメントがゼロになるようにケーブルの張力が調節されている．

1）ケーブル#1～#3の張力を求めよ．

2）床板のSFD，BMDならびに軸力線図を描け．

床板の単位長さあたりの重量およびヤング率を，それぞれ，wおよびEとする．なお，ケーブルは床板の両側に配置されている．

指針　1）は，まず床板に着目して点B，C，Dに加えなければならない横荷重（床板に垂直な荷重）を求めて，その後ケーブル方向の力を求める．2）は，1）で得られたケーブル張力の水平方向分力が床板の軸力になるとする．

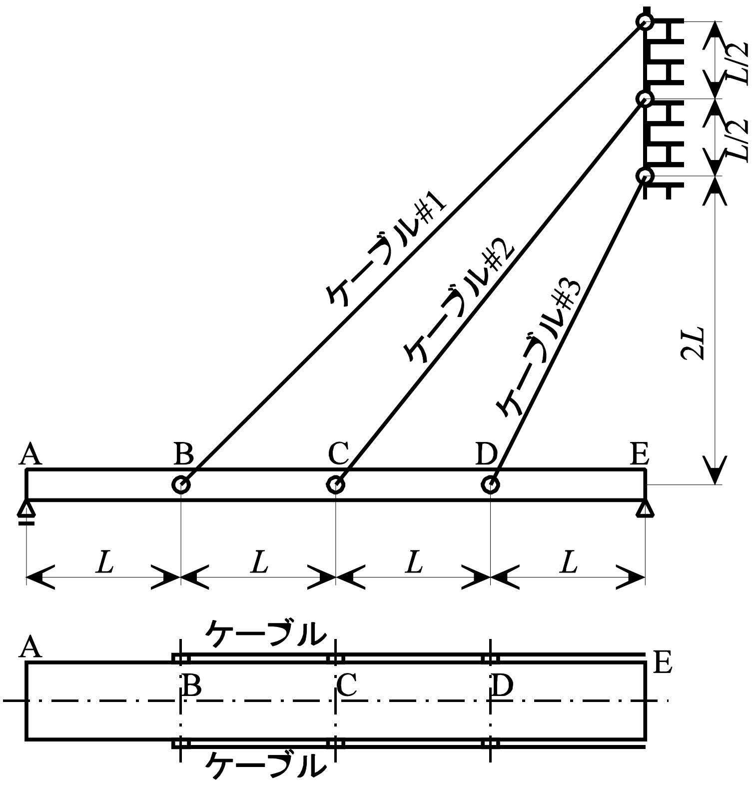


図4.11+51

解答　1）図4.63のように，床板のB，C，Dの横荷重を上向きにR_B，R_C，R_Dとし，床板の両端点の反力を上向きにR_A，R_Eとしてフリーボディダイヤグラムを描くと，曲げモーメントの式は

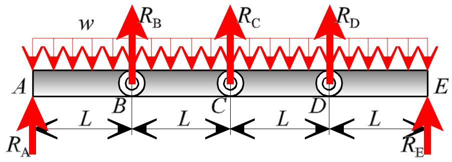


図4.11+52

AB間 $M_{AB}=R_Ax-\frac{1}{2}wx^2$

BC間 $M_{BC}=R_Ax+R_B(x-L)-\frac{1}{2}wx^2$

CD間 $M_{CD}=R_Ax+R_B(x-L)+R_C(x-2L)-\frac{1}{2}wx^2$

DE間 $M_{DE}=R_Ax+R_B(x-L)+R_C(x-2L)+R_D(x-3L)-\frac{1}{2}wx^2$

である．ケーブルの張力は点B，C，Dで曲げモーメントがゼロになるように調整されてるから，点B($x=L$)で$M_{AB}=0$から$R_A=\frac{1}{2}wL$でなければならない．次に，点C($x=2L$)で$M_{BC}=0$から$R_B=wL$となる．同じように考えて，$R_D=wL$，$R_E=\frac{1}{2}wL$である．まとめると，

$$R_A=R_E=\frac{1}{2}wL,$$

$$R_B=R_C=R_D=wL$$

となる．

ケーブル張力は，点B，C，Dで床板とケーブルのなす角をφ_B，φ_C，φ_Dとすると，

$$\sin\varphi_B=\frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\varphi_C=\frac{2.5}{\sqrt{2.5^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{41}},\quad \sin\varphi_D=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

であるから，各ケーブルの張力をT_B，T_C，T_Dとして，

$$T_B=\frac{R_B}{\sin\varphi_B}=\sqrt{2}wL,\quad T_C=\frac{R_C}{\sin\varphi_C}=\frac{\sqrt{41}}{5}wL,\quad T_D=\frac{R_D}{\sin\varphi_D}=\frac{\sqrt{5}}{2}wL$$

となるが，床板の両側にケーブルがあるので，ケーブル一本あたりの張力は

$$T_B=\frac{R_B}{2\sin\varphi_B}=\frac{1}{\sqrt{2}}wL,\quad T_C=\frac{R_C}{2\sin\varphi_C}=\frac{\sqrt{41}}{10}wL,\quad T_D=\frac{R_D}{2\sin\varphi_D}=\frac{\sqrt{5}}{4}wL$$

である．

2）せん断力と曲げモーメントは，各区間の左端の点を原点とすると，

$$F=\frac{1}{2}wL-wx,\quad M=\frac{1}{2}wLx-\frac{1}{2}wx^2$$

であり，軸力（シンボルをNで表す）は，支点Aが左右に可動であるので，

$$N_{AB}=0$$

となり，BC，CD，DE間では

$$N_{BC}=0-\frac{R_B}{\tan\varphi_B}=0-wL,$$

$$N_{CD}=0-wL-\frac{R_C}{\tan\varphi_C}=0-wL-\frac{4}{5}wL,$$

$$N_{DE}=0-wL-\frac{4}{5}wL-\frac{R_D}{\tan\varphi_D}=0-wL-\frac{4}{5}wL-\frac{1}{2}wL$$

となる．SFD, BMD, 軸力図は図4.64のようになる．■

解説：図4.63のモデルは，点B, C, Dにヒンジがあるモデルと等価である．**発展例題4.32と33**のように，ヒンジ部分ではりを切り離して，図4.65のように考えることができる．図4.65では，AB間，BC間，CD間，DE間は，すべて，長さLの等分布荷重wを受ける両端回転支持はりなので，支持反力はすべて$wL/2$である．

ただし，せん断力や曲げモーメントを考える上で等価であるだけで，はりの変形を考える上では等価ではないことに注意．

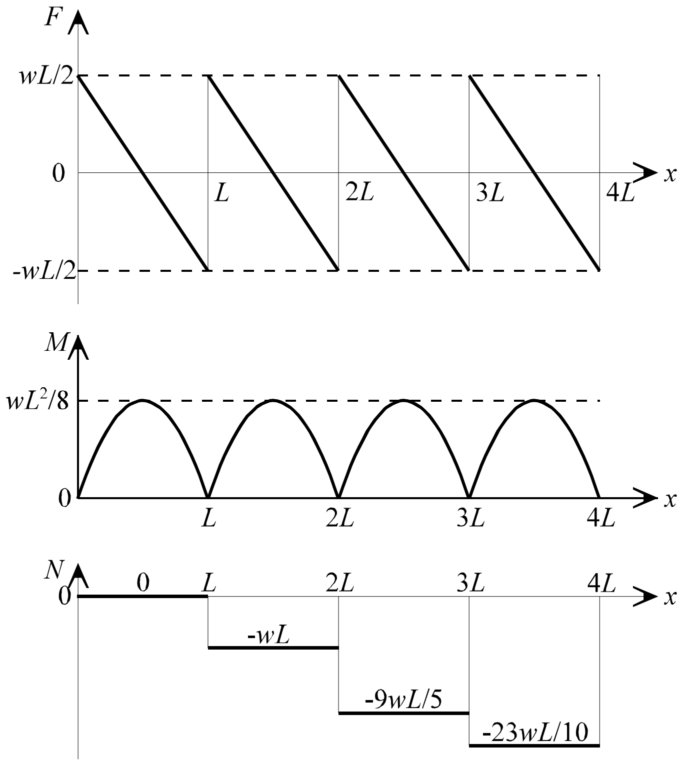


図4.11+53

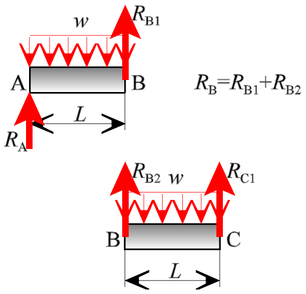


図4.11+54

発展例題4.35　図4.66のような構造のフリーボディダイヤグラムを描き，AC部分のSFD, BMDを描け．Aは回転支点，Cは移動支点とする．

指針　AC, BD, DEの三つの部分に分割してDE部分，BD部分，AC部分の順にフリーボディダイヤグラムを描いていく．この構造では，AC, BD, DEの三つの部分の接続部BとDで部材のなす角度は変化しない．

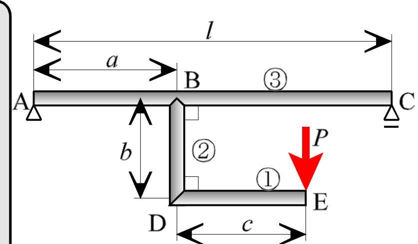


図4.11+55

解答　フリーボディダイヤグラムは図4.67のようになる．都合上，下から①，②，③の順番である．

①DE部分　Eに下向きの横荷重Pを受ける片持ちはりと同じ．Dに上向き荷重PとモーメントPcを打ち消す反時計回りのモーメントPcが生じてこの部分がつりあう．

②BD部分　Dに下向き軸荷重Pと時計回りのモーメントPcを受ける．Bに上向きの軸荷重Pと反時計回りのモーメントPcが生じてこの部分がつりあう．

③AC部分　Bに下向きの横荷重P，時計回りのモーメントPcが作用する．AとCには力R_AとR_Cが発生してこの部分がつりあう．

AC部分の各部分のせん断力と曲げモーメントの式は以下の通り．

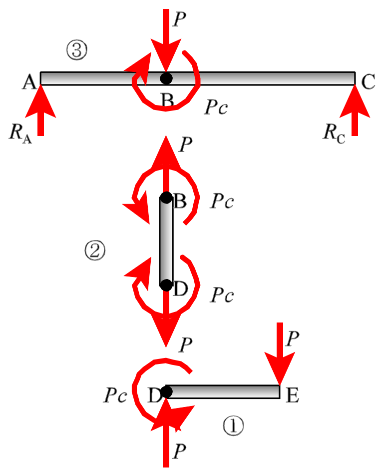


図4.11+56

AB間 $F_{AB}=R_A$

$M_{AB}=R_A x$

BC間 $F_{BC}=R_A-P$

$M_{CB}=R_A x-P(x-a)+Pc$

ここで，R_AとR_Cは

$$R_A=\frac{1}{l}(l-a-c)P,\quad R_C=\frac{1}{l}(a+c)P$$

である．なお，AC部分のせん断力と曲げモーメントの式は**基本例題4.16**と**基本例題4.20**（$M_0=-Pc$としたもの）を重ね合わせたものである．■

発展例題4.36 図4.68のような構造のフリーボディダイヤグラムを描け．また，AB間とBC間のねじりモーメントを求めよ．曲げに関してAは回転支点，Cは移動支点，ねじりに関してA端，C端共に固定されているものとする．すべての部材はxz面内にある．

指針 AC，BD，DEの三つの部分に分割してDE部分，BD部分，AC部分の順にフリーボディダイヤグラムを描いていく．

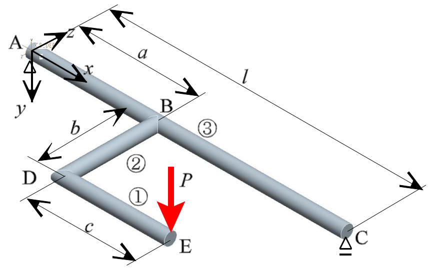


図4.11+57

解答 フリーボディダイヤグラムは図4.69のようになる．都合上，下から①，②，③の順番である．

①DE部分 Eに下向きの横荷重Pを受ける片持ちはりと同じ．Dに上向き荷重PとモーメントPcを打ち消すモーメントが生じてこの部分がつりあう．

②BD部分 Dには下向きの横荷重PとねじりモーメントPcが作用する．この部分がつりあうために，Bには上向きの横荷重PとねじりモーメントPc，そして，モーメントPbが生じてこの部分がつりあう．

③AC部分 Bに下向きの横荷重P，モーメントPc，ねじりモーメントPbが作用する．AとCには反力とねじりモーメントが発生してこの部分がつりあう．

AC部分のせん断力と曲げモーメントは**発展例題4.35**と同じ．AとCに生ずるねじりモーメントは第3章の**基本例題3.07**から求めることができる．■

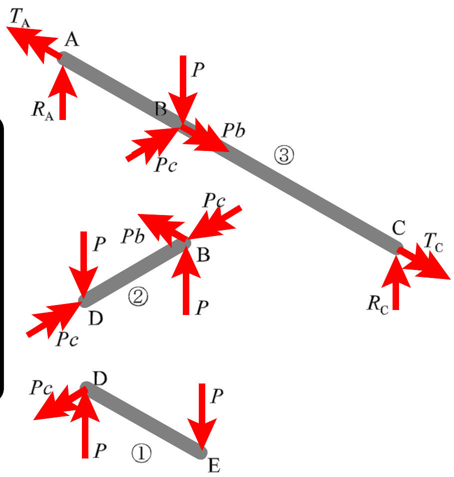


図4.11+58

解説：部材③についての静力学的つりあい式は，ねじりと曲げについて，それぞれ次のような二つの式になる．

ねじりについて：　$T_C-T_A+Tb=0$

曲げについて：　$R_A+R_C-P=0$ (力)

$R_A l-P(l-a)+Pc=0$ (モーメント)

集中荷重の前後に生ずるせん断力の不連続に関する補足

図4.70(a)のように，はりの任意の点に下向きの集中荷重Pが作用している．このとき，幅dxの微小部分ABCDを取り出して考えると，同図(b)のようにABCDの面ABとCDには正のせん断力F_1とF_2が生じて荷重Pとつりあっているとすると，力のつりあい

$$-F_1+F_2+P=0$$

が成立しなければならない．なお，幅dxは十分小さく発生するモーメントは無視できるとする．

xでのせん断力F_1を基準に考えると，$x+dx$では$F_2=F_1-P$となる．ゆえに，せん断力は集中荷重の作用点前後で大きさPの不連続が生ずる．なお，移動支点や回転支点ははりからみると集中荷重の作用点と同じなのでせん断力は支点反力の大きさの不連続が生ずる．

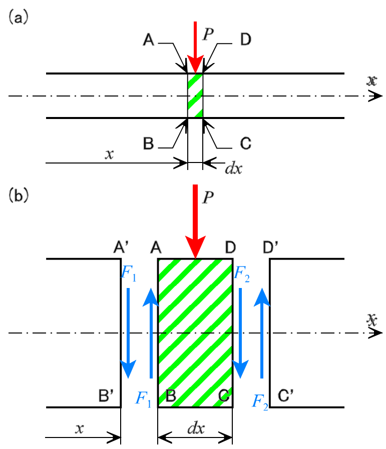


図4.11+59

外力のモーメントの前後に生ずる曲げモーメントの不連続に関する補足

図4.71(a)のように，はりの任意の点にモーメントM_0が作用している．このとき，幅dxの微小部分ABCDを取り出して考えると，同図(b)のようにABCDの面ABとCDには正の曲げモーメントM_1とM_2が生じてモーメントM_0とつりあっているとすると，モーメントのつりあい

$$-M_1+M_2+M_0=0$$

が成立しなければならない．

xでの曲げモーメントM_1を基準に考えると，$x+dx$では$M_2=M_1-M_0$となる．ゆえに，曲げモーメントはモーメントの作用点前後で大きさM_0の不連続が生ずる．

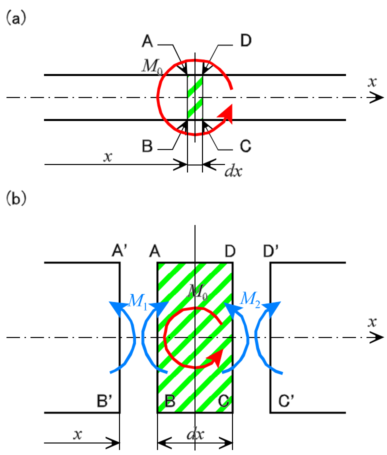


図4.11+60

軸力と曲げが同時に作用する場合の補足

真直はりの曲げ応力について説明する際には軸力がないとして説明することが多い．じつは，軸力による一様応力は曲げには無関係であることによる．この点について説明しておく．

軸方向内力Nによってはりの横断面に生ずるx軸方向の応力σ_{x1}は，横断面積をAとして$\sigma_{x1}=\dfrac{N}{A}$．はりのある位置での曲げモーメントをM，断面二次モーメントをI_z，横断面内の中立面基準の高さ方向の座標をyで表すと，曲げ応力σ_{x2}は$\sigma_{x2}=\dfrac{M}{I_z}y$である．はりの横断面の$x$軸方向の応力$\sigma_x$はこれらの和で，$\sigma_x=\sigma_{x1}+\sigma_{x2}=\dfrac{N}{A}+\dfrac{M}{I_z}y$である．いま，応力$\sigma_x$がつくる中立軸まわりのモーメント，すなわち曲げモーメントは

$$M=\int_A \sigma_x y dA=\int_A (\sigma_{x1}+\sigma_{x2}) y dA=\int_A\left(\frac{N}{A}+\frac{M}{I_z}y\right) y dA$$

である．ところが，$\int_A y dA=0$（断面一次モーメントがゼロ）であることから

$$M=\int_A \sigma_x y dA=\int_A \sigma_{x2} y dA$$

となり，一様な軸応力σ_{x1}は曲げモーメントには無関係であることがわかる．逆に，曲げ応力σ_{x2}は軸力に影響を与えな

いことも示すことができる．証明は読者にまかせる．

左端を固定支持にすることの便利な点

いま，図4.72の二つのはりについて考えてみよう．1)では左端が固定支持点で，2)では右端が固定支持点である．両者のせん断力と曲げモーメントの式は

1)固定支持点の反力は$R_A=ql$(上向き)，固定モーメントは$M_A=-ql^2/2$（反時計まわり)．せん断力と曲げモーメントの式は

$$F=R_A-qx,\quad M=M_A+R_Ax-\frac{1}{2}qx^2.$$

2)左端は自由端なので，せん断力と曲げモーメントの式は

$$F=-qx,\quad M=-\frac{1}{2}qx^2.$$

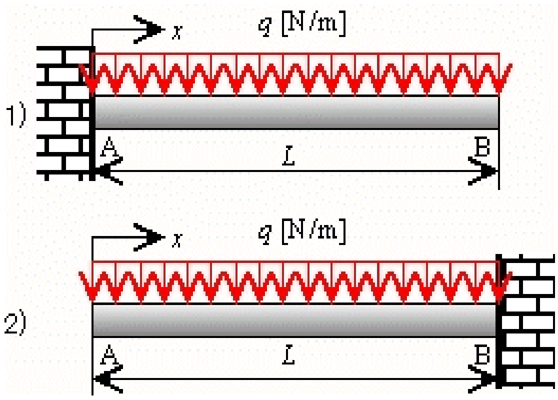


図4.11+61

比べると，1)の式は少しややこしい．ところが，第6章で述べるはりのたわみ関数を求める際に出てくる微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI_z}$$

は二階なので，解は一般に

$$v=v_0+\theta_0x+\int\left(\int\frac{M}{EI_z}dx\right)dx$$

の形をしており，積分定数v_0とθ_0が現れる．ここでv_0は$x=0$のたわみ，θ_0は$x=0$のたわみ角である．$x=0$の点が固定支持点であると，固定支持点ではたわみもたわみ角もゼロなので，v_0とθ_0は両方ともゼロになって積分定数はなくなる．これが便利な点である．

ちなみに，1)，2)のSFDとBMDは図4.73，4.74のようになる．

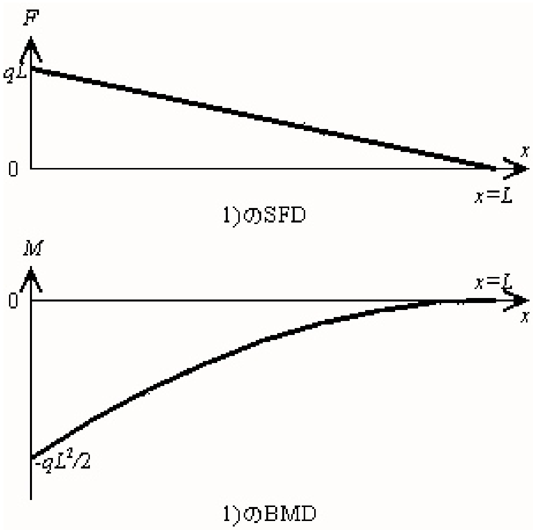


図4.11+62

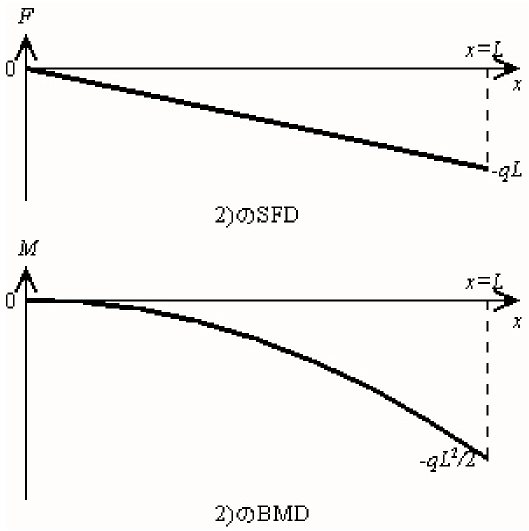


図4.11+63

第4章　演習問題

問題1．図1のようなI型断面の断面二次モーメントの公式は

$$I_z=\frac{1}{12}b_0h_0^3-\frac{1}{12}(b_0-b_1)h_1^3$$

である．この公式を導け．ただし，図形はz軸，y軸について対称である．(関連例題：**基本例題4.02**)

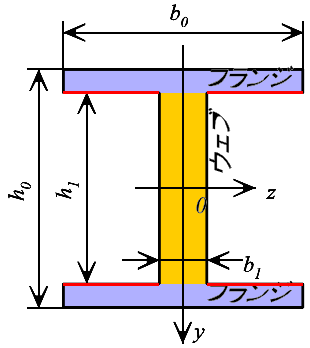


図1

ヒント：断面二次モーメントの公式

$$I_z=\int_A y^2dA$$

でウェブ部では$dA=b_0dy$，フランジ部では$dA=b_1dy$であるから，I_zは

$$I_z=b_0\int_{-h_0/2}^{-h_1/2}y^2dy+b_1\int_{-h_1/2}^{h_1/2}y^2dy+b_0\int_{h_1/2}^{h_0/2}y^2dy=\frac{b_0(h_0^3-h_1^3)}{12}+\frac{b_1h_1^3}{12}.$$

この式を整える．

問題2．問題1のヒントの式で項$\dfrac{b_0(h_0^3-h_1^3)}{12}$はフランジ部の断面二次モーメントである．この項を平行軸の定理を用いて説明せよ．

ヒント：フランジ部は幅b_0，高さ$\dfrac{1}{2}(h_0-h_1)$の長方形で面積は$\dfrac{1}{2}b_0(h_0-h_1)$．z軸に平行なフランジの図心軸に関する断面二次モーメントは$\dfrac{b_0(h_0-h_1)^3}{12\times 8}$．フランジの図心軸と$z$軸の距離は$\dfrac{1}{4}(h_0+h_1)$なので，フランジ部の断面二次モーメントは平行軸の定理から

$$I_z=2\times\left[\frac{b_0(h_0-h_1)^3}{96}+\left(\frac{h_0+h_1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}b_0(h_0-h_1)\right]$$

で計算できる．この式の頭の2はフランジが上下にあるためについている．

問題3．図2に示す二つの断面の断面二次モーメントは

$$I_z=\frac{1}{12}b_0h_0^3-\frac{1}{12}(b_0-b_1)h_1^3$$

から計算できることを示せ．ただし，図形はz軸，y軸について対称である．

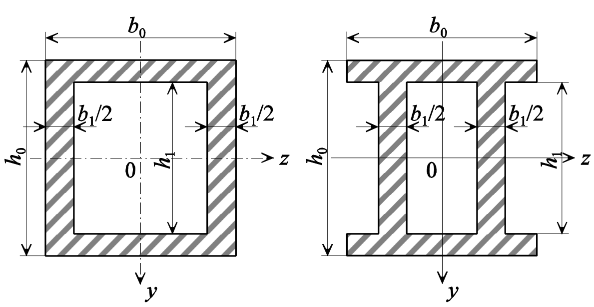


図2

ヒント：この場合，断面二次モーメントは

$$I_z=b_0\int_{-h_0/2}^{-h_1/2}y^2dy+2\times\left(\frac{b_1}{2}\right)\int_{-h_1/2}^{h_1/2}y^2dy+b_0\int_{h_1/2}^{h_0/2}y^2dy$$

から計算できる．

問題4．図3のような横断面が長方形の棒①の上下面に厚さtの薄い板②を貼りあわせてはりとして用いる．このはりに生ずる曲げ応力の式は，曲げモーメントをMとして

$$-\frac{h}{2}-t<y<-\frac{h}{2},\ \frac{h}{2}<y<\frac{h}{2}+t \text{で}\ \sigma_x=E_2\varepsilon_x=\frac{E_2M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}y$$

$$-\frac{h}{2}<y<\frac{h}{2} \text{で}\ \sigma_x=E_1\varepsilon_x=\frac{E_1M}{E_1I_{z1}+E_2I_{z2}}y$$

である．棒①の材料がバルサ系材料（b=10 mm，h=10 mm，E_1=5 GPa，許容応力σ_a=12.0 MPa），板②がアルミ系材料（b=10 mm，t=1 mm，E_2=70 GPa，許容応力σ_a=100 MPa）である．このはりに許容される最大曲げモーメントを求めよ．また，この値はバルサ系材料のみのb=10 mm，$h+2t$=12 mmのはりに許容される最大曲げモーメントの何倍にあたるか．（関連例題：**発展例題4.15**）

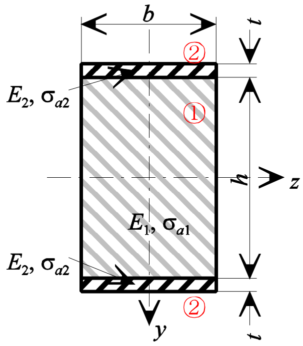


図3

ヒント：棒①の断面二次モーメントは$I_{z1}=\dfrac{bh^3}{12}$，板②の断面二次モーメントは$I_{z2}=\dfrac{b(h+2t)^3}{12}-I_{z1}$から計算する．バルサ系材料とアルミ系材料に生ずる最大曲げ応力がそれぞれの許容応力と等しいとして曲げモーメントMの値を計算し，いずれか小さいほうを最大曲げモーメント$M_{\max}$とする．

Ans. $M_{\max}$=11.1 Nm，3.85倍．

問題5．第3章の演習問題の図6のように同じ材料で長さの等しい直径D_0の中実円形断面はりと外径D_2，内径D_1の中空円筒断面はりがある．中実円形断面はりの質量m_0の中空円筒断面はりの質量m_1に対する比を次の条件の下で求め，比較せよ．（関連問題：第3章の問題5）

1）　曲げ剛性が等しいとき

2）　最大曲げ応力が等しいとき

Ans. 第3章の演習問題の問題5と同じ．

問題6．前問で，中実円形断面はりと中空円筒断面はりの質量が等しい．このとき，

1）　中空円筒断面はりの曲げ剛性EI_{z2}の中実円形断面はりの曲げ剛性EI_{z1}に対する比

2）　中空円筒断面はりの最大曲げ応力$\sigma_{x\max2}$の中実円形断面はりの最大曲げ応力$\sigma_{x\max1}$に対する比

を求めよ．（関連問題：第3章の問題6）

Ans. 第3章の演習問題の問題6と同じ．

問題7．横断面が図4のようなはりのある点でせん断力F=20 kN，曲げモーメントM=40 kNmである．このとき，

1）　横断面の図心の位置を求めよ．
2）　図心を通る中立軸（z軸）に関する断面二次モーメントI_zを求めよ．
3）　はりの上下面に生ずる曲げ応力を求めよ．
4）　フランジ部とウェブ部のせん断応力の式を求めよ．
5）　最大せん断応力の位置と値を求めよ．
6）　Y=50 mmの面（紙面に垂直な面）のせん断応力を求め，**発展例題4.13**の式を数値を用いて確認せよ．

（関連例題：**基本例題4.02**，**基本例題4.03**，**発展例題4.10**など）

ヒント：図心の位置や断面二次モーメントを求める方法はいくつかあるが，ここでは図5のようにZ軸をとって二つに分けて考えるほうが簡単かもしれない．

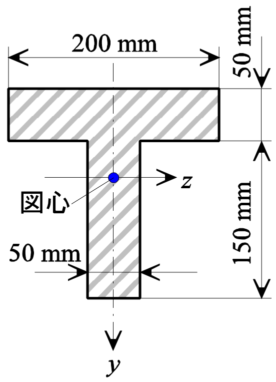


図4

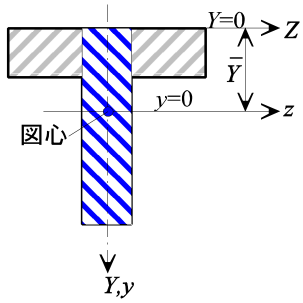


図5

Ans.

1）図5のZ軸を基準にして下方に67.9 mm=67.9×10^{-3} m.

2）I_z=58.9×10^6 mm^4=58.9×10^{-6} m^4.

3）上面（y=−67.9 mm）でσ_x=−46.1 MPa，下面（y=132.1 mm）でσ_x=89.7 MPa.

4）yは中立軸を基準にして下方に正とする．せん断応力の式は

フランジ部（$-67.9\times10^{-3}\ m \le y \le -17.9\times10^{-3}\ m$）：

$$\tau_{xy}^F = -\frac{20\times10^3}{58.9\times10^{-6}}\frac{1}{2}[y^2-(-67.9\times10^{-3})^2]\ Pa$$

ウェブ部（$-17.9\times10^{-3}\ m \le y \le 132.1\times10^{-3}\ m$）：

$$\tau_{xy}^W = -\frac{20\times10^3}{58.9\times10^{-6}}\frac{1}{2}\left\{\frac{200\times10^{-3}}{50\times10^{-3}}[(-17.9\times10^{-3})^2-(-67.9\times10^{-3})^2]+[y^2-(-17.9\times10^{-3})^2]\right\}\ Pa$$

5）最大せん断応力はy=0において生じ，その値は2.97 MPaである（設問4）のτ_{xy}^Wの式にy=0を代入する）.

6）Y=50 mmの面はy=−17.9 mmの面と同じなので，設問4）の式にy=−17.9×10^{-3} mを代入すると，$\tau_{xy}^F|_{y=-17.9\times10^{-3}}$=728 kPa，$\tau_{xy}^W|_{y=-17.9\times10^{-3}}$=2.913 MPa．フランジ部の幅はb_0=200×10^{-3} m，ウェブ部の幅はb_1=50×10^{-3} m．ゆえに，左辺は145.6 kN/m，右辺は145.6 kN/mになる．ゆえに，**発展例題4.13**の式が確認された．

問題8．図6A）とB）の片持ちはりのせん断力と曲げモーメントの式を書き下せ．また，固定端での反力と固定モーメントを求

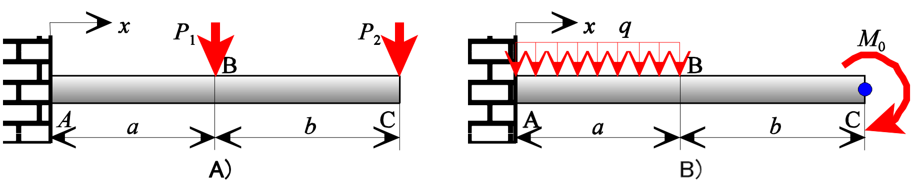


図6

めよ.

ヒント：図6B）の系の式を求める際には，**発展例題4.25の別解**や**発展例題4.26**の考え方を使う.

Ans. いずれの場合も固定端での反力をR_A（上向き），固定モーメントをM_A（時計回り）とする.

A）　$R_A=P_1+P_2$，$M_A=-P_1a-P(a+b)$

AB間（$0<x<a$）：$F_{AB}=R_A$，$M_{AB}=M_A+R_Ax$

BC間（$a<x<a+b$）：$F_{BC}=R_A-P_1$，$M_{BC}=M_A+R_Ax-P_1(x-a)$

B）　$R_A=qa$，$M_A=-\dfrac{1}{2}qa^2-M_0$

AB間（$0<x<a$）：$F_{AB}=R_A-qx$，$M_{AB}=M_A+R_Ax-\dfrac{1}{2}qx^2$

BC間（$a<x<a+b$）：$M_{BC}=M_A+R_Ax-\dfrac{1}{2}qx^2+\dfrac{1}{2}q(x-a)^2$

BC間の曲げモーメントの別表現は

BC間（$a<x<a+b$）：$F_{BC}=R_A-qa=0$，$M_{BC}=M_A+R_Aa-\dfrac{1}{2}qa^2=-M_0$

問題9．図7A）からD）のはりのせん断力と曲げモーメントの式を書き下せ．また，支点AとBの反力R_AとR_Bを求めよ．分布荷重q，$q(x)$はすべて下向きである.

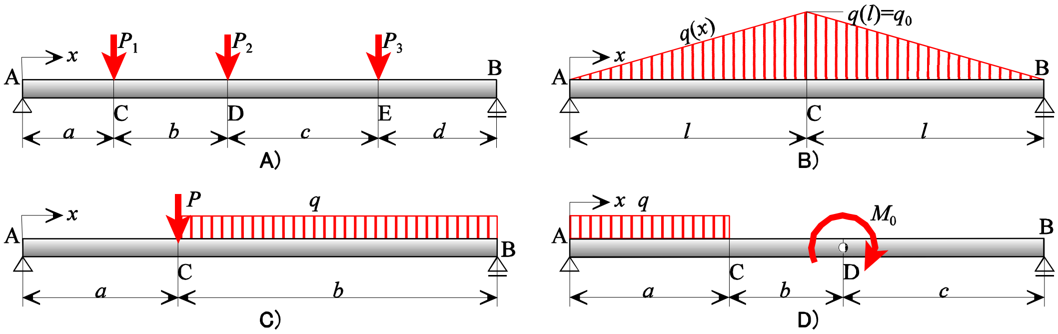


図7

ヒント：図7D）の系の式を求める際には，**発展例題4.25の別解**や**発展例題4.26**の考え方を使う.

Ans. いずれの場合も支点AとBの反力R_AとR_Bを上向きとする.

A）　AC間（$0<x<a$）：$F_{AC}=R_A$，$M_{AC}=R_Ax$

CD間（$a<x<a+b$）：$F_{CD}=R_A-P_1$，$M_{CD}=R_Ax-P_1(x-a)$

DE間（$a+b<x<a+b+c$）：$F_{DE}=R_A-P_1-P_2$，$M_{DE}=R_Ax-P_1(x-a)-P_2(x-a-b)$

EB間（$a+b+c<x<a+b+c+d$）：$F_{EB}=R_A-P_1-P_2-P_3$，$M_{EB}=R_Ax-P_1(x-a)-P_2(x-a-b)-P_3(x-a-b-c)$.

支点Aの反力R_Aは$M_{EB}|_{x=a+b+c+d}=0$から$R_A=\dfrac{(b+c+d)P_1+(c+d)P_2+dP_3}{a+b+c+d}$.

支点Bの反力R_Bは，力のつりあいから，$R_B=P_1+P_2+P_3-R_A$.

B)　分布力の式はAC間（$0<x<l$）で$q(x)=\dfrac{q_0}{l}x$，CB間（$l<x<2l$）で$q(x)=q_0-\dfrac{q_0}{l}(x-l)$.

AC間（$0<x<l$）: $F_{AC}=R_A-\dfrac{q_0}{2l}x^2$，$M_{AC}=R_Ax-\dfrac{q_0}{6l}x^3$

CB間（$l<x<2l$）: $F_{CB}=R_A-\dfrac{1}{2}q_0l-q_0(x-l)+\dfrac{q_0}{2l}(x-l)^2$，$M_{CB}=R_Ax-\dfrac{1}{6}q_0l^2-\dfrac{1}{2}q_0l(x-l)-\dfrac{1}{2}q_0(x-l)^2+\dfrac{q_0}{6l}(x-l)^3$

支点Aの反力R_Aは$M_{CB}|_{x=2l}=0$から$R_A=\dfrac{1}{2}q_0l$. 支点Bの反力R_Bは，$R_B=R_A=\dfrac{1}{2}q_0l$.

この問題の場合，分布力は$x=l$について左右対称なので，$x=l$についてせん断力は反対称，曲げモーメントは対称である. このことを理解しておけばAC間の式を書くだけで実用上十分である.

C)　AC間（$0<x<a$）: $F_{AC}=R_A$，$M_{AC}=R_Ax$

CB間（$a<x<a+b$）: $F_{CB}=R_A-P-q(x-a)$，$M_{CB}=R_Ax-P(x-a)-\dfrac{1}{2}q(x-a)^2$

支点Aの反力R_Aは$M_{CB}|_{x=a+b}=0$から$R_A=\dfrac{2Pb+qb^2}{2(a+b)}$. 支点Bの反力$R_B$は，$R_B=P+qb-R_A$.

D)　AC間（$0<x<a$）: $F_{AC}=R_A-qx$，$M_{AC}=R_Ax-\dfrac{1}{2}qx^2$

CD間（$a<x<a+b$）: $M_{CD}=R_Ax-\dfrac{1}{2}qx^2+\dfrac{1}{2}q(x-a)^2$

DB間（$a+b<x<a+b+c$）: $M_{DB}=R_Ax-\dfrac{1}{2}qx^2+\dfrac{1}{2}q(x-a)^2+M_0$

支点Aの反力R_Aは$M_{DB}|_{x=a+b+c}=0$から$R_A=\dfrac{qa(a+2b+2c)+2M_0}{2(a+b+c)}$. 支点Bの反力$R_B$は，$R_B=qa-R_A$.

CD間，DB間の曲げモーメントの別表現

CD間（$a<x<a+b$）: $F_{CD}=R_A-qa$，$M_{CD}=R_Ax-\dfrac{1}{2}qa^2-qa(x-a)$

DB間（$a+b<x<a+b+c$）: $F_{DB}=R_A-qa$，$M_{DB}=R_Ax-\dfrac{1}{2}qa^2-qa(x-a)+M_0$

問題10．図8A）からD）のはりのせん断力と曲げモーメントの式を書き下せ．また，支点AとBの反力R_AとR_Bを求めよ．分布荷重q，$q(x)$はすべて下向きである．

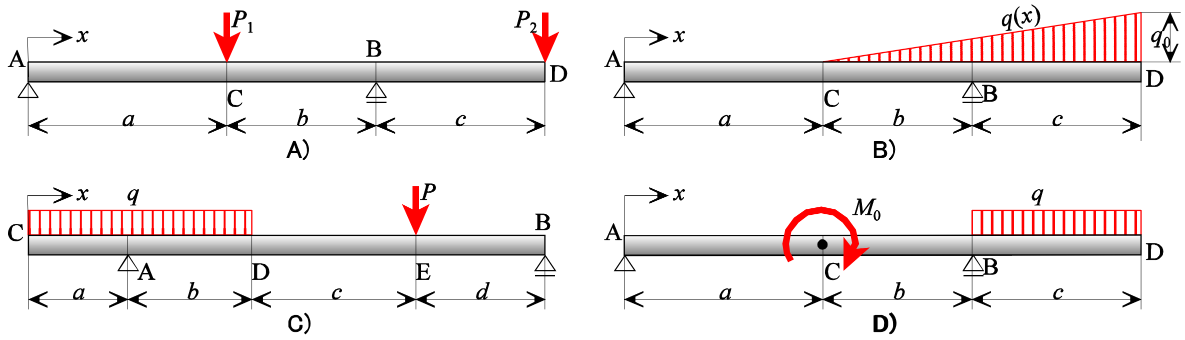


図8

ヒント：図8C)の系の式を求める際には，**発展例題4.25の別解**や**発展例題4.26**の考え方を使う．

Ans. いずれの場合も支点AとBの反力R_AとR_Bを上向きとする．

A)　AC間（$0<x<a$）：$F_{AC}=R_A$，$M_{AC}=R_A x$

CB間（$a<x<a+b$）：$F_{CB}=R_A-P_1$，$M_{CB}=R_A x-P_1(x-a)$

BD間（$a+b<x<a+b+c$）：$F_{BD}=R_A-P_1+R_B$，$M_{BD}=R_A x-P_1(x-a)+R_B(x-a-b)$

支点反力は$M_{BD}|_{x=a+b+c}=0$と力のつりあい$R_A+R_B-P_1-P_2=0$から$R_A=\dfrac{P_1 b-P_2 c}{a+b}$，$R_B=P_1+P_2-R_A$．

B)　分布力の式はAC間（$0<x<a$）で$q(x)=0$，CBD間（$a<x<a+b+c$）で$q(x)=\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)$．

AC間（$0<x<a$）：$F_{AC}=R_A$，$M_{AC}=R_A x$

CB間（$a<x<a+b$）：$F_{CB}=R_A-\dfrac{1}{2}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^2$，$M_{CB}=R_A x-\dfrac{1}{6}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^3$

BD間（$a+b<x<a+b+c$）：$F_{BD}=R_A-\dfrac{1}{2}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^2+R_B$，$M_{BD}=R_A x-\dfrac{1}{6}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^3+R_B(x-a-b)$

支点反力は$M_{BD}|_{x=a+b+c}=0$と力のつりあい$R_A+R_B-\dfrac{1}{2}q_0(b+c)=0$から$R_A=\dfrac{q_0(b+c)(b-2c)}{6(a+b)}$，$R_B=\dfrac{1}{2}q_0(b+c)-R_A$．

C)　CA間（$0<x<a$）：$F_{CA}=-qx$，$M_{CA}=-\dfrac{1}{2}qx^2$

AD間（$a<x<a+b$）：$F_{AD}=-qx+R_A$，$M_{AD}=-\dfrac{1}{2}qx^2+R_A(x-a)$

DE間（$a+b<x<a+b+c$）：$M_{DE}=-\dfrac{1}{2}qx^2+R_A(x-a)+\dfrac{1}{2}q(x-a-b)^2$

EB間（$a+b<x<a+b+c$）：$M_{EB}=-\dfrac{1}{2}qx^2+R_A(x-a)+\dfrac{1}{2}q(x-a-b)^2-P(x-a-b-c)$

支点反力は$M_{EB}|_{x=a+b+c+d}=0$と力のつりあい$R_A+R_B-q(a+b)-P=0$から$R_A=\dfrac{q(a+b)(a+b+2c+2d)-2Pd}{2(b+c+d)}$，

$R_B=q(a+b)+P-R_B$．

DE間, EB間の曲げモーメントの別表現

DE間$(a+b<x<a+b+c)$: $F_{DE}=-q(a+b)+R_A$, $M_{DE}=-\frac{1}{2}q(a+b)^2+R_A(x-a)-q(a+b)(x-a-b)$

EB間$(a+b+c<x<a+b+c+d)$: $F_{EB}=-q(a+b)+R_A-P$, $M_{EB}=-\frac{1}{2}q(a+b)^2+R_A(x-a)-q(a+b)(x-a-b)-P(x-a-b-c)$

D) AC間$(0<x<a)$: $F_{AC}=R_A$, $M_{AC}=R_A x$

CB間$(a<x<a+b)$: $F_{CB}=R_A$, $M_{CB}=R_A x+M_0$

BD間$(a+b<x<a+b+c)$: $F_{BD}=R_A+R_B-q(x-a-b)$, $M_{BD}=R_A x+M_0+R_B(x-a-b)-\frac{1}{2}q(x-a-b)^2$

支点反力は$M_{BD}|_{x=a+b+c}=0$と力のつりあい$R_A+R_B-qc=0$から$R_A=\frac{qc^2-2M_0}{2(a+b)}$, $R_B=qc-R_A$.

問題11. **発展例題4.36**の図4.68において, 支点AとCをともに固定支点に変更した. 部材ACについて静力学的つりあい式を書け.

Ans.

ねじりについて: $T_C-T_A+Tb=0$

曲げについて: $R_A+R_C-P=0$(力)

$M_A-M_C+R_A l+Pc-P(l-a)=0$(モーメント)

補足:支点AとCが固定支点なので, 支点AとCに固定モーメントM_AとM_Cが発生する. そのため, 部材③のフリーボディダイヤグラムは図9のようになる. 図4.69と比べると, 黒い二重矢印線で表示された固定モーメントが追加されている. 曲げについての二つの式からわかるように, 未知の反力や固定モーメントの数が式の数より多い. このような場合の反力や固定モーメントの求め方は第6章で慣れる.

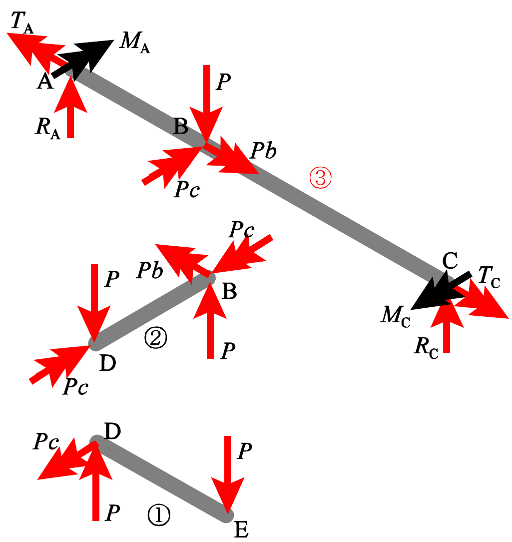


図9

第5章　組み合わせ応力

次章までに調べた軸力，横荷重，ねじりモーメントなどが機械要素に単独で作用することは少なく，これらが同時に作用する（組み合わせ負荷という）ことが一般的で，このような負荷条件の下で機械要素設計が行われる．特に，主応力や最大せん断応力は破損の法則とも関連して重要な応力である．

ここでは，組み合わせ応力状態に関連して主応力や主軸の求め方や軸力，横荷重，ねじりモーメントなどが同時に作用する場合の強度設計に関して例題を通して学ぶ．

基本事項1（応力成分の呼び方）

1．応力は垂直応力とせん断応力があり，これらを区別するために前者にシンボルσを，後者にシンボルτを用いて区別する．

2．垂直応力σの記述では添字を一つ使って発生面の法線方向を指定し，せん断応力τでは添字を二つ使って発生面の法線方向と応力の方向を指定する（図5.1）．面や方向の指定には座標系を用いる．シンボルと添字で表現した応力を応力成分という．

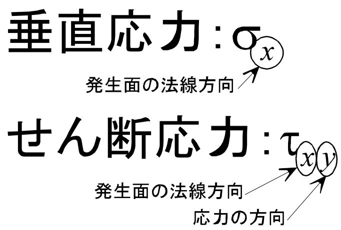


図5.1

3．正の応力とは，正の面の正の向きの応力，負の面の負の向きの応力をいう（図5.2（A））．負の応力とは，正の面の負の向きの応力，負の面の正の向きの応力をいう（図5.2（B））．正の面とは，法線が座標軸と同じ面をいう．正の向きとは，座標軸の向きと同じ向きをいう．

＊図5.2の四角形は物体ではなく，物体内の微小部分を表している．以下の説明でも同じであるので頭の隅っこに置いてください．

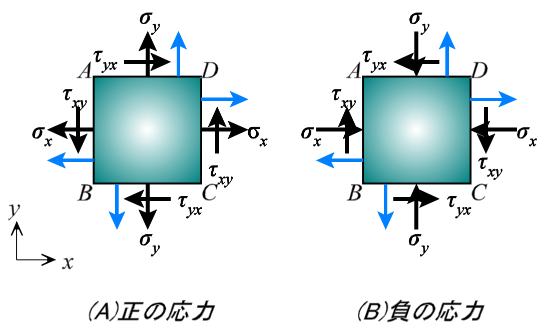


図5.2

> **基本例題5.01**　応力状態が図5.3の左端の図のようである．
> 1）応力①から④のうち，せん断応力はどれか．
> 2）応力①から④は（A）から（D）の座標系においてどのように表現されるか．とシンボルと添字を用いて答えよ．また，それらの正負を答えよ．
> **指針**　上に挙げた基本事項に従う．

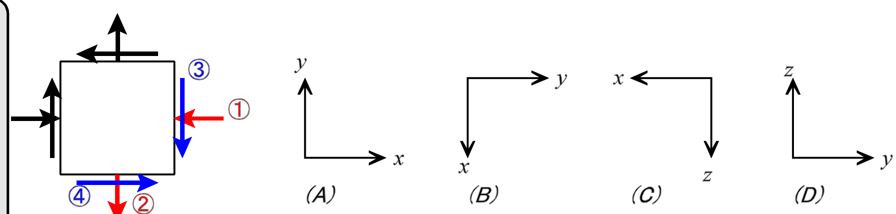


図5.3

解答　1）せん断応力は③と④．2）は以下の表の通りである．

	(A)	(B)	(C)	(D)
①	σ_x，負	σ_y，負	σ_x，負	σ_y，負
②	σ_y，正	σ_x，正	σ_z，正	σ_z，正
③	τ_{xy}，負	τ_{yx}，正	τ_{xz}，負	τ_{yz}，負
④	τ_{yx}，負	τ_{xy}，正	τ_{zx}，負	τ_{zy}，負

■

解説：2)の結果から，①と②の垂直応力の正負は座標系とは無関係に定まるが，③と④のせん断応力の正負は座標系によって決まることに気付こう．

基本例題5.02　応力状態が図5.4に左端の図のようである．応力①から⑥は(A)から(C)の座標系においてどのように表現されるか．シンボルと添字を用いて答えよ．また，それらの正負を答えよ．

指針　三次元の応力状態であるが，ルールは同じである．

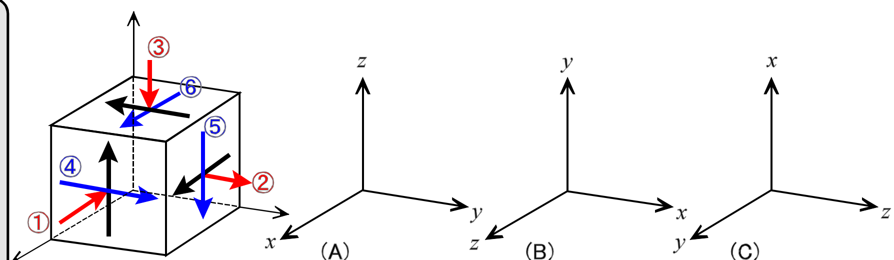


図5.4

解答　以下の表の通りである．

	(A)	(B)	(C)
①	σ_x，負	σ_z，負	σ_y，負
②	σ_y，正	σ_x，正	σ_z，正
③	σ_z，負	σ_y，負	σ_x，負
④	τ_{xy}，正	τ_{zx}，正	τ_{yz}，正
⑤	τ_{yz}，負	τ_{xy}，負	τ_{zx}，負
⑥	τ_{zx}，正	τ_{yz}，正	τ_{xy}，正

■

基本事項2（傾斜した面での応力，主応力・最大せん断応力）

二次元の場合，

1．図5.5のように法線がx軸と反時計回りに角θをなす面の垂直応力σとせん断応力τは

$$\sigma=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

から計算できる．

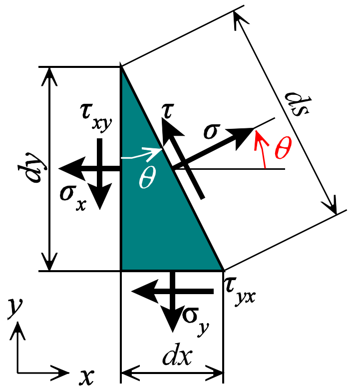


図5.5

2．主応力は二つ存在し，これらをσ_1，σ_2とすると，

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\qquad \text{（複号同順）}$$

から計算でき，σ_1の方向θ_nは

$$\tan 2\theta_n=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

から求められる．

3．最大せん断応力τ_{max}は

$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$$

である．ただし，主せん断応力という場合には

$$\left.\begin{matrix}\tau_1\\ \tau_2\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \qquad \text{（複号同順）}$$

となる．

基本例題5.03　ある点の応力が$\sigma_x=1000\,MPa$，$\sigma_y=-200\,MPa$，$\tau_{xy}=600\,MPa$である．法線がx軸から45°反時計回りに傾斜した面の垂直応力とせん断応力を求めよ．また，法線が30°時計回りに傾斜した面の垂直応力とせん断応力を求めよ．

指針　傾斜した面の応力の式に当てはめて計算する．

解答　1）法線がx軸から45°反時計回りに傾斜した面

$2\theta=2\times45°=90°$であるから，

$$\sigma=\frac{1000+(-200)}{2}+\frac{1000-(-200)}{2}\times\cos90°+600\times\sin90°=1000\,MPa$$

$$\tau=-\frac{1000-(-200)}{2}\times\sin90°+600\times\cos90°=-600\,MPa$$

2）法線が30°時計回りに傾斜した面

時計回りに30°なので，反時計回りに$-30°$になる．ゆえに$2\theta=-60°$であるから，

$$\sigma=\frac{1000+(-200)}{2}+\frac{1000-(-200)}{2}\times\cos(-60°)+600\times\sin(-60°)$$
$$=181MPa$$

$$\tau=-\frac{1000-(-200)}{2}\times\sin(-60°)+600\times\cos(-60°)=-220\,MPa$$

■

解説：反時計回りの角度に正符号をつけるので，時計回りの場合は負の符号をつける．

基本例題5.04　ある点の応力が$\sigma_x=1000\,MPa$，$\sigma_y=-200\,MPa$，$\tau_{xy}=600\,MPa$である．主応力とその作用方向，最大せん断応力を求めよ．

指針　主応力と最大主応力の式に当てはめて計算する．

解答　主応力は，

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{1000+(-200)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1000-(-200)}{2}\right)^2+600^2}=\begin{cases}1250\,MPa\\ -449\,MPa\end{cases}$$

最大せん断応力は

$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{1000-(-200)}{2}\right)^2+600^2}=849\,MPa$$

主応力σ_1の方向は

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\times 600}{1000-(-200)} = 1$$

から$2\theta_n=45°$，すなわち，$\theta_n=22.5°$．ゆえに，主応力σ_1の方向はx軸と反時計回りに22.5°をなす．■

> 解説：主応力σ_1の方向を主軸または主応力軸といい，主応力の発生面を主応力面という．主応力の方向とは，主応力面の法線方向である．

> **基本例題5.05** ある点の応力が$\sigma_x=-1000\ MPa$，$\sigma_y=200\ MPa$，$\tau_{xy}=-600\ MPa$である．主応力と主軸，最大せん断応力を求めよ．
> **指針** 主応力と最大主応力の式に当てはめて計算する．

解答 主応力は，

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{-1000+200}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1000-200}{2}\right)^2+(-600)^2} = \begin{cases}449\ MPa\\ -1250\ MPa\end{cases}$$

最大せん断応力は

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{-1000-200}{2}\right)^2+(-600)^2} = 849\ MPa$$

また，

$$\tan 2\theta_n = \frac{2\times(-600)}{-1000-200} = 1$$

から$2\theta_n=45°+180°=225°$，すなわち，$\theta_n=112.5°$．ゆえに，主軸x軸と反時計回りに112.5°をなす．■

> 解説1：**基本例題5.04**と比べると，共に$\tan 2\theta_n=1$であるにもかかわらず，角度が22.5°と112.5°になっていることに気付くだろう．これは，$2\tau_{xy}/(\sigma_x-\sigma_y)$の分母と分子の符号による．図5.6のように横軸に$\sigma_x-\sigma_y$，縦軸に$2\tau_{xy}$をとってみると，**基本例題5.04**の場合は分母分子共に正なので$2\theta_n$は第一象限の角度を表し，**基本例題5.05**の場合は共に負なので図5.6の第三象限の角度を表すことになる．それゆえ，**基本例題5.05**解答の$2\theta_n$は**基本例題5.04**解答の$2\theta_n$に180°加えてある．まとめておくと，
>
> $\tan 2\theta_n>0$かつ$\sigma_x-\sigma_y>0$なら$2\theta_n$は第一象限
>
> $\tan 2\theta_n>0$かつ$\sigma_x-\sigma_y<0$なら$2\theta_n$は第三象限
>
> $\tan 2\theta_n<0$かつ$\sigma_x-\sigma_y>0$なら$2\theta_n$は第四象限
>
> $\tan 2\theta_n<0$かつ$\sigma_x-\sigma_y<0$なら$2\theta_n$は第二象限

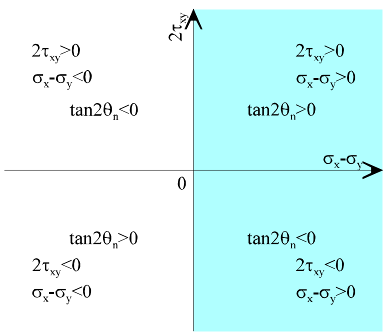


図5.6

ちなみに，電卓の逆三角関数の機能を使って$2\theta_n$を求めると，

$\tan 2\theta_n>0$なら$0°<2\theta_n<90°$の角度（第一象限）

$\tan 2\theta_n<0$なら$-90°<2\theta_n<0°$の角度（第四象限）

を表示する．つまり，電卓の逆三角関数は図5.6の右半分だけをみていることになる．したがって，$\sigma_x-\sigma_y<0$なら電卓の答えに180°を加えれば正しい$2\theta_n$が得られる．

発展例題5.06　基本事項2の1．に挙げた二つの式

$$\sigma=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

を導け．

指針　三角形の要素にはたらく力のつりあい式を立てて導く．

解答　図5.5のような三角形の要素にはたらく力のつりあいは

x方向：$\sigma\, ds\cos\theta-\tau\, ds\sin\theta=\sigma_x\, dy+\tau_{xy}\, dx$

y方向：$\sigma\, ds\sin\theta+\tau\, ds\cos\theta=\sigma_y\, dx+\tau_{xy}\, dy$

図から，$ds\sin\theta=dx$，$ds\cos\theta=dy$なので，

x方向：$\sigma\cos\theta-\tau\sin\theta=\sigma_x\cos\theta+\tau_{xy}\sin\theta$

y方向：$\sigma\sin\theta+\tau\cos\theta=\sigma_y\sin\theta+\tau_{xy}\cos\theta$

この二つの式をσとτについて解くと求める式が得られる．■

発展例題5.07　基本事項2の2．に挙げた二つの式を導け．

指針　基本事項2の1．のσの式をθで微分した式をゼロにおいてσが極値をとるθを求め，三角関数の公式を使って導出する．

解答　基本事項2の1．のσの式をθで微分してゼロに置くと，

$$\frac{d\sigma}{d\theta}=-(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta+2\tau_{xy}\cos 2\theta=0.$$

この式を満たすθをθ_nで表すと，**基本事項2**の2．の二番目の式

$$\tan 2\theta_n=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

が得られる．この式から$\sin 2\theta_n$と$\cos 2\theta_n$は

$$\sin 2\theta_n=\pm\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}},\quad \cos 2\theta_n=\pm\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}}\ \text{（複号同順）}$$

となるので，これらを**基本事項2**の1．のσの式に代入すれば**基本事項2**の2．の最初の式が得られる．■

発展例題5.08 次の関係を示せ．

1）最大せん断応力は主応力差の1/2である．

2）主応力面ではせん断応力はゼロである．

3）最大せん断応力面と主応力面は45°をなす．

4）最大せん断応力面の垂直応力は主応力の平均値である．

指針 3）は**基本事項2**の2．の二番目の式をθで微分してゼロに置くと最大せん断応力面の法線方向を求める式が得られ，これと主軸を求める式との積が -1 になることを示す．

解答 1）主応力の式

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\qquad\text{（複号同順）}$$

から$\sigma_1-\sigma_2$を作ると，

$$\sigma_1-\sigma_2=2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}=2\tau_{\max}\Leftrightarrow\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2).$$

ゆえに，最大せん断応力は主応力差の1/2である．

2）**発展例題5.07**の$\sin2\theta_n$と$\cos2\theta_n$を**基本事項2**の2．の二番目の式に代入すると$\tau=0$となる．ゆえに，主応力面ではせん断応力はゼロである．

3）**基本事項2**の1．のτの式をθで微分してゼロに置くと，

$$\frac{d\tau}{d\theta}=-(\sigma_x-\sigma_y)\cos2\theta-2\tau_{xy}\sin2\theta=0.$$

この式を満たすθをθ_tで表すと，最大せん断応力面の法線方向は

$$\tan2\theta_t=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}.$$

$\tan2\theta_n$との積をとると，

$$\tan2\theta_t\tan2\theta_n=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=-1.$$

すなわち，傾き$2\theta_n$の直線と$2\theta_t$の直線は90°をなす．ゆえに，最大せん断応力面と主応力面は45°をなす．

4）$\sin2\theta_t$と$\cos2\theta_t$を求めると

$$\sin2\theta_t=\mp\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}},\quad\cos2\theta_n=\pm\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}}\ \text{（複号同順）}$$

なので，これらを**基本事項2**の1．のσの式に代入すると

$$\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2).$$

ゆえに，最大せん断応力面の垂直応力は主応力の平均値である．■

基本事項3（モールの応力円）

1．**基本事項2**の1．に挙げた二つの式

$$\sigma=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta+\tau_{xy}\sin2\theta,\quad\tau=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\theta+\tau_{xy}\cos2\theta$$

から

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2$$

となる．いま，横軸にσ軸，縦軸にτ軸をとったσ−τ平面を考えると，この式はσ−τ平面内の座標$((\sigma_x+\sigma_y)/2,0)$を中心とする半径$\sqrt{((\sigma_x-\sigma_y)/2)^2+\tau_{xy}^2}$の円の方程式に他ならない．σ−τ平面内のこのような円をモールの応力円という．ただし，τ軸は下向きが正である．

2．描き方は次の通り（図5.7）．

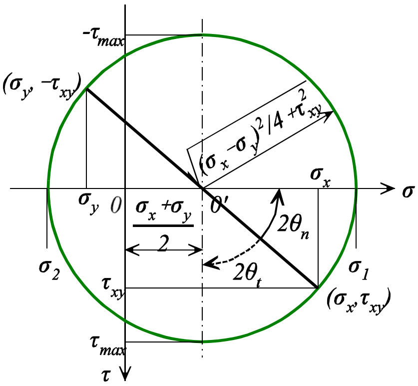


図5.7

1）横軸にσ軸，縦軸に下向きにτ軸をとってσ−τ平面をつくり，(σ_x,τ_{xy})と$(\sigma_y,-\tau_{xy})$の二点をプロットする．

2）1）の二点を直線で結び，σ軸との交点O'を求める．

3）2）で求めた点O'を中心に1）でプロットした二点を通る円を描く．

4）σ軸と円との二つの交点が主応力を表し，大きいほうの主応力がσ_1，小さいほうの主応力がσ_2である．

5）最大せん断応力はτ軸の最大値である．

基本例題5.09　ある点の応力が$\sigma_x=1000\ MPa$，$\sigma_y=-200\ MPa$，$\tau_{xy}=600\ MPa$である．主応力と主軸，最大せん断応力を求めよ．

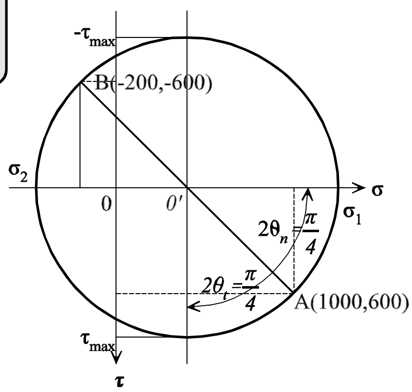


図5.8

解 答　1）横軸にσ軸，縦軸に下向きにτ軸をとってA$(\sigma_x,\tau_{xy})=(1000,600)$とB$(\sigma_y,-\tau_{xy})=(-200,-600)$の二点をプロットする．

2）A，Bを結ぶ線分とσ軸との交点O'は(400,0)である．

3）O'(400,0)を中心にA，Bを通る円を描く．円の半径は849．

モールの応力円は図5.8のようになり，この図から

$\sigma_1=1249\ MPa$，$\sigma_2=-449\ MPa$（σ軸と円との交点のσ座標は1250と−449）

最大せん断応力τ_{max}は849 MPa．

主軸は，線分O'Aとσ軸とのなす角が反時計回りに45°であることから，反時計回りに$\theta_n=22.5°$．

■

解説：線分O'Aを基準に線分O'σ_1を見たときの角が$2\theta_n$であることから求められる．この関係は$\tan 2\theta_n$の式を少し書き直して

$$\tan 2\theta_n=\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}$$

とすると，よくわかる．ちなみに，最大せん断応力面の法線方向は，線分O'Aを基準にτ軸の正の側を見たときの角度が$2\theta_t$であることから求められる．この例題の場合，$2\theta_t$は時計回りに45°であることから，最大せん断応力面の法線はx軸から時計回りに$\theta_t=22.5°$．

発展例題5.10　基本例題5.09の応力状態を時計回りに90°傾斜した座標系からみたとき，主応力と主軸，最大せん断応力とこの面の法線を求めよ．

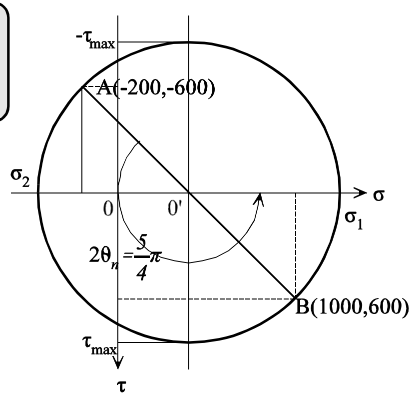


図5.9

解答　90°時計回りに傾斜した座標系では，$\sigma_x=-200\,MPa$，$\sigma_y=1000\,MPa$，$\tau_{xy}=-600\,MPa$となるので，モールの応力円は図5.9のようになる．この図から$\sigma_1=1249\,MPa$，$\sigma_2=-449\,MPa$．最大せん断応力τ_{max}は$849\,MPa$．

主軸は，線分O'Aとσ軸とのなす角が反時計回りに45°+180°=225°であることから，反時計回りにθ_n=112.5°．$2\theta_t$は反時計回りに135°であることから，最大せん断応力面の法線はx軸から反時計回りにθ_t=67.5°．■

発展例題5.11　基本例題5.09と**発展例題5.10**で求めた主軸は一致していることを示せ．また，最大せん断応力面の法線も一致していることを示せ．

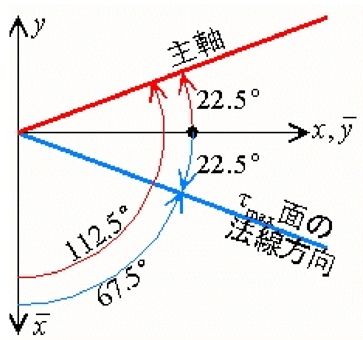


図5.10

解答　図5.10に，主軸を実線で，最大せん断応力面の法線方向を破線で示す．この図から，主軸は一致している．また，最大せん断応力面の法線も一致していることがわかる．なお，区別のため，**発展例題5.10**の座標系を$\bar{x}$，$\bar{y}$で表示した．■

解説1：いつも忘れがちになるのはx軸を基準に面の法線を考えているということ．
解説2：応力成分は設定する座標系によって名前が変わり，正負も入れ替わることがあるが，主応力や最大せん断応力の発生面や方向は座標系によらない．

基本事項4（組み合わせ負荷と設計）

1．組み合わせ負荷とは，たとえば，棒がねじりモーメントと横荷重を同時に受けるような負荷状態をいう．

2．組み合わせ負荷の状態での設計のためには，弾性破損に関する知識が必要であるが，ここでは，最大主応力に基づくもの，最大せん断応力に基づくものと

$$\sigma_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

で定義されるミーゼス応力（von Mises stress）σ_Mに基づくものについて例題演習を通して比較する．なお，σ_Mの式でσ_1，σ_2，σ_3は三次元応力状態での三つの主応力であるが，材料力学の範囲で求めることにする．

3．設計においては，組み合わせ負荷状態にある対象に発生する最大主応力，最大せん断応力，ミーゼス応力を計算し，それらの応力が許容応力を超えないように対象の寸法などを決める．許容応力は一軸負荷の状態での垂直応力の許容値σ_aとせん断応力の許容値τ_aを用いる．

4．せん断応力の許容値τ_aは，一つの主応力がσ_aで残りの主応力がゼロであるとした場合に発生する最大せん断応力，すなわち，$\tau_a=\sigma_a/2$である．

基本例題5.12　図5.11のような曲げとねじりを同時に受ける円形断面棒の表面の主応力の最大値を曲げモーメントとねじりモーメントを用いて表せ.

指針　曲げ応力とねじりのせん断応力が同時に発生している. これらの応力の最大値は棒の表面に発生しているので, 表面を二次元の面として考えて二つの主応力を求める. もう一つこの面に垂直な主応力がある.

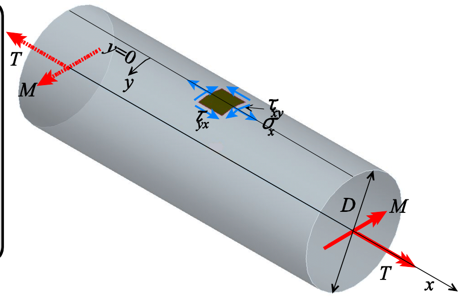


図5.11

解答　円柱面に沿ってy軸を定める. 曲げ応力σ_xとねじりのせん断応力τ_{xy}の最大値は棒の表面で生じ

$$\sigma_x=\frac{32M}{\pi d^3},\quad \tau_{xy}=\frac{16T}{\pi d^3}$$

である. ゆえに, この面内の二つの主応力は公式を用いて

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{16M}{\pi d^3}\pm\sqrt{\left(\frac{16M}{\pi d^3}\right)^2+\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2}=\frac{16}{\pi d^3}\left(M\pm\sqrt{M^2+T^2}\right)\quad（複号同順）$$

である. 一方, 三次元応力状態なのでこの面に垂直な応力も存在するはずであるが, 面に垂直な力が作用していないので面に垂直な応力はゼロである. この応力も主応力なので, これをσ_3で表すと,

$$\sigma_3=0$$

である. ■

解説1：円柱面上で, 軸方向座標をx, 円周方向座標をyとし, 円柱面に垂直な座標をzで表すと, この三つの座標で三次元を表示できる. これらの座標を用いて表示される応力成分はσ_x, σ_y, σ_zの三つの垂直応力成分とτ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}の三つのせん断応力成分である.

解説2：三次元主応力を求める式は

$$\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma\end{vmatrix}=0$$

である（詳細な説明は材料力学の教科書を参照）. 二次元応力状態ではσ_x, σ_y, τ_{xy}だけであるから主応力σは

$$\left[\sigma^2-(\sigma_x+\sigma_y)\sigma+\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2\right]\sigma=0$$

の根として計算され

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\qquad（複号同順）$$

$$\sigma_3=0$$

になる. σ_1とσ_2は**基本事項2.** の2. に挙げた二次元主応力の公式そのもので, σ_1とσ_2の主軸はx-y面内にある. 三次元主応力状態でも三つの主軸は直交するので, 三番目の主応力σ_3の主軸はx-y面に垂直な方向, すなわちz軸も主軸である.

解説3：これら三つの主応力に対応するひずみは，Eをヤング率，νをポアソン比とすると，

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}(\sigma_1-\nu\sigma_2-\nu\sigma_3),\ \varepsilon_2=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_1+\sigma_2-\nu\sigma_3),\ \varepsilon_3=\frac{1}{E}(-\nu\sigma_1-\nu\sigma_2+\sigma_3)$$

である．

基本例題5.13　図5.11のような曲げとねじりを同時に受ける棒の1）最大主応力，2）最大せん断応力，3）ミーゼス応力を曲げモーメントとねじりモーメントを用いて表せ．

解答　**基本例題5.12**の結果を再記すると，

$$\sigma_1=\frac{16}{\pi d^3}\left(M+\sqrt{M^2+T^2}\right),\ \sigma_2=\frac{16}{\pi d^3}\left(M-\sqrt{M^2+T^2}\right),\ \sigma_3=0$$

であるから，$\sigma_1>\sigma_3>\sigma_2$の関係にある．

1）最大主応力はσ_1．

2）最大せん断応力は最大主応力と最小主応力の差の1/2なので，

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=\frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2+T^2}.$$

3）ミーゼス応力σ_Mは**基本事項4**．の2．に挙げたミーゼス応力の式に三つの主応力を代入して計算すると，

$$\begin{aligned}2\sigma_M^2&=(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\\&=\left(\frac{16}{\pi d^3}\right)^2 4(M^2+T^2)+\left(\frac{16}{\pi d^3}\right)^2\left(M-\sqrt{M^2+T^2}\right)^2+\left(\frac{16}{\pi d^3}\right)^2\left(M+\sqrt{M^2+T^2}\right)^2\end{aligned}$$

から

$$\sigma_M=\frac{16}{\pi d^3}\sqrt{4M^2+3T^2}.$$

■

基本例題5.14　図5.11のような曲げとねじりを同時に受ける棒の1）最大主応力，2）最大せん断応力，3）ミーゼス応力に基づいて直径dを決めるための式を求めよ．許容応力をσ_aとする．

解答　1）最大主応力に基づく設計

最大主応力が許容応力を超えないように設計するので，$\sigma_1\leq\sigma_a$となるように直径dを決める．すなわち，

$$d^3\geq\frac{16}{\pi\sigma_a}\left(M+\sqrt{M^2+T^2}\right).$$

2）最大せん断応力に基づく設計

許容せん断応力はσ_aのみが主応力であるとすると，$\tau_a=\sigma_a/2$となるから，直径dは

$$d^3\geq\frac{16}{\pi\tau_a}\sqrt{M^2+T^2}=\frac{32}{\pi\sigma_a}\sqrt{M^2+T^2}.$$

3）ミーゼス応力に基づく設計

ミーゼス応力が許容応力を超えないように設計するので，$\sigma_M \le \sigma_a$となるように直径dを決める．すなわち，

$$d^3 \ge \frac{16}{\pi\sigma_a}\sqrt{4M^2+3T^2} = \frac{32}{\pi\sigma_a}\sqrt{M^2+\frac{3}{4}T^2}.$$

■

応用例題5.15　基本例題5.14で求めた式を用いて，M=1 kNm，T=1kNm，降伏応力σ_Y=240 MPa，安全率f=3として，三つの設計基準による直径を比較せよ．

解答　許容応力は$\sigma_a=\sigma_Y/f=240/3=80$ MPaなので，

1）最大主応力に基づく設計では

$$d^3 \ge \frac{16}{\pi\times 80\times 10^6}\left(1+\sqrt{1^2+1^2}\right)\times 10^3 = 53.6\times 10^{-3}\ m = 53.6\ mm.$$

2）最大せん断応力に基づく設計では，$\tau_a=\sigma_a/2=40$ MPaとして，

$$d^3 \ge \frac{16}{\pi\times 40\times 10^6}\sqrt{1^2+1^2}\times 10^3 = 56.5\times 10^{-3}\ m = 56.5\ mm.$$

3）ミーゼス応力に基づく設計では

$$d^3 \ge \frac{16}{\pi\times 80\times 10^6}\sqrt{4\times 1^2+3\times 1^2}\times 10^3 = 55.3\times 10^{-3}\ m = 55.3\ mm.$$

■

解説：弾性破損（elastic failure）について

ここでは詳細は述べないが，弾性破損についてはいろいろな説がある．代表的なものとして

1）最大主応力による説

2）最大せん断応力による説

3）せん断ひずみエネルギによる説

である．いずれの説も，引張試験など材料試験の結果を有効に用いて三次元応力状態にある物体の弾性破損を推定するためのものであり，機械要素設計にも適用される．1）は脆性材料に対して適用され，2）と3）は金属材料のような延性材料に対して適用される．2）の最大せん断応力は，三次元応力状態においては最大主応力と最小主応力の差の1/2である．3）のせん断ひずみエネルギのよる説からはミーゼス応力が導かれ，単純せん断の場合の降伏応力$\tau_Y=\sigma_Y/\sqrt{3}$も導かれる．金属材料のような延性材料からなる機械部品の設計にはミーゼス応力を計算して設計することが一般的である．

応用例題5.16　図5.12のような軸荷重P=200 kN，ねじりモーメントT=50kNを受けるパイプの厚さtを決定せよ．厚みの中央線の直径D=400 mm，降伏応力σ_Y=240 MPa，安全率f=3とする．

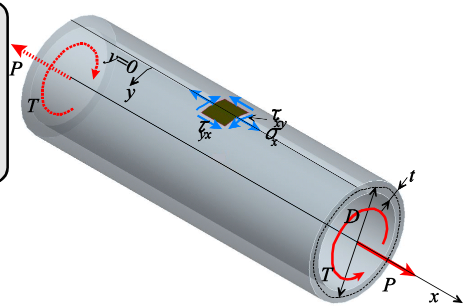


図5.12

解答　許容応力は

$\sigma_a=\sigma_Y/f=240/3=80$ MPa，$\tau_a=40$ MPa.

薄肉を仮定するとパイプの断面積は$A=\pi Dt$であるので軸方向応力は

$$\sigma_x=\frac{P}{A}=\frac{P}{\pi Dt}.$$

ねじりのせん断応力は中央線が囲む面積が$S=\pi D^2/4$であるから，薄肉断面の式から

$$\tau_{xy}=\frac{T}{2St}=\frac{2T}{\pi D^2 t}.$$

$\sigma_y=0$であるから，二次元応力状態と考えると，主応力は

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\pi Dt}\left(P\pm\sqrt{P^2+\frac{16T^2}{D^2}}\right)\qquad \text{（複号同順）},\ \sigma_3=0.$$

であるので，$\sigma_1>\sigma_3>\sigma_2$の関係にある.

最大せん断応力は

$$\tau_{\max}=\frac{1}{2\pi Dt}\sqrt{P^2+\frac{16T^2}{D^2}}.$$

ミーゼス応力は

$$\sigma_M=\frac{1}{\pi Dt}\sqrt{P^2+\frac{12T^2}{D^2}}.$$

1）最大主応力に基づく設計

$$t\geq\frac{1}{2\pi D\sigma_a}\left(P+\sqrt{P^2+\frac{16T^2}{D^2}}\right)$$

から$t\geq 3.68\times10^{-3}\ m=3.68\ mm$.

2）最大せん断応力に基づく設計

$$t\geq\frac{1}{2\pi D\tau_a}\sqrt{P+\frac{16T^2}{D^2}}=\frac{1}{\pi D\sigma_a}\sqrt{P^2+\frac{16T^2}{D^2}}$$

から$t\geq 5.36\times10^{-3}\ m=5.36\ mm$.

3）ミーゼス応力に基づく設計

$$t\geq\frac{1}{\pi D\sigma_a}\sqrt{P^2+\frac{12T^2}{D^2}}$$

から$t\geq 4.75\times10^{-3}\ m=4.75\ mm$. ■

発展例題5.17　図5.13のような，二つのベルト車を使った動力伝達システムの軸の直径を，最大せん断応力およびミーゼス応力に基づいて，定めよ．条件は以下の通りである．

ベルト車C：直径D_C=600 mm，ベルト車D：直径D_D=400 mm

ベルトの張力：P_{1C}=700 kN，P_{2C}=200 kN，P_{1D}=1000 kN

その他の条件：l_1=400 mm，l_2=600 mm，l_3=300 mm.

AとBは単純支持されている．ベルト車の自重は無視する．

降伏応力σ_Y=240 MPa，安全率f=3.

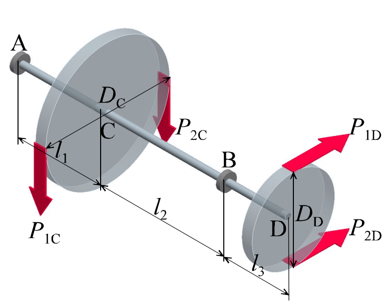


図5.13

解答　まず，ベルト張力P_{2D}を定める．ベルト車に作用するねじりモーメントが等しくなければならないので，

$$(P_{1C}-P_{2C})\times\frac{D_C}{2}=(P_{1D}-P_{2D})\times\frac{D_D}{2}$$

が成り立つから，

$$P_{2D}=P_{1D}-(P_{1C}-P_{2C})\frac{D_C}{D_D}=250\ kN.$$

ねじりモーメントは

$$T_{AC}=0,\ T_{CB}=T_{BD}=(P_{1C}-P_{2C})\times\frac{D_C}{2}=150\ kNm.$$

曲げモーメントを求めるために，垂直面内の横荷重P_Cと水平面内の横荷重P_Dはベルト張力の合力として求められるので，

$$P_C=P_{1C}+P_{2C}=900\ kN,$$

$$P_D=P_{1D}+P_{2D}=1450\ kN.$$

横荷重を受けるはりモデルとBMDは図5.14のようになり，最大曲げモーメント$M_{V\max}$はCで，$M_{H\max}$はBで生じ，その値は

$$M_{V\max}=\frac{l_1 l_2}{l_1+l_2}P_C=216\ kNm,$$

$$M_{H\max}=-l_3 P_D=-435\ kNm.$$

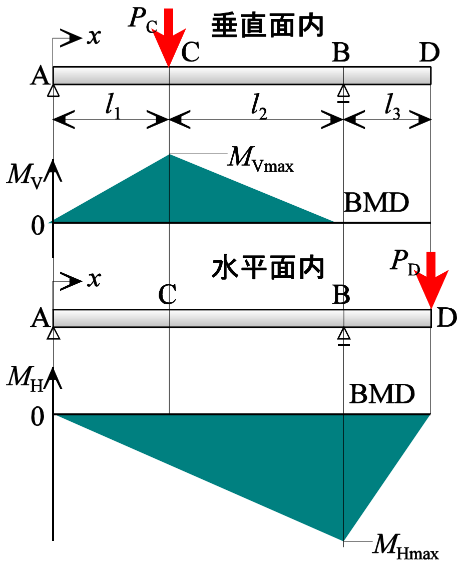


図5.14

点CでのM_Hと点BでのM_Vは，それぞれ，

$$M_H=-\frac{l_1 l_3}{l_1+l_2}P_D=-174\ kNm,$$

$$M_V=0$$

となるので，点CとBの合曲げモーメントは

$$M_C=\sqrt{M_{V\max}^2+M_H^2}=278\ kNm,\ M_B=\sqrt{M_V^2+M_{H\max}^2}=435\ kNm$$

となり，設計上使用する曲げモーメントは$M_B=435\ kNm$となる．

以上ですべての条件が確定したので，**基本例題5.14**で求めた式を使って軸径を決める．

1)最大せん断応力に基づく設計

$$d^3\geq\frac{16}{\pi\tau_a}\sqrt{M^2+T^2}=\frac{32}{\pi\sigma_a}\sqrt{M^2+T^2}.$$

から$d\geq 58.6\times 10^{-3}\ m=58.6\ mm$.

2)ミーゼス応力に基づく設計

$$d^3\geq\frac{16}{\pi\sigma_a}\sqrt{4M^2+3T^2}.$$

から$d\geq 57.8\times 10^{-3}\ m=57.8\ mm$. ■

解説1：ベルト車について考えると，図5.15左の系は同図右の系と等価であるので，合力はP_1+P_2で，モーメントは$(P_1-P_2)D/2$である．**基本例題3.01**の解説3もあわせて参照のこと．

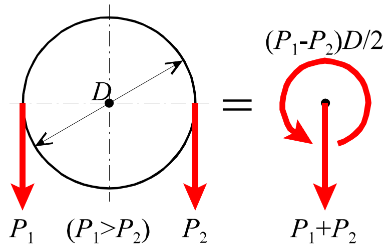


図5.15

解説2：ベルト車の自重を考慮する場合のはりモデルは垂直方向のモデルのみ変わる．ベルト車CとDの自重をW_CとW_Dで表すと，BMDは図5.16のようになる．

解説3：図5.14のBMDについては第4章の**基本例題4.16**と**4.19**を参照のこと．

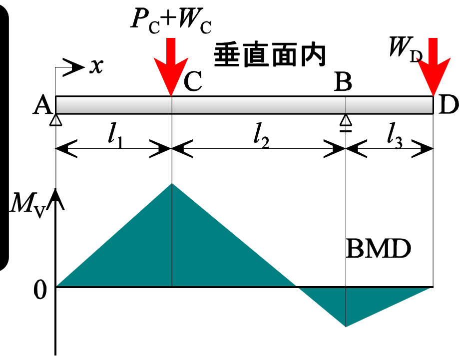


図5.16

解説4：合曲げモーメントについて

Aでの反力は垂直方向と水平方向があり，これらをR_{VA}とR_{HA}とすると，AC間のせん断力は垂直方向に$F_V=R_{VA}$，水平方向に$F_H=R_{HA}$である．せん断力の合力Fの大きさは

$$F=\sqrt{F_V^2+F_H^2}=\sqrt{R_{VA}^2+R_{HA}^2}$$

となり，AC間の曲げモーメントは

$$M=Fx=\sqrt{R_{VA}^2+R_{HA}^2}\,x=\sqrt{(R_{VA}x)^2+(R_{HA}x)^2}=\sqrt{M_V^2+M_H^2}$$

となる．これが，合曲げモーメントである．CB間，BD間でも$M=\sqrt{M_V^2+M_H^2}$の関係から合曲げモーメントを計算できる．垂直面にM_V，水平面にM_Hを描いた場合の合曲げモーメントMのイメージ(赤い線)を図5.17に示す．

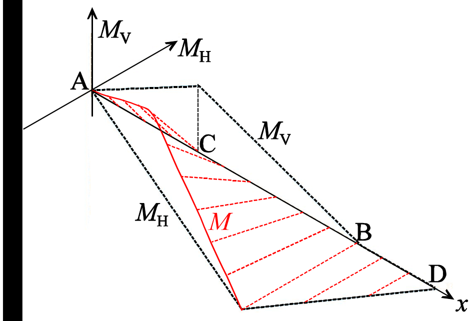


図5.17

応用例題5.18　図5.18のような内圧を受ける円筒容器の厚さtを，最大せん断応力およびミーゼス応力に基づいて定めよ．厚みの中央線の直径$D=500mm$，内圧$p=800\ kPa$とし，降伏応力$\sigma_Y=240\ MPa$，安全率$f=3$とする．

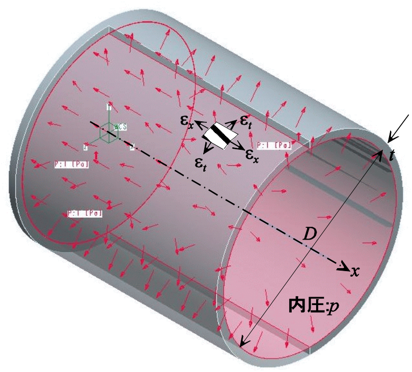


図5.18

解答　許容応力は$\sigma_a=\sigma_Y/f=240/3=80\ MPa$，$\tau_a=40\ MPa$である．

圧力pは円筒容器の円周方向とx方向の垂直応力を生ずる．まず，図5.19のようにx方向の垂直応力をσ_xで表すとx方向の内力は$N_x=\pi Dt\sigma_x$であり，x方向の外力は$P_x=\pi D^2p/4$であるから，$N_x-P_x=0$からσ_xは次式から計算できる．

$$\sigma_x=\frac{D}{4t}p.$$

円周方向の応力をσ_tで表す．図5.20のようにx軸を含む面で切断して力のつりあいを考えると，円周方向の内力は$N_t=ht\sigma_t$，圧力の合力は$P_t=Dhp$であるから，$2N_t-P_t=0$からσ_tは

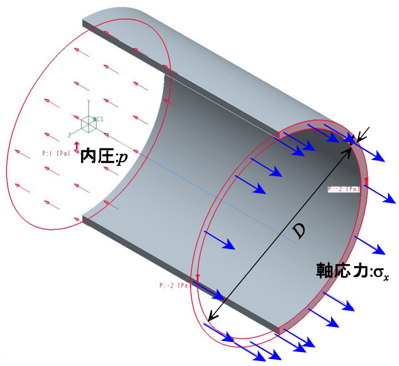


図5.19

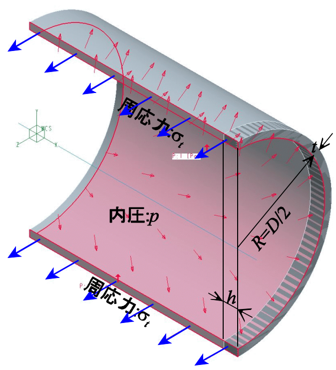


図5.20

$$\sigma_t = \frac{D}{2t}p.$$

σ_xとσ_tが二次元応力状態にあると考えると，$\tau_{xt}=0$であるから，σ_xとσ_tは共に主応力で，

$$\sigma_1 = \frac{D}{2t}p,\ \sigma_2 = \frac{D}{4t}p,\ \sigma_3 = 0.$$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$なので，最大せん断応力は

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{D}{4t}p.$$

ミーゼス応力は

$$\sigma_M = \frac{D}{4t}p\sqrt{3}.$$

以上から，

1）最大せん断応力に基づく設計

$$t \geq 2.50\times10^{-3}\ m = 2.50\ mm.$$

2）ミーゼス応力に基づく設計

$$t \geq 2.17\times10^{-3}\ m = 2.17\ mm.$$

■

解説1：内圧を受ける円筒容器の場合，厳密には，作用圧力の反作用として円筒面に垂直な半径方向の応力σ_rが生じ，円筒内面で$\sigma_r=-p$，円筒外面で$\sigma_r=0$である．しかし，この応力はσ_xやσ_tと比較してはるかに小さいので無視できる．たとえば，$t=2.5\ mm$とすると，$\sigma_x=32\ MPa$，$\sigma_t=64\ MPa$に対して$\sigma_r=-0.8\ MPa$である．

解説2：σ_tの式を導くためにx軸を含む面で切断して力のつりあいを考えるときの圧力の合力$P_t=Dhp$について説明しておく．

x軸を含む面で切断すると図5.21のような状態になっている．角度θを図のようにとり，奥行きをhとすると，$Rhd\theta$部分にはたらく圧力の合力は，$pRhd\theta$であり，その垂直成分は$pRh\sin\theta d\theta$である．この式を$0\leq\theta\leq\pi$で積分すると，

$$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2$$

であるから，上向きの圧力による力$2Rhp$が得られる．これがP_tである．さらに，$2R=D$であるからDhpと書くことができ，Dhは圧力が作用する面のx軸を含む面への正射影の面積であることに気付く．したがって，P_tは圧力が作用する面の，x軸を含む面への正射影面に圧力pが作用する場合の合力と同じことになる．

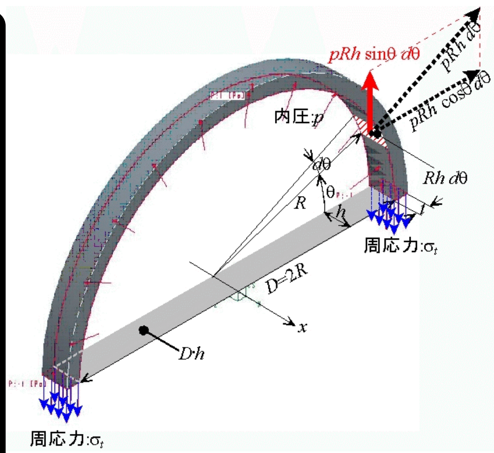


図5.21

応用例題5.19 ねじりモーメントTが作用する直径d=50 mmの丸棒の表面において軸線と±45°をなす方向のひずみを計測したところ，それぞれ$\varepsilon_1=500\times10^{-6}$，$\varepsilon_2=-500\times10^{-6}$であった．最大垂直応力$\sigma_{max}$，最大せん断応力$\tau_{max}$を求めよ．棒のヤング率$E$=206 GPa，ポアソン比$\nu=0.3$とする．

指針 ねじりモーメントが作用する丸棒にはせん断応力τ_{xy}だけが発生する（y座標は図5.11参照）．主応力はσ_1，$\sigma_2=-\sigma_1$，$\sigma_3=0$で，σ_1とσ_2の作用軸は丸棒の表面上で直交し，軸線に対して±45°をなすことを使う．

解答 計測されたひずみε_1とε_2は主軸方向のひずみなので，**基本例題5.12**で述べた応力とひずみの関係式で$\sigma_3=0$とおいてσ_1，σ_2について解くと，

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2),\ \sigma_2=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

σ_1がσ_{max}，σ_2がσ_{min}である．また，最大せん断応力τ_{max}は

$$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})$$

である．所定の数値を代入して，

$$\sigma_{max}=79.3\ MPa,\ \tau_{max}=79.3\ MPa.$$

■

解説1：モールの応力円で考えるとわかりやすいかもしれない．ねじりモーメントだけが作用している場合，丸棒表面の応力状態をモールの応力円で表すと図5.22で●で示した点AかBのいずれかである．T>0とすると，軸線と±45°をなす方向の応力は応力円上では線分0Aを基準にして反時計回りと時計回りにそれぞれ$2\theta=2\times45°=90°$ずれた線分と応力円との交点（図5.22で○で表示）になる．ゆえに**解答**のσ_1とσ_2は共に主応力で，計測されたひずみε_1とε_2は主軸方向のひずみである．

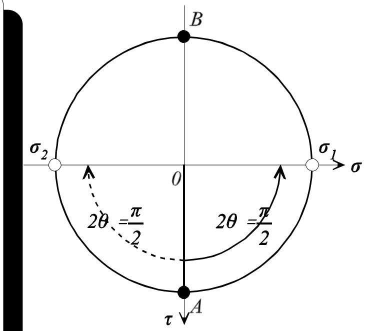


図5.22

解説2：ひずみの大きさは，10^{-6}を意味するμ（マイクロ）とひずみを表すεを使って，$\varepsilon_1=500\times10^{-6}=500\mu\varepsilon$，$\varepsilon_2=-500\times10^{-6}=-500\mu\varepsilon$と表現することがある．読み方は500$\mu\varepsilon$なら500マイクロイプシロン．あるいは，$\varepsilon$のかわりにst（strainの意味）を使って500μstと標記して500マイクロストレインと読む．覚えておこう．

応用例題5.20 **応用例題5.19**の状態にさらに曲げが発生した結果，丸棒の表面のある点で軸線と±45°をなす方向のひずみの計測値がそれぞれ$\varepsilon_1'=600\ \mu\varepsilon$，$\varepsilon_2'=-400\ \mu\varepsilon$になった．主応力，最大せん断応力，ねじりモーメントT，この点に発生している曲げモーメントMを求めよ．ただし，ひずみ計測点は曲げに対して引張側上面であるとする．

指針 この場合計測されたひずみは主応力方向のひずみではないが，これらの方向の垂直応力を計算できる．また，丸棒の表面の円周方向の垂直応力σ_tはゼロであることを用いる．

解答 軸線と±45°をなす方向の垂直応力をσ_1'，σ_2'とすると，

$$\sigma_1' = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1' + \nu\varepsilon_2'),\quad \sigma_2' = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_1' + \varepsilon_2')$$

から，$\sigma_1'=108.7\ MPa$，$\sigma_2'=-49.8\ MPa$．これらの値を**基本事項2**の1に挙げた式の左辺に代入して$\theta=\pm45°$を代入して$\sigma_t=0$とするとσ_xとτ_{xt}を計算できて，

$$\sigma_x=58.9\ MPa,\quad \tau_{xt}=79.3\ MPa.$$

これらと$\sigma_t=0$を**基本事項2**の2に挙げた式に代入すれば，主応力と最大せん断応力は

$$\sigma_1=114.1\ MPa,\quad \sigma_2=-55.2\ MPa,\quad \tau_{\max}=84.7\ MPa.$$

MとTは$\sigma_x=\dfrac{32M}{\pi d^3}$と$\tau_{xt}=\dfrac{16T}{\pi d^3}$から

$$T=1.95\ kNm,\quad M=723\ Nm.$$

■

解説1：図5.23にモールの応力円を示す．$\sigma_1'=108.7\ MPa$，$\sigma_2'=-49.8\ MPa$は図5.23の破線で示したτ軸に平行な直線であり，この二直線は応力円と交わることだけは確かであるがせん断応力の値がわからないのでこの時点では点C，Dを定めることはできない．

$\sigma_x=58.9\ MPa$，$\sigma_t=0\ MPa$，$\tau_{xt}=79.3\ MPa$を使うと応力円を描くことができ，応力円と二直線との交点として点CとDを定めることができる．このとき，線分CDは0'を通って線分ABと直交しているはずである．ここで$\sigma_x=58.9\ MPa$がx軸方向の垂直応力であることに気をつけると，点CとDはx軸と±45°をなす方向の応力状態を表している．

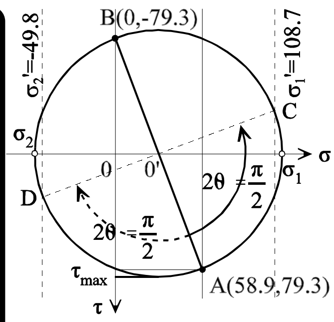


図5.23

解説2：構造物に発生する応力を直接計測することが困難なので，**応用例題5.19**やこの例題のように，まずひずみを計測して応力を求めることが一般的である．ひずみを計測するためには歪ゲージが使われる．歪ゲージは細い金属線が伸縮すると電気抵抗が変化する性質を用いる．歪ゲージの原理や関連する事項は歪ゲージを製作している企業の資料やWebサイトが詳しいので参照してほしい．

三次元応力，ひずみに関する補足

基本例題5.02で三次元応力の名前のつけ方と正負を理解したことと思う．ここでは三次元応力状態に対応するひずみについて少し補足しておく．

すでに理解されていると思うが，たとえば，角柱の軸方向にのみ力Pがはたらくと，それに対応して内力Nが発生して$N=P$であり，発生する応力は$\sigma=N/A=P/A$である．ここで，Aは軸に垂直な横断面の断面積である．軸方向をx方向とするとこの応力は正しくはσ_xと表現されなければならない．この応力に対応するx軸方向ひずみは$\varepsilon_x=\sigma_x/E$であるが，x軸方向にひずみが生ずるとその軸に直交するy軸，z軸方向にも横ひずみ$\varepsilon_y=\varepsilon_z=-\nu\varepsilon_x=-\nu\sigma_x/E$が発生する．この状態にさらに$y$軸，$z$軸方向に力が作用してその結果$\sigma_y$，$\sigma_z$が発生すると，これらの軸に直交する方向にも横ひずみが生ずるから，結局各軸方向のひずみは次のようになる．

ひずみ		σ_xによる	σ_yによる	σ_zによる
x軸方向:	$\varepsilon_x=$	$+\sigma_x/E$	$-\nu\sigma_y/E$	$-\nu\sigma_z/E$
y軸方向:	$\varepsilon_y=$	$-\nu\sigma_x/E$	$+\sigma_y/E$	$-\nu\sigma_z/E$
z軸方向:	$\varepsilon_z=$	$-\nu\sigma_x/E$	$-\nu\sigma_y/E$	$+\sigma_z/E$

一般に，応力を直接計測することは不可能と言ってよいかもしれないので，その代わり発生しているひずみを計測して上の関係式から各軸方向の応力を求める．ところが，物体内のひずみを計測することも，光弾性実験など一部のモデルによる計測を除いて，ほとんど不可能と言ってよい．しかし，物体の表面でのひずみは計測でき，そのためには歪ゲージを用いるのが一般的でよく用いられている．

歪ゲージを貼り付ける面をx-y面であるとすると，この面内で存在するひずみはε_x，ε_y，γ_{xy}の三種類であるが，歪ゲージの特性から垂直ひずみのみ直接計測可能である．表面では$\sigma_z=0$であるから，先の三つのひずみの式の中で必要な式は

$$x\text{軸方向}:\ \varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\nu\frac{\sigma_y}{E},\qquad y\text{軸方向}:\ \varepsilon_y=-\nu\frac{\sigma_x}{E}+\frac{\sigma_y}{E}$$

と，せん断ひずみ$\gamma_{xy}=\tau_{xy}/G$であり，これらがわかると応力成分は

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y),\ \ \sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x+\varepsilon_y),\ \ \tau_{xy}=G\gamma_{xy}$$

となる．このような応力状態を平面応力状態と言って，薄い板状の物体の縁にのみ外力がはたらいているような場合になる．

さて，ひずみが計測されたとして物体表面の応力を求める例題は**応用例題5.19**と**応用例題5.20**で調べたが，この二つの例題は丸棒の表面の円周方向の垂直応力σ_tがゼロであることを使っていることに注意してほしい．一般には三方向のひずみを計測するのが普通である．このような例は本章末の演習問題にゆずる．

主応力やミーゼス応力は設計上重要であり，通常は有限要素法などを用いて計算してそれらが許容値以内であることを確かめながら強度設計を行う．なお，構造物などの表面だけではあるが，実際にひずみを計測して応力状態を調べるためには本章の知識は役に立つだろう．

第5章　演習問題

問題１．幅 b=150 mm，厚さ t=1 mm の板に図１のように荷重 P=1.5 kN が作用している．次の問いに答えよ．

1） 法線が x 軸と反時計まわりに角度 θ=0°，30°，45°，60°および90°をなす面の垂直応力とせん断応力を求めよ．

2） 最大せん断応力はどの面に生ずるか．

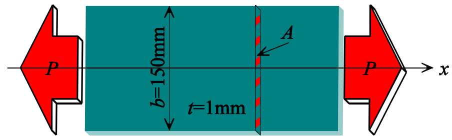


図1

ヒント：1）は**基本事項2**の1に挙げた二つの式に数値を代入して求める．2）は**基本事項2**の2に挙げた式から求めるが，最大せん断応力の発生面の法線は主軸と45°をなすこと（**発展例題5.08**）から求める．

Ans. σ_x=10 MPa，σ_y=0 MPa，τ_{xy}=0 MPa である．

1）角度 θ=0°：σ=10 MPa，τ=0 MPa．角度 θ=30°：σ=7.5 MPa，τ=3.83 MPa．角度 θ=45°：σ=5 MPa，τ=−5 MPa．角度 θ=60°：σ=2.5 MPa，τ=−4.33 MPa．θ=90°：σ=0 MPa，τ=0 MPa．

2）最大せん断応力の発生面は，その法線が主軸と±45°をなす面であるから，x 軸と±45°をなす面．

補足：一方向に引張負荷を受ける軟鋼のような延性材料は，降伏点に達すると結晶粒子にすべり生じ，引張方向と約45°をなすリューダース線（すべり線）として観察される（図2）．このすべり線は最大せん断応力の発生面に沿っている．また，この面では垂直応力も発生しており，その大きさは最大せん断応力の大きさに等しい．

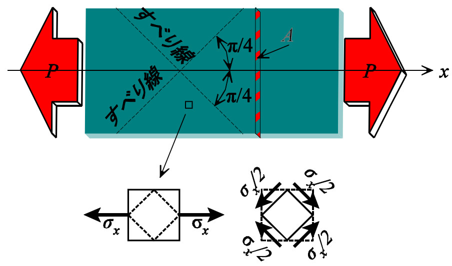


図2

問題２．x 軸方向と y 軸方向に，それぞれ，一様な応力 σ_x=20 MPa，σ_y=−50 MPa が生じている板について，

1） 法線が x 軸と反時計まわりに角度 θ=30°および θ=120°をなす面の垂直応力とせん断応力を求めよ．

2） 主応力と最大せん断応力を求めよ．

ヒント：1）は**基本事項2**の1に挙げた二つの式に数値を代入して求める．2）は**基本事項2**の2に挙げた式から求める．

Ans. 1）角度 θ=30°：σ=7.5 MPa，τ=−30.3 MPa．角度 θ=120°：σ=−32.5 MPa，τ=30.3 MPa

2）σ_1=20 MPa，σ_2=−50 MPa，τ_{max}=35 MPa．

問題3．一様な応力 σ_x=−12 MPa，σ_y=−15 MPa，τ_{xy}=−7.5 MPa が生じている板について，次の諸量を計算とモールの応力円を用いて求めよ．

1） 主応力　2） 最大せん断応力　3） 主軸がx軸に対してなす角

ヒント：いずれも**基本事項2**の2に挙げた式から求める．モールの応力円は**基本事項3**，**基本例題5.09**を参照．

Ans．1）$\sigma_1=-5.85\ MPa$，$\sigma_2=-21.15\ MPa$．2）$\tau_{max}=7.65\ MPa$．3）$2\theta_n=-78.7°$，$\theta_n=-39.4°$なので，主軸はx軸に対して時計回りに39.4°（反時計回りに140.6°）の角度をなす．モールの応力円は図3参照．

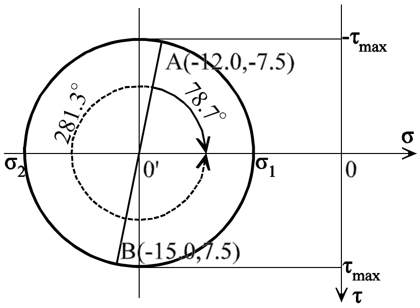


図3

補足：3）は，$\tan 2\theta_n=-5(<0)$から$2\theta_n=-78.7°$が求められる．ここで，$\sigma_x-\sigma_y=3\ MPa>0$なので，**基本例題5.05**の解説から$2\theta_n$は図5.6の第四象限の角度を表す．$\theta_n$は$x$軸基準に反時計回りに正としているので，いまの場合時計回りに39.4°．あるいは，反時計回りに140.6°．

問題4．図4のような，先端に横荷重Pが作用する高さh，長さLの片持ちはりについて，

1） このはりの内部の各点に生ずる主応力の式を求めよ．

2） このはりの内部の各点に生ずる最大せん断応力の式を求めよ．

3） 中立面に生ずる主応力の式を求めよ．

4） はりの上下面に生ずる最大せん断応力の式を求めよ．

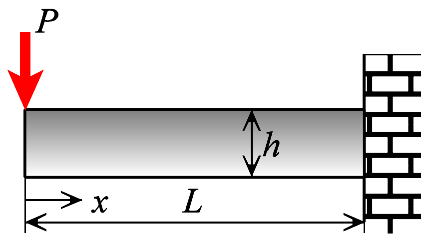


図4

ヒント：曲げモーメントは$M=-Px$，せん断力は$F=-P$．はりの応力は

$$\sigma_x=\frac{M}{I_z}y=-\frac{P}{I_z}xy,\ \sigma_y=0,\ \tau_{xy}=-\frac{1}{2}\frac{F}{I_z}\left[y^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\frac{P}{I_z}\left[y^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right].$$

Ans. 1）$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{P}{8I_z}\left[-4xy\pm\sqrt{16x^2y^2+(4y^2-h^2)^2}\right]$　（複号同順）．2）$\tau_{max}=\frac{P}{8I_z}\sqrt{16x^2y^2+(4y^2-h^2)^2}$．

3）中立面に生ずる主応力は1）の答えで$y=0$とおくと，$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\pm\frac{P}{8I_z}h^2$．4）はりの上下面に生ずる最大せん断応力は2）の答えで$y=\pm\frac{h}{2}$とおくと，$\tau_{max}=\frac{P}{4I_z}hx$．

問題5．図5のように高さ$h=100\ mm$，幅$b=50\ mm$，長さ$L=1\ m$の両端支持はりの中央に横荷重$P=5\ kN$が作用している．このとき，

1） 中立面に生ずる主応力の値を求めよ．

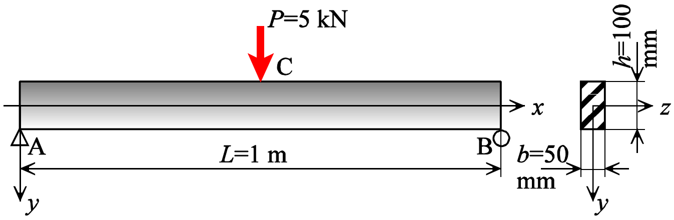


図5

2） 上下面に生ずる最大せん断応力の値と長さ方向の発生位置を求めよ.

ヒント：図５の両端単純支持はりで横荷重は中央に作用しているため $x=L/2=500\ mm$ の点について左右対称になるので，この点の左右いずれかだけを考えればよい．つまり，図6のように高さ $h=100\ mm$，幅 $b=50\ mm$，長さ $500\ mm$ の片持ちはりの自由端に $2.5\ kN$ が上向きに作用している場合と同じになる.

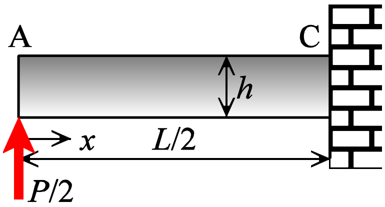


図6

Ans. 断面二次モーメントは $I_z=4.17\times10^{-6}\ m^4$ である.

1）問題4の3）の答えの式に数値を代入すると，$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\pm750\ kPa$.

2）問題４の４）の答えの式に数値を代入し，x の単位をメートル（m）とすると，$\tau_{\max}$ は x の一次関数で $\tau_{\max}=15.0\times10^6 x\ Pa$ で表される．最大せん断応力の長さ方向の発生位置は $x=500\ mm=0.5\ m$．その値は $\tau_{\max}=7.5\ MPa$.

問題6．せん断ひずみエネルギによる説に基づく弾性破損に基づき，単純せん断の場合の降伏応力 $\tau_Y=\sigma_Y/\sqrt{3}$ を導け.

ヒント：三次元応力状態においてせん断応力 τ_{xy} だけがゼロでなく，他の応力成分がすべてゼロの場合の主応力を求め，ミーゼス応力の式に代入する.

Ans. せん断応力 τ_{xy} だけがゼロでなく，他の応力成分がすべてゼロの場合，**基本例題5.12**の解説の式から，主応力を求める式は

$$\begin{vmatrix} 0-\sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0-\sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3+\tau_{xy}^2\sigma=-\sigma(\sigma^2-\tau_{xy}^2)=0$$

となる．これより，$\tau_{xy}>0$，$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ とすると三つの主応力は $\sigma_1=\tau_{xy}$，$\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\tau_{xy}$ である．これらを**基本事項4**の2に挙げたミーゼス応力 σ_M の式に代入すると，

$$\sigma_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau_{xy}^2+\tau_{xy}^2+(2\tau_{xy})^2}=\sqrt{3}\tau_{xy}$$

という関係式が得られる．せん断ひずみエネルギによる説に基づく弾性破損では σ_M が降伏応力 σ_Y に達すると弾性破損するとするので，単純せん断の場合 $\tau_{xy}=\sigma_M/\sqrt{3}=\sigma_Y/\sqrt{3}$ で弾性破損することになる．このときの τ_{xy} を τ_Y とおくと，単純せん断の場合の降伏応力は

$$\tau_Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_Y$$

と表される．

問題7．三次元応力状態にある物体のある点で三つの主応力σ_1，σ_2，σ_3がわかっている．$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$であるとすると最大せん断応力は，$\sigma_{max}=\sigma_1$，$\sigma_{min}=\sigma_3$として$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})$であることを示せ．

Ans．図7のように三つの主応力の方向，すなわち主軸は三つ（a軸，b軸，c軸とする）あり，これらは互いに直交する．それゆえ，三つの主軸で構成される三つの平面a–b面，b–c面，c–a面が存在し，いずれも二次元主応力状態にある．いま，三つの主応力σ_1，σ_2，σ_3の主軸をそれぞれa軸，b軸，c軸に対応させるものとすると，a–b面，b–c面，c–a面はすべて主応力面であり，これらの面内での最大せん断応力は，$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$を考慮すれば，それぞれ，

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2),\ \frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3),\ \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$$

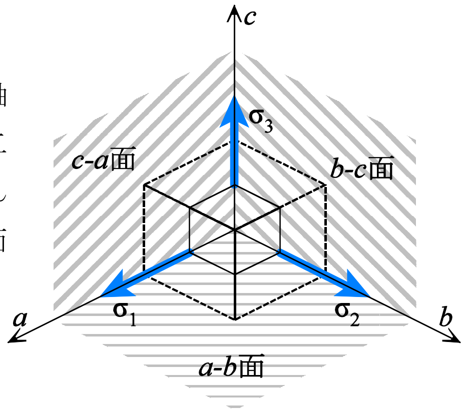


図7

である．これら三つの中で最大のものは$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$であり，$\sigma_{max}=\sigma_1$，$\sigma_{min}=\sigma_3$と表すと$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})$である．

補足：モールの応力円で表現すると，図8のようにσ軸上にσ_1，σ_2，σ_3をプロットすると三つの円を描くことができる．これらの円が各主応力面上での応力円になる．最大せん断応力は円の半径の長さで表現されるので，この場合c–a面での円の半径になる．

三次元応力状態におけるモールの応力円の説明は省略する．

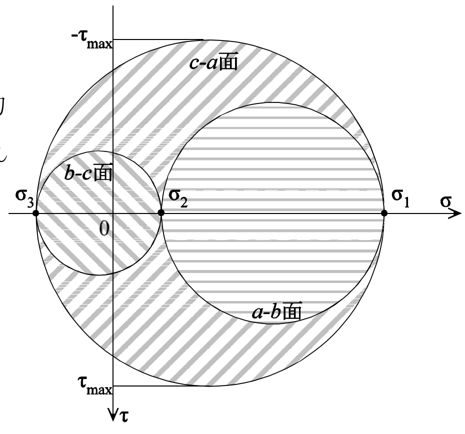


図8

問題8．厚さ8 mmの金属板を巻きつけて図9のような直径1.5 m，長さ4.5 mの圧力タンクを作った．金属板の溶接線がタンクの軸線となす角度をαとする．

1）タンク内のゲージ圧（大気圧を基準にした圧力のこと）が460 kPa，α=70°であるとき，溶接線に垂直な方向の応力，溶接線に沿ったせん断応力を求めよ．

2）タンク内のゲージ圧が460 kPaである．溶接線に沿ったせん断応力の絶対値が8.5 MPaを超えないようにαの範囲を定めよ．

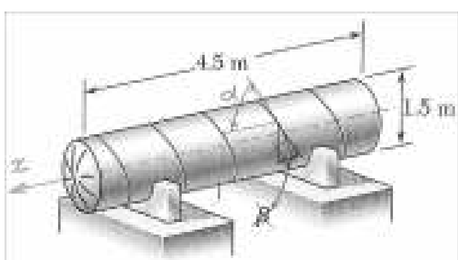


図9

3）タンク内のゲージ圧が460 kPa，α=70°として圧力タンクを作った．溶接線に沿ったせん断応力の絶対値が8.5 MPaを超えないようなタンク内温度を求めよ．ただし，設計温度を25°C，大気圧を100 kPaとし，タンクの変形は無視できるものとする．

ヒント：1）では，**基本事項2**の1の式は「<u>法線が</u>x軸と反時計回りに角θをなす面」としていることに注意．
2）では，範囲が二つあることに注意．

Ans. 1）**応用例題5.18**の式から，$\sigma_x=\dfrac{D}{4t}p$=21.56 MPa，$\sigma_t=\dfrac{D}{2t}p$=43.13 MPa．これらは主応力である．**基本事項2**の1の式で$\sigma_x=\sigma_x$，$\sigma_y=\sigma_t$，$\tau_{xy}=0$，$\theta=90°-\alpha=20°$を代入して計算すると，σ=24.09 MPa，τ=6.93 MPaである．
2）$\theta=90°-\alpha$として**基本事項2**の1のせん断応力の式に代入すると$\tau=-\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha$．これに所定の数値を代入すると，$\alpha$=26.0°および$\alpha$=−26.0°が得られ，$-26.0°\leq\alpha\leq 26.0°$であれば溶接線に沿ったせん断応力の絶対値が8.5 MPaを超えない．さらに，三角関数の性質からこの2αの範囲に180°加えてもよいので，$64.0°\leq\alpha\leq 116.0°$も答えである．
3）$|\tau|$=8.5MPaを超えるゲージ圧は約564kPa．この圧力は絶対圧力で表現すると約664kPa．タンクの容積は変わらないから，熱力学の公式から「絶対圧力/絶対温度」が一定になるので，絶対圧力が約664kPaになる絶対温度は約353 K（約80°C）．

補足：
1）図10(A)のように溶接線はx軸に対して時計回りに角度αをなすから，溶接線の法線はx軸に対して反時計回りにθをなす．対応するモールの応力円は図10(B)のようになり，線分O'Aを基準に反時計回りに2θ=40°の応力円上の点aの座標が垂直応力とせん断応力を表す．

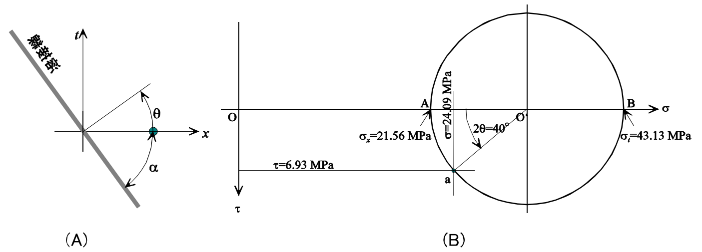


図10

2）α=26.0°とα=−26.0°は，$\theta=90°-\alpha$から，θ=64°とθ=116°にそれぞれ対応する．2θ=128°と2θ=232°であるから，応力円上では図11(A)のように点bとcのせん断応力の値がτ=8.5MPaとτ=−8.5MPaに対応する．一方，応力円上で点aとdのせん断応力の値もτ=8.5MPaとτ=−8.5MPaであるので，$-52°\leq 2\theta\leq 52°$も$|\tau|\leq$8.5MPa満たす．ゆえに，$64.0°\leq\alpha\leq 116.0°$も条件に合う．この問題

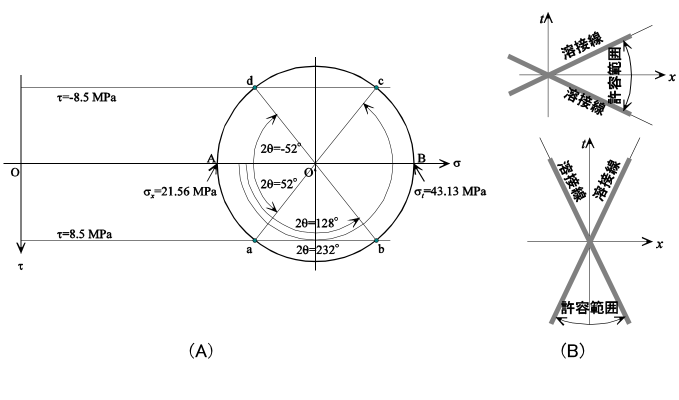


図11

の条件に合う溶接線の範囲は図11(B)のようである.

問題9. 構造物の表面に応力σ_x, σ_y, τ_{xy}が生じている. このとき, 主応力方向のひずみε_1, ε_2をx, y方向の垂直ひずみをε_x, ε_yとせん断ひずみをγ_{xy}を用いて表しなさい. また, 主応力方向をひずみを用いて表しなさい.

ヒント: 主応力と主応力方向のひずみの関係は$\sigma_1=\dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)$, $\sigma_2=\dfrac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_1+\varepsilon_2)$. この二つの式を$\varepsilon_1$, ε_2について解き, 主応力の式を代入してσ_x, σ_y, τ_{xy}で表す. 最後に$\sigma_x=\dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y)$, $\sigma_y=\dfrac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x+\varepsilon_y)$, $\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$を代入する.

Ans. $\left.\begin{matrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\end{matrix}\right\}=\dfrac{1}{2}\left[\varepsilon_x+\varepsilon_y\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2}\right]$ （複号同順）, $\tan 2\theta_n=\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\dfrac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$.

問題10. 座標系x-yと反時計回りにθだけ傾斜した座標系X-Yでの垂直ひずみε_Xは

$$\varepsilon_X=\varepsilon_x\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta$$

で表される. いま, x軸を主軸としてx, y軸方向の垂直ひずみをε_1, ε_2で表し, 主軸と反時計回りにθをなすX軸方向の垂直ひずみをε_b, この軸に対して$\mp\alpha$をなす軸方向のひずみをε_a, ε_cとする(図12). このとき,

1） $\tan 2\theta=-\dfrac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{\varepsilon_a+\varepsilon_c-2\varepsilon_b}\tan\alpha$

2） $\varepsilon_1-\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{\sin 2\theta\sin 2\alpha}$

3） $\varepsilon_1+\varepsilon_2=2\varepsilon_b+\dfrac{\varepsilon_a+\varepsilon_c-2\varepsilon_b}{2\sin^2\alpha}$

を示せ.

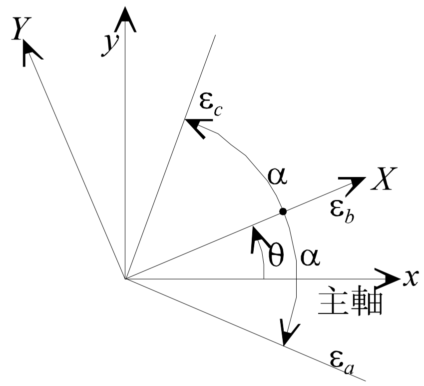


図12

ヒント: x軸が主軸. ゆえに$\tau_{xy}=0$なので$\gamma_{xy}=0$. x-y座標系に対して反時計回りにθだけ傾斜したX-Y座標系で表した垂直ひずみε_Xは$\varepsilon_X=\varepsilon_x\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta+\dfrac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\theta=\varepsilon_1\cos^2\theta+\varepsilon_2\sin^2\theta=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos 2\theta$となる. この関係式を用いて$\varepsilon_a$, $\varepsilon_b(=\varepsilon_X)$, ε_cをε_1とε_2を用いて表すと,

$$\varepsilon_a=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos2(\theta-\alpha),\ \varepsilon_b=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos2\theta,\ \varepsilon_c=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\cos2(\theta+\alpha)$$

となる. これらの関係式をうまく用いて式を整える.

補足：ε_a，ε_b，ε_cは歪ゲージを用いて計測でき，αもわかっているので，1）の関係式からθを計算でき，2）と3）の関係式からε_1とε_2を求めることができる．ε_1とε_2がわかれば主応力を計算することができる．$\alpha=45°$や$\alpha=60°$になるように三枚のゲージをセットにしたものはロゼッタゲージとして市販されている.

問題11．問題10において，$\alpha=60°$のロゼッタゲージを用いてひずみを計測したところ$\varepsilon_a=-200\mu\varepsilon$，$\varepsilon_b=100\mu\varepsilon$，$\varepsilon_c=500\mu\varepsilon$であった．$\varepsilon_1$と$\varepsilon_2$を求め，主応力を求めよ. ヤング率$E=206\ GPa$，ポアソン比$\nu=0.3$とする.

Ans. 問題10の1）の関係式から，$\tan2\theta=12.12$．ゆえに，ε_b軸に対して時計回りに$\theta=42.7°$．問題10の2）と3）の関係式から

$\varepsilon_1-\varepsilon_2=-811\mu\varepsilon$，$\varepsilon_1+\varepsilon_2=267\mu\varepsilon$となるから，これより，$\varepsilon_1=-272\mu\varepsilon$，$\varepsilon_2=539\mu\varepsilon$．主応力は

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)=25.0\ MPa,\ \sigma_2=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_1+\varepsilon_2)=103.4\ MPa$$

となる.

補足：厳密には，$\sigma_1>\sigma_2$とするので$\sigma_1=103.4\ MPa$，$\sigma_2=25.0\ MPa$とするのが正しいかもしれない．実は，$2\theta=85.3°+180°=265.3°$も$\tan2\theta=12.12$を満たし，このとき$\varepsilon_1-\varepsilon_2=811\mu\varepsilon$，$\varepsilon_1+\varepsilon_2=267\mu\varepsilon$となるから，$\varepsilon_1=539\mu\varepsilon$，$\varepsilon_2=-272\mu\varepsilon$．これらから主応力$\sigma_1=103.4\ MPa$，$\sigma_2=25.0\ MPa$が正しく求められる. 同時に，$\sigma_1$軸は$\varepsilon_b$軸に対して時計回りに132.7°（あるいは，反時計回りに47.3°）をなすこともわかる．なぜなら，問題10で「主軸と反時計回りにθをなす軸方向の垂直ひずみをε_b」としているので，ε_b軸から見ると主軸は時計回りにθをなすことになるからである.

問題12．三次元応力状態における体積変化ΔVは

$$\Delta V=-\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

で表されることを示せ．ひずみは微小であるとする.
ヒント：せん断ひずみは体積変化を生じない．ひずみは微小なので，ひずみの二次以上の項は無視する.

Ans.　省略

問題13．問題12において，$s=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$とおいて

$$\sigma_x = \sigma_x' + \frac{s}{3},\ \ \sigma_y = \sigma_y' + \frac{s}{3},\ \ \sigma_z = \sigma_z' + \frac{s}{3}$$

と表すとき,

$$\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$$

を示せ.

Ans.　省略

解説：σ_x', σ_x', σ_z'を**偏差応力**成分という. この問題から, 偏差応力成分は体積変化に無関係で, $\frac{s}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ が体積変化に関係することがわかる. この体積変化に関係する量を**静水圧**成分という.

第6章　はりのたわみと不静定はり

はりの解析や設計では発生する応力が最も重要であるが，たわみが許容範囲に収まっているかどうかも重要である．これまでみてきたはりの問題はすべて「静定」であるが，「不静定」はりでは，はりのたわみやたわみ角の条件を考慮しないと支点反力などが求められない．

ここでは，はりのたわみの微分方程式からはりのたわみ角の式やたわみ関数を求める方法を学び，これらを基礎にして不静定はりの問題の解き方や考え方を学ぶ．

基本事項1（はりのたわみ）

1．はりのたわみを支配する微分方程式は

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI_z}$$

である．ここで，v ははりのたわみ関数（下向きのたわみを正）．M は曲げモーメント，E は材料のヤング率，I_z は中立軸(ここでは，z 軸)に関する断面二次モーメントである．なお，EI_z を「はりの曲げ剛性」という．

2．たわみ角 $\theta(x)$ は1．の微分方程式を一回積分して

$$\theta(x)=\frac{dv}{dx}=\theta_0-\int_{x_0}^{x}\frac{M(\xi)}{EI_z}d\xi$$

と書くことができる．ここで，θ_0 は積分の下限 x_0 でのたわみ角である．なお，この積分の上限が x であるので，積分変数として ξ を用いて混同を避けている．曲げ剛性も軸線方向に変化する場合があるので積分の中に入れている．

3．たわみ関数 $v(x)$ は2．のたわみ角の式を積分して

$$v(x)=v_0+\int_{x_0}^{x}\theta(\xi)d\xi$$

と書くことができる．ここで，v_0 は積分の下限 x_0 でのたわみである．積分変数として ξ を用いているのは2．と同じ理由である．

以下では，たわみ角の式とたわみ関数を x の関数として明示せず，単に θ と v で表す．

基本例題6.01　図6.1に示すはりのたわみ関数を求めよ．また，$a=l/2$ のとき，点Cでのたわみを求めよ．曲げ剛性 EI_z は定数である．

指針　区間ごとの曲げモーメントの式を積分してたわみ角の式とたわみ関数を求め，含まれる未定係数をはりの支持条件から決める．

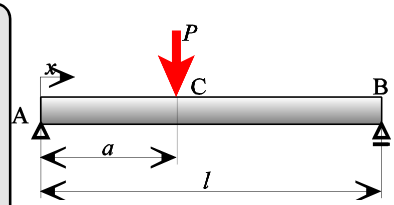


図6.1

解答　曲げモーメントの式は，**基本例題4.16**から荷重区間ごとに

AC間　$M_{AC}=R_Ax$

CB間　$M_{CB}=R_Ax-P(x-a)$

であり，$R_A=(l-a)P/l$ である．

AC間について，支点Aでのたわみ角を θ_A とおくと，**基本事項1**の2．から，たわみ角の式は

$$\theta_{AC}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}x^2$$

支点Aでのたわみを v_A とおいてもう一度積分すると，**基本事項1**の3．から，たわみ関数は

$$v_{AC}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}x^3$$

CB間について，点Cでのたわみ角とたわみをθ_Cとv_Cとおくと，たわみ角の式は

$$\theta_{CB}=\theta_C-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}(x^2-a^2)+\frac{1}{2}\frac{P}{EI_z}(x-a)^2$$

たわみ関数は

$$v_{CB}=v_C+\theta_C(x-a)-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}(x^3-3a^2x+2a^3)+\frac{1}{6}\frac{P}{EI_z}(x-a)^3$$

で表される．

点Cでのたわみ角θ_Cとたわみv_Cとθ_{AC}とv_{AC}の式で$x=a$とおけばよいので，

$$\theta_C=\theta_{AC}\big|_{x=a}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}a^2,\quad v_C=v_{AC}\big|_{x=a}=v_A+\theta_A a-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}a^3.$$

これらをθ_{CB}とv_{CB}の式に代入して式を整えると，

$$\theta_{CB}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}x^2+\frac{1}{2}\frac{P}{EI_z}(x-a)^2$$

$$v_{CB}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}x^3+\frac{1}{6}\frac{P}{EI_z}(x-a)^3$$

となる．ここでθ_Aとv_Aが未知であるのでこれらを決める．まず，支点Aではたわみがゼロ，すなわち，$v_{AC}\big|_{x=0}=0$から$v_A=0$が得られる．支点Bでたわみがゼロでなければならない，つまり，$v_{CB}\big|_{x=l}=0$からθ_Aは，

$$\theta_A=\frac{1}{6}\frac{(l-a)P}{EI_z l}a(2l-a)$$

が得られる．ただし，$R_A=(l-a)P/l$を代入した．

特に，$a=\frac{1}{2}l$のとき，$R_A=\frac{1}{2}P$，$\theta_A=\frac{1}{16}\frac{Pl^2}{EI_z}$となるから，点Cのたわみは

$$v_C=v_{AC}\big|_{x=l/2}=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI_z}$$

である．■

解説1：たわみ関数は二階の微分方程式の解なので，未定係数は二つ出てくる．二つの未定係数は二つの条件(この例題の場合，支点A，Bでたわみがゼロ)から定まる．

解説2：θ_{CB}とv_{CB}の式はθ_{AC}とv_{AC}の式に$\frac{1}{2}\frac{P}{EI_z}(x-a)^2$と$\frac{1}{6}\frac{P}{EI_z}(x-a)^3$が加わっただけであり，これらは，CB間の曲げモーメントの式で加わった項「$-P(x-a)$」に由来することは明らかである．一般に，$n+1$番目の荷重区間のたわみ角の式やたわみ関数はn番目の荷重区間のそれらに$n+1$番目の荷重区間で新たに加わった曲げモーメントの項に由来する項を加えればよい．ただし，この性質を使えない場合もある．

解説3：本書では支点反力$R_A=(l-a)P/l$などの式を代入せずにR_Aのまま残している場合がある．後で出てくるように，曲げモーメントの式が複雑になるとたわみ角の式やたわみ関数を求める計算を間違える危険性が増す．著者らが思うに，複雑で長い式を苦労して正しく書く技術より，支点反力など式を構成する部品をきちんと書いておくことが重要．このほうが間違えにくく，式も比較的コンパクトで数値を代入しても計算しやすい．

解説4：チョー余計なお世話かもしれないが，

$$\int_a^x(\xi-a)d\xi=\left[\frac{1}{2}\xi^2-a\xi\right]_a^x=\frac{1}{2}x^2-ax-\frac{1}{2}a^2+a^2=\frac{1}{2}(x-a)^2$$

という積分計算をしている学生をしばしば見かける．これは，$\xi-a=\xi'$とすると$d\xi=d\xi'$なので，あっさり，

$$\int_a^x(\xi-a)d\xi=\int_0^{x-a}\xi'd\xi'=\left[\frac{1}{2}\xi'^2\right]_0^{x-a}=\frac{1}{2}(x-a)^2$$

となる．つまり，置換積分を行えば簡単で間違いが少ない．

発展例題6.02　基本例題6.01で，最大たわみはどこに生ずるか．$l=1$ [m]，$a=0.4$ [m]とする．また，$l=1$ [m]，$a=0.6$ [m]のときはどうか．

指針　区間ごとのたわみ関数をxで微分した式（つまり，たわみ角の式）がゼロになるxがたわみ関数の極値点である．

解答　1）$l=1$ [m]，$a=0.4$ [m]のとき，最大たわみ点は支点Aから0.47 [m]．

2）$l=1$ [m]，$a=0.6$ [m]のとき，最大たわみ点は支点Aから0.53 [m]．■

解説　1）　AC間（$0\le x\le a$）でのたわみ角の式をゼロにおいて得られる二次方程式

$$3x^2-2la+a^2=0$$

の正の根は，$l=1$ [m]，$a=0.4$ [m]のとき，

$$x_1=\sqrt{\frac{1}{3}(2la-a^2)}=0.46\ [m]$$

であるが，この値は$a=0.4$ [m]より大きいので答えではない．

CB間（$a\le x\le l$）でのたわみ角の式をゼロにおいて得られる二次方程式

$$3x^2-6lx+2l^2+a^2=0$$

の二根は

$$x_1=l+\sqrt{\frac{1}{3}(l^2-a^2)}=1.53\ [m]\ ,\ x_2=l-\sqrt{\frac{1}{3}(l^2-a^2)}=0.47\ [m]$$

である．$l<x_1$なのでx_1は答えではない．ゆえに最大たわみ点は支点Aから0.47 [m]の点である．

2）　$l=1$ [m]，$a=0.6$ [m]のときは，AC間の式から$x_1=0.53$ [m]，CB間の式から$x_1=1.46$ [m]と$x_2=0.54$ [m]となるが，AC間の式から得られる$x_1=0.53$ [m]が答えである．

基本例題6.03　図6.1に示すはりで，AC間とCB間で曲げ剛性が異なる場合のたわみ関数を求めよ．AC間とCB間の曲げ剛性を，それぞれ，$(EI_z)_1$と$(EI_z)_2$で表すものとする．

解答　曲げモーメントの式は**基本例題6.01**と同じである．

AC間について，支点Aでのたわみ角をθ_Aとおくと，**基本事項1**の2．から，たわみ角の式は

$$\theta_{AC}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{(EI_z)_1}x^2$$

支点Aでのたわみをv_Aとおいてもう一度積分すると，**基本事項1**の3．から，たわみ関数は

$$v_{AC}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{(EI_z)_1}x^3$$

CB間について，点Cでのたわみ角とたわみをθ_Cとv_Cとおくと，

$$\theta_{CB}=\theta_C-\frac{1}{2}\frac{R_A}{(EI_z)_2}(x^2-a^2)+\frac{1}{2}\frac{P}{(EI_z)_2}(x-a)^2$$

たわみ関数は

$$v_{CB}=v_C+\theta_C(x-a)-\frac{1}{6}\frac{R_A}{(EI_z)_2}(x^3-3a^2x+2a^3)+\frac{1}{6}\frac{P}{(EI_z)_2}(x-a)^3$$

で表される．

θ_{CB}とv_{CB}の式でθ_Cとv_Cはθ_{AC}とv_{AC}の式で$x=a$とおけばよいので，

$$\theta_C=\theta_{AC}|_{x=a}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{(EI_z)_1}a^2,\quad v_C=v_{AC}|_{x=a}=v_A+\theta_A a-\frac{1}{6}\frac{R_A}{(EI_z)_1}a^3.$$

これらをθ_{CB}とv_{CB}の式に代入すると，

$$\theta_{CB}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{(EI_z)_1}a^2-\frac{1}{2}\frac{R_A}{(EI_z)_2}(x^2-a^2)+\frac{1}{2}\frac{P}{(EI_z)_2}(x-a)^2$$

$$v_{CB}=v_A+\theta_A x+\frac{1}{6}\frac{R_A}{(EI_z)_1}(-3a^2x+2a^3)-\frac{1}{6}\frac{R_A}{(EI_z)_2}(x^3-3a^2x+2a^3)+\frac{1}{6}\frac{P}{(EI_z)_2}(x-a)^3$$

となる．ここでθ_Aとv_Aが未知であるが，$v_{AC}|_{x=0}=0$から$v_A\equiv 0$である．θ_Aは支点Bでたわみがゼロでなければならない条件から定まる．■

基本例題6.04　図6.2に示すはりのたわみ関数を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

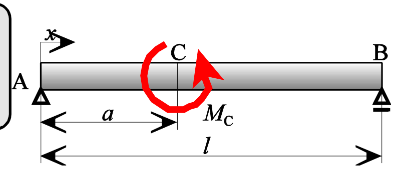


図6.2

解答　曲げモーメントの式は，**基本例題4.20**から荷重区間ごとに

AC間　$M_{AC}=R_A x$

CB間　$M_{CB}=R_A x-M_C$

であり，$R_A=M_C/l$である．

AC間でのたわみ角の式とたわみ関数は，支点Aでのたわみ角とたわみをθ_Aとv_Aとすると，

$$\theta_{AC}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}x^2,$$

$$v_{AC}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}x^3.$$

CB間では，点Cでのたわみ角とたわみをθ_Cとv_Cとおいて，

$$\theta_{CB}=\theta_C-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}(x^2-a^2)+\frac{M_C}{EI_z}(x-a),$$

$$v_{CB}=v_C+\theta_C(x-a)-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}(x^3-3a^2x-a^3+3a^3)+\frac{1}{2}\frac{M_C}{EI_z}(x-a)^2.$$

点Cで

$$\theta_C=\theta_{AC}|_{x=a}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}a^2,\quad v_C=v_{AC}|_{x=a}=v_A+\theta_A a-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}a^3$$

であるから，これらをCB間の式に代入すると，

$$\theta_{CB}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}x^2+\frac{M_C}{EI_z}(x-a)$$

$$v_{CB}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}x^3+\frac{1}{2}\frac{M_C}{EI_z}(x-a)^2$$

と表される．θ_Aとv_Aは，支点Aでたわみがゼロ（$v_{AC}|_{x=0}=0$）と支点Bでたわみがゼロ（$v_{CB}|_{x=l}=0$）より，

$$v_A\equiv 0,\quad \theta_A=-\frac{1}{6}\frac{M_C}{EI_z l}(2l^2-6la+3a^2)$$

となる．ただし，$R_A=M_C/l$を用いた．■

解説：θ_{CB}とv_{CB}の式はθ_{AC}とv_{AC}の式に$\frac{M_C}{EI_z}(x-a)$と$\frac{1}{2}\frac{M_C}{EI_z}(x-a)^2$が加わっただけである．これらは，CB間の曲げモーメントの式で加わった項「$-M_C$」に由来する．

基本例題6.05　図6.3のはりのたわみ関数を求めよ．$M_A>M_B$である．曲げ剛性EI_zは定数である．

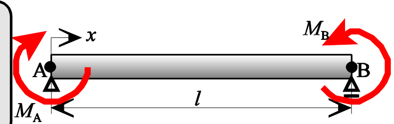


図6.3

解答　曲げモーメントの式は，**基本例題4.22**から全区間で

$$M=R_A x+M_A$$

であり，$R_A=-(M_A-M_B)/l$である．

たわみ角の式とたわみ関数は，支点Aでのたわみ角とたわみをθ_Aとv_Aとすると，

$$\theta=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}x^2-\frac{M_A}{EI_z}x$$

$$v=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}x^3-\frac{1}{2}\frac{M_A}{EI_z}x^2$$

と表される．θ_Aとv_Aは，支点Aでたわみがゼロ（$v|_{x=0}=0$）と支点Bでたわみがゼロ（$v|_{x=l}=0$）より，

$$v_A \equiv 0,\ \theta_A = \frac{2M_A + M_B}{6EI_z} l$$

となる．ただし，$R_A = -(M_A - M_B)/l$を用いた．■

基本例題6.06　図6.4のはりのたわみ関数を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

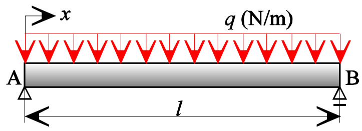


図6.4

解答　曲げモーメントの式は，**基本例題4.23**から全区間で

$$M = R_A x - \frac{1}{2} q x^2$$

であり，$R_A = ql/2$である．

たわみ角の式とたわみ関数は，支点Aでのたわみ角とたわみをθ_Aとv_Aとすると，

$$\theta = \theta_A - \frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z} x^2 + \frac{1}{6}\frac{q}{EI_z} x^3$$

$$v = v_A + \theta_A x - \frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z} x^3 + \frac{1}{24}\frac{q}{EI_z} x^4$$

と表される．θ_Aとv_Aは，支点Aでたわみがゼロ（$v|_{x=0} = 0$）と支点Bでたわみがゼロ（$v|_{x=l} = 0$）より，

$$v_A \equiv 0,\ \theta_A = \frac{1}{24}\frac{q}{EI_z} l^3$$

となる．ただし，$R_A = ql/2$を用いた．■

基本例題6.07　図6.5のはりのたわみ関数を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

指針　**基本例題6.01**と同じである．

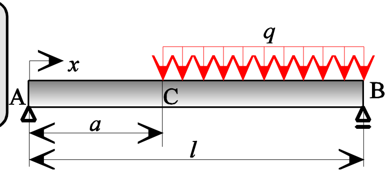


図6.5

解答　**発展例題4.24**から曲げモーメントの式は，荷重区間ごとに

AC間　$M_{AC} = R_A x$

CB間　$M_{CB} = R_A x - \frac{1}{2} q (x-a)^2$

であり，$R_A = (l-a)^2 q/(2l)$である．

AC間でのたわみ角とたわみ関数は支点Aでのたわみ角とたわみをθ_Aとv_Aとすると，

$$\theta_{AC} = \theta_A - \frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z} x^2$$

$$v_{AC} = v_A + \theta_A x - \frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z} x^3$$

CB間では，

$$\theta_{CB} = \theta_A - \frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z} x^2 + \frac{1}{6}\frac{q}{EI_z}(x-a)^3$$

$$v_{CB} = v_A + \theta_A x - \frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z} x^3 + \frac{1}{24}\frac{q}{EI_z}(x-a)^4$$

と表される．θ_Aとv_Aは，支点Aではたわみがゼロ（$v_{AC}|_{x=0}=0$）と支点Bでたわみがゼロ（$v_{CB}|_{x=l}=0$）より，

$$v_A\equiv 0,\ \ \theta_A=\frac{1}{24}\frac{(l-a)^2 q}{EI_z l}(l^2+2la-a^2)$$

となる．ただし，$R_A=(l-a)^2q/(2l)$を用いた．■

基本例題6.08　図6.6に示すはりのたわみ関数を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

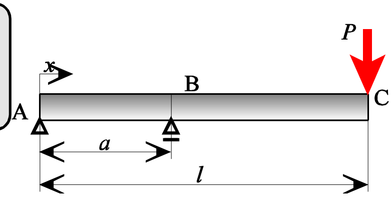


図6.6

解答　曲げモーメントの式は，**基本例題4.19**から荷重区間ごとに

AB間 $M_{AB}=R_Ax$

BC間 $M_{BC}=R_Ax+R_B(x-a)$

であり，$R_A=-(l-a)P/a$，$R_B=lP/a$である．

AB間でのたわみ角とたわみ関数は支点Aでのたわみ角とたわみをθ_Aとv_Aとすると，

$$\theta_{AB}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}x^2$$

$$v_{AB}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}x^3$$

BC間では，

$$\theta_{BC}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{R_A}{EI_z}x^2-\frac{1}{2}\frac{lP}{EI_z a}(x-a)^2$$

$$v_{BC}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{6}\frac{R_A}{EI_z}x^3-\frac{1}{6}\frac{lP}{EI_z a}(x-a)^3$$

と表される．θ_Aとv_Aは，支点Aでたわみがゼロ（$v_{AB}|_{x=0}=0$）と支点B（$x=a$）でたわみがゼロ（$v_{AB}|_{x=a}=0$）より，

$$v_A\equiv 0,\ \ \theta_A=-\frac{1}{6}\frac{(l-a)P}{EI_z}a$$

となる．ただし，$R_A=-(l-a)P/a$を用いた．■

基本例題6.09　図6.7に示すはりの左端Aのたわみ角とたわみを求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

指針　**基本例題6.01**の結果をうまく使うために，ここではBに原点をとる．左端Aのx座標は$x=-b$であることに注意．

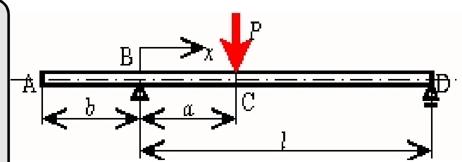


図6.7

解答　荷重区間は全部で三つで，各区間の曲げモーメントの式は

AB間 $M_{AB}=0$

BC間 $M_{BC}=R_Bx$

CD間 $M_{CD}=R_Bx-P(x-a)$

であり，$R_B=(l-a)P/l$である．

まず，AB間でのたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{AB}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\int_{-b}^{x}0d\xi=\theta_A$$

$$v_{AB}=v_A+\int_{-b}^{x}\theta_{AB}d\xi=v_A+\int_{-b}^{x}\theta_A d\xi=v_A+\theta_A(x+b)$$

となる.

この例題のBC間とCD間のたわみ角の式とたわみ関数は**基本例題6.01**のAC間とCB間の式でR_AをR_Bとすればよいので, BC間では

$$\theta_{BC}=\theta_B-\frac{1}{2}\frac{R_B}{EI_z l}x^2$$

$$v_{BC}=\theta_B x-\frac{1}{6}\frac{R_B}{EI_z l}x^3$$

であり, CD間では

$$\theta_{CD}=\theta_B-\frac{1}{2}\frac{R_B}{EI_z l}x^2+\frac{1}{2}\frac{P}{EI_z}(x-a)^2$$

$$v_{CD}=\theta_B x-\frac{1}{6}\frac{R_B}{EI_z l}x^3+\frac{1}{6}\frac{P}{EI_z}(x-a)^3$$

となる. ただし, θ_Bは

$$\theta_B=\frac{1}{6}\frac{(l-a)P}{EI_z l}a(2l-a)$$

である.

未定のθ_Aとv_Aを決める. $x=0$で$v_{AB}=0$の条件から$v_A+\theta_A b=0$. また, $x=0$で$\theta_{AB}=\theta_{BC}$から$\theta_A=\theta_B$であるから, 左端Aのたわみ角とたわみは

$$\theta_A=\frac{1}{6}\frac{(l-a)P}{EI_z l}a(2l-a),\qquad v_A=-\theta_A b=-\frac{1}{6}\frac{(l-a)P}{EI_z l}a(2l-a)b$$

である. ■

基本例題6.10 図6.8に示すはりの右端Dのたわみ角とたわみを求めよ. 曲げ剛性EI_zは定数である.

指針 たわみ角の式とたわみ関数を求め, 右端Dのたわみ角とたわみを計算する. 右端Dのx座標は$x=l+b$である.

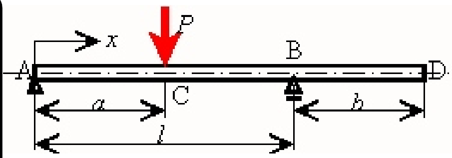


図6.8

解答 荷重区間は全部で三つで, 各区間の曲げモーメントの式は

AC間 $M_{AC}=R_A x$

CB間 $M_{CB}=R_A x-P(x-a)$

BD間 $M_{BD}=0$

であり, $R_A=(l-a)P/l$である.

この例題のAC間とCB間のたわみ角の式とたわみ関数は**基本例題6.01**と同じなので省略する.

BD間では,

$$\theta_{BD}=\theta_B-\frac{1}{EI_z}\int_{l}^{x}0d\xi=\theta_B$$

$$v_{BD}=v_B+\int_l^x\theta_{BD}d\xi=v_B+\theta_B(x-l)$$

となる．ただし，**基本例題6.01**から$v_B=0$であり，θ_Bは**基本例題6.01**のθ_{CB}の式で$x=l$を代入すると，

$$\theta_B=-\frac{1}{6}\frac{(l-a)P}{EI_z l}a(l+a)$$

となり，v_{BD}の式に$x=l+b$を代入して

$$v_D=-\frac{1}{6}\frac{(l-a)P}{EI_z l}a(l+a)b$$

となる．■

発展例題6.11　発展例題4.25のはりのたわみ角の式とたわみ関数を求めよ．ただし，同例題の**別解**で求めたDB間の曲げモーメントの式を用いるものとする．

解答　各区間ごとの曲げモーメントは，**発展例題4.25**の**別解**から

AC間$(0<x<a)$: $M_{AC}=R_Ax$

CD間$(a<x<b)$: $M_{CD}=R_Ax-\frac{1}{2}q_0(x-a)^2-\frac{1}{6}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^3$

DB間$(b<x<l)$: $M_{DB}=R_Ax-\frac{1}{2}q_0(x-a)^2-\frac{1}{6}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^3+\frac{1}{2}(q_0+q_1)(x-b)^2+\frac{1}{6}\frac{q_1}{b-a}(x-b)^3$

であるから，たわみ角の式は，$x=0$でのたわみ角をθ_Aとして

AC間$(0<x<a)$:

$$\theta_{AC}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\frac{1}{2}R_Ax^2$$

CD間$(a<x<b)$:

$$\theta_{CD}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{6}q_0(x-a)^3-\frac{1}{24}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^4\right]$$

DB間$(b<x<l)$:

$$\theta_{DB}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{6}q_0(x-a)^3-\frac{1}{24}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^4+\frac{1}{6}(q_0+q_1)(x-b)^3+\frac{1}{24}\frac{q_1}{b-a}(x-b)^4\right]$$

たわみ関数は，$x=0$でたわみがゼロであることを使って，

AC間$(0<x<a)$:

$$v_{AC}=\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\frac{1}{6}R_Ax^3$$

CD間$(a<x<b)$:

$$v_{CD}=\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{24}q_0(x-a)^4-\frac{1}{120}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^5\right]$$

DB間$(b<x<l)$:

$$v_{DB}=\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{24}q_0(x-a)^4-\frac{1}{120}\frac{q_1}{b-a}(x-a)^5+\frac{1}{24}(q_0+q_1)(x-b)^4+\frac{1}{120}\frac{q_1}{b-a}(x-b)^5\right]$$

である．θ_AはBでたわみがゼロ，すなわち，$v_{DB}|_{x=l}=0$から決めることができる．■

発展例題6.11の別解

発展例題4.25の解答にあるDB間の曲げモーメントの式

$$M_{DB}=M_D+(x-b)F_D$$

を使うと，DB間($b<x<l$)のたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{DB}=\theta_D-\frac{1}{EI_z}\left[M_D(x-b)+\frac{1}{2}F_D(x-b)^2\right]\quad \text{ただし，}\theta_D=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ab^2-\frac{1}{6}q_0(b-a)^3-\frac{1}{24}\frac{q_1}{b-a}(b-a)^4\right]$$

$$v_{DB}=v_D+\theta_D(x-b)-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_D(x-b)^2+\frac{1}{6}F_D(x-b)^3\right]$$

$$\text{ただし，}v_D=\theta_Ab-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_Ab^3-\frac{1}{24}q_0(b-a)^4-\frac{1}{120}\frac{q_1}{b-a}(b-a)^5\right]$$

と書くことができるが，$v_{DB}|_{x=l}=0$からθ_Aの式を求めるのは手間がかかりそうだと想像できるだろう．

解説1：**発展例題4.25の別解**に基づくθ_{DB}とv_{DB}の式はずいぶんすっきりしていることがわかる．xの最大べき次数は3から5に上がっているなど形は違うがまったく同じ式に整理できることを確認してみよう(式を開いてxのべき乗ごとに整理するのは大変なので，$x=b+\Delta$とおいて式を整理すると楽かも)．

解説2：**発展例題4.25の別解**の式に基づくθ_{DB}とv_{DB}の式を使って作成したたわみ角とたわみ関数を図6.9に示す．計算条件は**発展例題4.25**の解説のせん断力と曲げモーメントの条件に合わせてある．実は，図4.39に挙げた表計算のセルに入力してある式のべき乗と係数をほんの少し変えるだけで図6.9を描くことができる．ただし，たわみは下向きを正としているので，この図では縦軸は下向きに正としている．

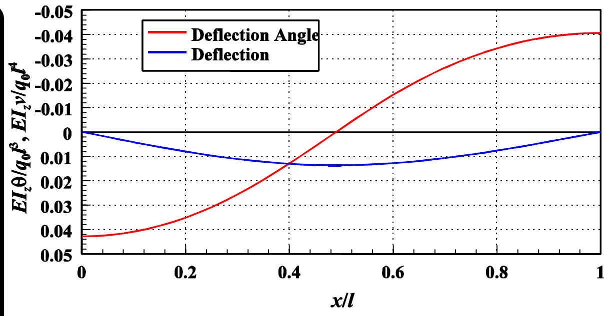


図6.9

基本例題6.12　図6.10に示すはりの自由端Cでのたわみとたわみ角を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

指針　$x=0$でたわみ角とたわみがゼロである条件を使う．

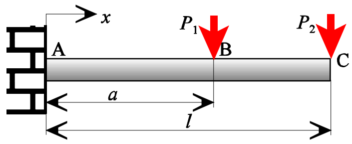


図6.10

解答　荷重区間は二つで,各区間の曲げモーメントの式は

AB間　$M_{AB}=M_A+R_Ax$

BC間　$M_{BC}=M_A+R_Ax-P_1(x-a)$

であり，$R_A=P_1+P_2$，$M_A=-P_1a-P_2l$である．

AB間でのたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{AB}=\frac{-1}{EI_z}\left(M_A x+\frac{1}{2}R_A x^2\right)+\theta_A$$

$$v_{AB}=\frac{-1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}M_A x^2+\frac{1}{6}R_A x^3\right)+\theta_A x+v_A$$

である．ここで，θ_Aとv_Aは固定支点Aでのたわみ角とたわみであるが，固定支点ではたわみ角とたわみはゼロであるから，$\theta_A=0$，$v_A=0$である．

BC間でのたわみ角とたわみ関数は

$$\theta_{BC}=\frac{-1}{EI_z}\left[M_A x+\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{2}P_1(x-a)^2\right]$$

$$v_{BC}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_A x^2+\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{6}P_1(x-a)^3\right]$$

である．

自由端Cでのたわみとたわみ角は，θ_{BC}とv_{BC}の式に$x=l$を代入すれば得られ，

$$\theta_C=\frac{1}{2EI_z}\left(P_1a^2+P_2l^2\right),\quad v_C=\frac{1}{6EI_z}\left(3P_1la^2-P_1a^3+2P_2l^3\right)$$

である．■

> 解説：第4章の最後に書いたように，固定支持点が左端にあるとその点でたわみ角とたわみがゼロなので，積分定数が消えてしまう．**基本例題6.09**までと比べてみるとよくわかる．

> **発展例題6.13　基本例題6.12**でP_1のみが作用したときの点Bのたわみ角とたわみを図6.11上のようにθ_{B1}とv_{B1}で表し，P_2のみが作用した場合の点Cのたわみ角とたわみを図6.11下のようにθ_{C2}とv_{C2}で表す．このとき，**基本例題6.12**のθ_Cとv_Cは
>
> $$\theta_C=\theta_{B1}+\theta_{C2},\quad v_C=v_{B1}+(l-a)\theta_{B1}+v_{C2}$$
>
> で表されることを示せ．
>
> **指針**　θ_{B1}，v_{B1}，θ_{C2}，v_{C2}の式を求め，v_Cの式を書き直す際に$2P_1a^3$をくくり出すように意識する．

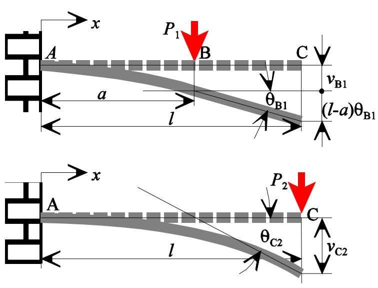


図6.11

解答　θ_{B1}，v_{B1}，θ_{C2}，v_{C2}は，

$$\theta_{B1}=\frac{P_1a^2}{2EI_z},\quad v_{B1}=\frac{P_1a^3}{3EI_z},$$

$$\theta_{C2}=\frac{P_2l^2}{2EI_z},\quad v_{C2}=\frac{P_2l^3}{3EI_z}$$

である．たわみ角θ_Cについて，明らかに

$$\theta_C=\theta_{B1}+\theta_{C2}$$

である．たわみv_Cについて，**基本例題6.12**のv_Cの式を少し書き直すと，

$$v_C=\frac{1}{6EI_z}\left[2P_1a^3+3P_1a^2(l-a)+2P_2l^3\right]=\frac{P_1a^3}{3EI_z}+\frac{P_1a^2}{2EI_z}(l-a)+\frac{P_2l^3}{3EI_z}$$

となるから,

$$v_C=v_{B1}+(l-a)\theta_{B1}+v_{C2}$$

が成立する. ■

解説: $v_C=v_{B1}+(l-a)\theta_{B1}+v_{C2}$の第一項はBに$P_1$のみが作用したときのBのたわみ, 第二項はBのたわみ角に長さ$l-a$をかけたものでBC部分の傾斜に伴うCの変位量で, この二項でBにP_1が作用したときのCのたわみ量を表す. 最後の項はCにP_2のみが作用したときのCのたわみである.

発展例題6.14　基本例題6.12で次の関係式を示せ.

$$\frac{v_B|_{P_1=0}}{P_2}=\frac{v_C|_{P_2=0}}{P_1}$$

解答　v_Bの式は

$$v_B=\frac{1}{6EI_z}\left[3(P_1a+P_2l)a^2-(P_1+P_2)a^3\right]$$

であり, この式で$P_1=0$を代入してP_2で割ると,

$$\frac{v_B|_{P_1=0}}{P_2}=\frac{1}{6EI_z}(3l-a)a^2.$$

v_Cの式で$P_2=0$を代入してP_1で割ると,

$$\frac{v_C|_{P_2=0}}{P_1}=\frac{1}{6EI_z}(3l-a)a^2.$$

ゆえに,

$$\frac{v_B|_{P_1=0}}{P_2}=\frac{v_C|_{P_2=0}}{P_1}$$

が示せた. ■

解説:この関係式は,「P_2がv_Bにおよぼす効果とP_1がv_Cにおよぼす効果は同じである」と言っている. このような関係を一般に相反関係という.

発展例題6.15　基本例題6.12でAB間の曲げ剛性が$(EI_z)_1$, BC間の曲げ剛性が$(EI_z)_2$である. 自由端Cでのたわみとたわみ角を求めよ.

解答　AB間でのたわみ角の式とたわみ関数は, **基本例題6.12**でEI_zを$(EI_z)_1$に置き換えて, $\theta_A=0$, $v_A=0$を代入すると次式のようになる.

$$\theta_{AB}=\frac{-1}{(EI_z)_1}\left(M_A x+\frac{1}{2}R_A x^2\right)$$

$$v_{AB}=\frac{-1}{(EI_z)_1}\left(\frac{1}{2}M_A x^2+\frac{1}{6}R_A x^3\right)$$

BC間でのたわみ角の式とたわみ関数は，**基本事項1**の2．と3．から

$$\theta_{BC}=\theta_B-\int_a^x\frac{M_{BC}(\xi)}{(EI_z)_2}d\xi,\ v_{BC}=v_B+\int_a^x\theta_{BC}(\xi)d\xi$$

で計算できるので，

$$\theta_{BC}=\theta_{AB}|_{x=a}-\frac{1}{(EI_z)_2}\left[M_A(x-a)+\frac{1}{2}R_A(x^2-a^2)-\frac{1}{2}P_1(x-a)^2\right]$$

$$v_{BC}=v_{AB}|_{x=a}+\theta_{AB}|_{x=a}(x-a)-\frac{1}{(EI_z)_2}\left[\frac{1}{2}M_A(x-a)^2+\frac{1}{6}R_A(x^3-3a^2x+2a^3)-\frac{1}{6}P_1(x-a)^3\right]$$

ここで，

$$\theta_{AB}|_{x=a}=\frac{-1}{(EI_z)_1}\left(M_A a+\frac{1}{2}R_A a^2\right),\ v_{AB}|_{x=a}=\frac{-1}{(EI_z)_1}\left(\frac{1}{2}M_A a^2+\frac{1}{6}R_A a^3\right)$$

である．

自由端Cでのたわみとたわみ角は，$b=l-a$とおいて

$$\theta_C=\theta_{BC}|_{x=l}=\theta_{AB}|_{x=a}-\frac{1}{2(EI_z)_2}\left[2M_A b+R_A b(l+a)-P_1 b^2\right]$$

$$v_C=v_{BC}|_{x=l}=v_{AB}|_{x=a}+\theta_{AB}|_{x=a}b-\frac{1}{6(EI_z)_2}\left[3M_A b^2+R_A(l^3-3a^2l+2a^3)-P_1 b^3\right]$$

である．ただし，$R_A=P_1+P_2$，$M_A=-P_1a-P_2l$である．■

解説：この式を展開して書くとかなりややこしい式になる．必要な式をきちんと書いておけばそれほどややこしくならずに済む．なお，$(EI_z)_1=(EI_z)_2$なら**基本例題6.12**の結果と一致する．

基本例題6.16　発展例題4.29のはり（図6.12）のたわみ角の式とたわみ関数を求めよ．

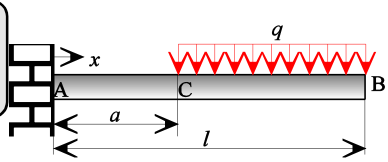


図6.12

解答　曲げモーメントの式は，

AC間　$M_{AC}=M_A+q(l-a)x$

CB間　$M_{CB}=M_A+q(l-a)x-\frac{1}{2}q(x-a)^2$

である．ただし，$M_A=-q(l^2-a^2)/2$である．

AC間でのたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\left[M_A x+\frac{1}{2}q(l-a)x^2\right]+\theta_A$$

$$v_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_A x^2+\frac{1}{6}q(l-a)x^3\right]+\theta_A x+v_A$$

である．ここで，θ_Aとv_Aは固定支点Aでのたわみ角とたわみであるが，固定支点ではたわみ角とたわみはゼロであるから，$\theta_A=0$，$v_A=0$である．

CB間でのたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{CB}=\frac{-1}{EI_z}\left[M_A x+\frac{1}{2}q(l-a)x^2-\frac{1}{6}q(x-a)^3\right]$$

$$v_{CB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_A x^2+\frac{1}{6}q(l-a)x^3-\frac{1}{24}q(x-a)^4\right]$$

である．■

発展例題6.17　発展例題4.32の二つのはり（図6.13）のヒンジ点Bでのたわみ角とたわみを求めよ．AB間の曲げ剛性を$(EI_z)_1$，BC間の曲げ剛性を$(EI_z)_2$とする．

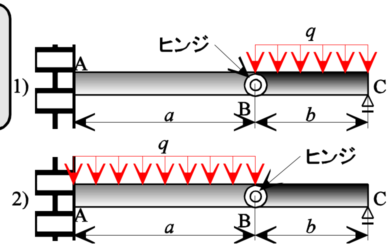


図6.13

解答　1）曲げモーメントの式は

$$M_{AB}=-\frac{1}{2}qab+\frac{1}{2}qbx,$$

$$M_{BC}=\frac{1}{2}qb(x-a)-\frac{1}{2}q(x-a)^2.$$

たわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{AB}=\frac{1}{(EI_z)_1}\left[\frac{1}{2}qabx-\frac{1}{4}qbx^2\right],$$

$$v_{AB}=\frac{1}{(EI_z)_1}\left[\frac{1}{4}qabx^2-\frac{1}{12}qbx^3\right],$$

$$\theta_{BC}=\theta_{B2}-\frac{1}{(EI_z)_2}\left[\frac{1}{4}qb(x-a)^2-\frac{1}{6}q(x-a)^3\right],$$

$$v_{BC}=v_B+\theta_{B2}(x-a)-\frac{1}{(EI_z)_2}\left[\frac{1}{12}qb(x-a)^3-\frac{1}{24}q(x-a)^4\right]$$

となる．ここで，θ_{B2}ははりBCの点Bでのたわみ角であり，AB間の式を導くにあたり$x=0$でたわみ角とたわみがゼロである条件を使った．

点Bのたわみv_Bは

$$v_B=\frac{1}{6(EI_z)_1}qa^3b$$

であり，はりABの点Bでのたわみ角（θ_{B1}で表す）は

$$\theta_{B1}=\frac{1}{4(EI_z)_1}qa^2b$$

である．はりBCの点Bでのたわみ角θ_{B2}は，点C（$x=a+b$）で$v_{BC}=0$の条件から，

$$\theta_{B2}=\frac{1}{24(EI_z)_2}qb^3-\frac{1}{6(EI_z)_1}qa^3$$

である．

2）曲げモーメントの式は

$$M_{AB}=-\frac{1}{2}qa^2+qax-\frac{1}{2}qx^2$$

$$M_{BC}=0.$$

たわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{AB}=\frac{1}{(EI_z)_1}\left[\frac{1}{2}qax-\frac{1}{2}qax^2+\frac{1}{6}qx^3\right],$$

$$v_{AB}=\frac{1}{(EI_z)_1}\left[\frac{1}{4}qax^2-\frac{1}{6}qax^3+\frac{1}{24}qx^4\right],$$

$$\theta_{BC}=\theta_{B2},$$

$$v_{BC}=v_B+\theta_{B2}(x-a)$$

となる.

点Bのたわみ v_B, はりABの点Bのたわみ角 θ_{B1}, はりBCの点Bのたわみ角 θ_{B2} は,

$$v_B=\frac{1}{8(EI_z)_1}qa^4,\ \theta_{B1}=\frac{1}{6(EI_z)_1}qa^3,\ \theta_{B2}=-\frac{1}{8(EI_z)_1 b}qa^4$$

である. ■

発展例題6.18　発展例題4.33のはり(図6.14)のたわみ関数を求めよ. AB間の曲げ剛性を $(EI_z)_1$, BC間の曲げ剛性を $(EI_z)_2$, CD間の曲げ剛性を $(EI_z)_3$ とする.

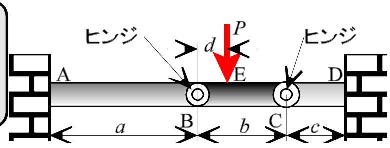


図6.14

解答　曲げモーメントの式は

AB間　$M_{AB}=-R_Ba+R_Bx$

BE間　$M_{BE}=R_B(x-a)$

EC間　$M_{EC}=R_B(x-a)-P(x-a-d)$

CD間　$M_{CD}=-R_C(x-a-b)$

であり, ここで,

$$R_B=\frac{b-d}{b}P,\ R_C=\frac{d}{b}P.$$

である.

たわみ角の式とたわみ関数を書き下すと次のようになる.

$$\theta_{AB}=\frac{1}{(EI_z)_1}\left[R_Bax-\frac{1}{2}R_Bx^2\right],$$

$$v_{AB}=\frac{1}{(EI_z)_1}\left[\frac{1}{2}R_Bax^2-\frac{1}{6}R_Bx^3\right],$$

$$\theta_{BE}=\theta_{B2}-\frac{1}{2(EI_z)_2}R_B(x-a)^2,$$

$$v_{BE}=v_B+\theta_{B2}(x-a)-\frac{1}{6(EI_z)_2}R_B(x-a)^3,$$

$$\theta_{EC}=\theta_{B2}-\frac{1}{2(EI_z)_2}\left[R_B(x-a)^2-P(x-a-d)^2\right],$$

$$v_{EC}=v_B+\theta_{B2}(x-a)-\frac{1}{6(EI_z)_2}\left[R_B(x-a)^3-P(x-a-d)^3\right],$$

$$\theta_{CD}=\theta_{C2}+\frac{1}{2(EI_z)_3}R_C(x-a-b)^2,$$

$$v_{CD}=v_C+\theta_{C2}(x-a-b)+\frac{1}{6(EI_z)_3}R_C(x-a-b)^3.$$

はりABの点Bのたわみ角θ_{B1}およびたわみv_Bは最初の二式から

$$\theta_{B1}=\frac{1}{2(EI_z)_1}R_Ba^2,\ v_B=\frac{1}{3(EI_z)_1}R_Ba^3.$$

はりCDの点Cのたわみ角θ_{C2}およびたわみv_Cは最後の二式から

$$\theta_{C2}=-\frac{1}{2(EI_z)_3}R_Cc^2,\ v_C=\frac{1}{3(EI_z)_3}R_Cc^3.$$

最後に，はりBCの点Bのたわみ角θ_{B2}は，$v_{EC}|_{x=a+b}=v_C$から

$$\theta_{B2}=\frac{1}{3(EI_z)_3b}R_Cc^3-\frac{1}{3(EI_z)_3b}R_Ba^3+\frac{1}{6(EI_z)_2b}\left[R_Bb^3-P(b-d)^3\right]$$

である．■

発展例題6.19　**発展例題6.18**で，$a=b=c=l$，$d=l/2$のとき，点Eのたわみを求めよ．ただし，$(EI_z)_1=(EI_z)_2=(EI_z)_3=EI_z$とする．

解答　$R_B=\frac{1}{2}P$，$v_B=\frac{1}{6EI_z}Pl^3$，$\theta_{B2}=\frac{1}{16EI_z}Pl^2$，$x=\frac{3}{2}l$を$v_{BE}$の式に代入して計算すると，

$$v_E=\frac{Pl^3}{6EI_z}+\frac{Pl^2}{16EI_z}\cdot\frac{l}{2}-\frac{1}{6EI_z}\cdot\frac{P}{2}\cdot\frac{l^3}{8}=\frac{3Pl^3}{16EI_z}$$

となる．■

解説：ここでは，**発展例題6.18**からの流れでたわみ関数から求めたが，図6.15のように，自由端に$P/2$の集中力をうける片持ちはりABの自由端Bのたわみ（**基本例題6.12**から計算する）

$$v_B=\frac{1}{6}\frac{Pl^3}{EI_z}$$

と中央に集中力Pをうける両端支持はりBCの中央たわみ（**基本例題6.01**から計算する）

$$v_E=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI_z}$$

との和になっている．

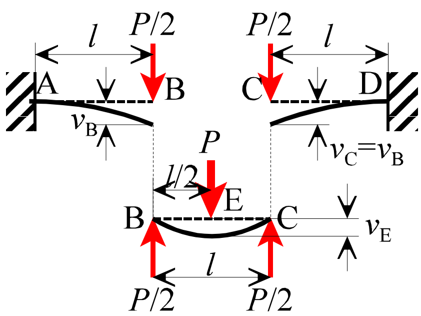


図6.15

発展例題6.20　**応用例題4.34**の点B，C，Dでのたわみ角とたわみを求めよ．曲げ剛性をEI_zとする．

解答　曲げモーメントの式は**発展例題4.34**の解答から

AB間 $M_{AB}=\frac{1}{2}wLx-\frac{1}{2}wx^2$

BC間 $M_{BC}=\frac{1}{2}wLx+wL(x-L)-\frac{1}{2}wx^2$

CD間 $M_{CD}=\frac{1}{2}wLx+wL(x-L)+wL(x-2L)-\frac{1}{2}wx^2$

DE間 $M_{DE}=\frac{1}{2}wLx+wL(x-L)+wL(x-2L)+wL(x-3L)-\frac{1}{2}wx^2$

たわみ角の式は，点Aでのたわみ角をθ_Aとすると，DE間のたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{DE}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{4}wLx^2+\frac{1}{2}wL(x-L)^2+\frac{1}{2}wL(x-2L)^2+\frac{1}{2}wL(x-3L)^2-\frac{1}{6}wx^3\right]$$

$$v_{DE}=\theta_A x-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{12}wLx^3+\frac{1}{6}wL(x-L)^3+\frac{1}{6}wL(x-2L)^3+\frac{1}{6}wL(x-3L)^3-\frac{1}{24}wx^4\right]$$

である．点Eでたわみがゼロであるので，v_{DE}の式に$x=4L$を代入してゼロに置くとθ_Aは

$$\theta_A=\frac{1}{6}\frac{wL^3}{EI_z}$$

として得られる．

以上から，点B，C，Dでのたわみ角は

$$\theta_B=\frac{1}{6}\frac{wL^3}{EI_z}-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{4}wL^3-\frac{1}{6}wL^3\right]=\frac{1}{12}\frac{wL^3}{EI_z}$$

$$\theta_C=\frac{1}{6}\frac{wL^3}{EI_z}-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{4}wL(2L)^2+\frac{1}{2}wL^3-\frac{1}{6}w(2L)^3\right]=0$$

$$\theta_D=\frac{1}{6}\frac{wL^3}{EI_z}-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{4}wL(3L)^2+\frac{1}{2}wL(2L)^2+\frac{1}{2}wL^3-\frac{1}{6}w(3L)^3\right]=-\frac{1}{12}\frac{wL^3}{EI_z}$$

であり，点B，C，Dでのたわみは

$$v_B=\frac{1}{6}\frac{wL^3}{EI_z}L-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{12}wL^4-\frac{1}{24}wL^4\right]=\frac{1}{8}\frac{wL^4}{EI_z}$$

$$v_C=\frac{1}{6}\frac{wL^3}{EI_z}(2L)-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{12}wL(2L)^3+\frac{1}{6}wL^4-\frac{1}{24}w(2L)^4\right]=\frac{1}{6}\frac{wL^4}{EI_z}$$

$$v_D=\frac{1}{6}\frac{wL^3}{EI_z}(3L)-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{12}wL(3L)^3+\frac{1}{6}wL(2L)^3+\frac{1}{6}wL^4-\frac{1}{24}w(3L)^4\right]=\frac{1}{8}\frac{wL^4}{EI_z}$$

である．■

解説1：もう慣れてきていると思うので，ここでは，BC間，CD間，DE間のたわみ角の式とたわみ関数の表示を省略した．

解説2：**発展例題4.34**の解説で，この構造システムの各区間でのせん断力と曲げモーメントの式は，長さLの分布荷重を受ける両端回転支持はりと同じせん断力と曲げモーメントの式になると述べた．しかし，たわみ角の式とたわみ関数は違うことに注意しよう．

発展例題6.21　図6.16の構造(a)の点Cの垂直方向変位δ_Cを求めよ．曲げ剛性をEI_z，ねじり剛性をGI_pとする．

指針　CB部分は同図(b)のように考える．また，AB部分は同図(c)のように考える．

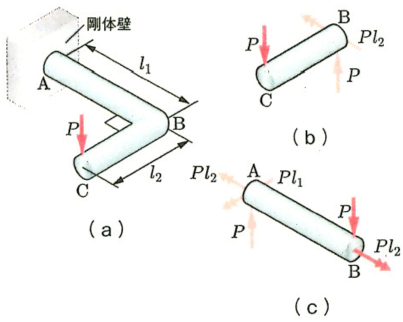


図6.16 本の図7.14

解答　まず，CB部分は**基本例題6.12**のv_Cの式で$P_1\to 0$，$P_2\to P$，$l\to l_1$とおくと

$$v_C=\frac{P}{3EI_z}l_2^3.$$

このたわみはBに対するCのたわみである．

AB部分で（Aに対する）Bのたわみは

$$v_B=\frac{P}{3EI_z}l_1^3$$

であり，BのAに対するねじり角は

$$\varphi_B-\varphi_A=\frac{Pl_2\cdot l_1}{GI_p}$$

である．CB部分は角度変化$\varphi_B-\varphi_A$に伴って傾斜し，その傾斜によって点Cは

$$(\varphi_B-\varphi_A)l_2=\frac{P}{GI_p}l_1l_2^2$$

だけ変位するので，最終的に

$$\delta_C=v_B+v_C+(\varphi_B-\varphi_A)l_2=\frac{P}{3EI_z}l_1^3+\frac{P}{3EI_z}l_2^3+\frac{P}{GI_p}l_1l_2^2$$

となる．■

発展例題6.22　図6.17（第4章の**発展例題4.35**（図4.61）と同じ）の構造の点Eの荷重Pの方向の変位δ_Eを求めよ．曲げ剛性をEI_zとし，部材BDの伸びは無視する．

指針　次のステップで求めてゆく．

1）③のはりの点Bのたわみv_Bとたわみ角θ_B

2）②の点Dのたわみ角θ_D

3）①の点Eのたわみv_E

4）最終的に点Eのy方向変位は

$$\delta_E=v_B+(\theta_B+\theta_D)c+v_E$$

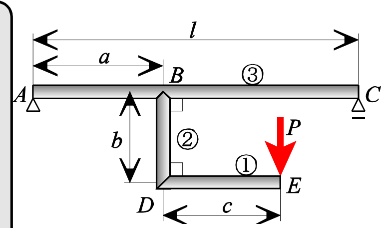


図6.17

解答　1）③のはりの点Bのたわみv_Bとたわみ角θ_B

基本例題6.01の点Cのたわみ角とたわみ，**基本例題6.04**で$M_C=-Pc$とおいた点Cのたわみとたわみ角を重ね合わせたもの．たわみ角は

$$\theta_B=\frac{P}{2EI_zl}(l-a)(l-2a)a+\frac{P}{2EI_zl}(l^2-3la+3a^2)c$$

$$v_B = \frac{P}{3EI_z l}(l-a)^2 a^2 + \frac{P}{3EI_z l}a(l-a)(l-2a)c$$

2）②の点Dのたわみ角θ_D

②の部分で点Bを原点にして点Dに向かってx_1軸をとる．曲げモーメントは$M_{BD}=-Pc$なので，たわみ角の式は

$$\theta_{BD} = \frac{1}{EI_z}Pcx_1$$

となるから，

$$\theta_D = \frac{Pcb}{EI_z}$$

3）①の点Eのたわみv_E

基本例題6.12から

$$v_E = \frac{Pc^3}{3EI_z}$$

部品だけきちんとそろっていればよいので最終的なδ_Eの式は省略する．■

解説1：2）②のDのたわみ角θ_Dについて補足しておく．この部分はBとDにモーメントを受けるはりなので，**基本例題4.22**の$M_A=M_B=-Pc$の場合に対応するので，せん断力は$F=0$，曲げモーメントは$M=-Pc$である．x_1軸をBを原点に下向きにとるとたわみの微分方程式は

$$\frac{d^2v_{DB}}{dx_1^2} = -\frac{M}{EI_z} = \frac{Pc}{EI_z}$$

となり，これを一回積分して$x_1=0$で$dv_{DB}/dx_1=0$の条件を用いればよい．

解説2：解説1で，③の点Bのたわみ角はBD部分をθ_Bだけ傾斜させる．この傾斜角を②のBにおけるたわみ角と考えると，$x_1=0$で$dv_{DB}/dx_1=\theta_B$と考えてもよい．この場合，$x_1=b$でのdv_{DB}/dx_1は$\theta_B+\theta_D$になる．

解説3：ステップ4）の式$\delta_E=v_B+(\theta_B+\theta_D)c+v_E$の第二項目について補足する．たわみ角$\theta_B$と$\theta_D$は

1）③の点Bのたわみ角θ_Bは②をθ_B傾斜させると共に①も傾斜させる．

2）②の点Dのたわみ角θ_Dは①をθ_Dだけ傾斜させる．

ことになるので，①の部分は$\theta_B+\theta_D$だけ傾斜することになり，この傾斜によって生ずる点Eのy方向変位量は$(\theta_B+\theta_D)c$である．■

発展例題6.23　図6.18（第4章の**発展例題4.36**（図4.63）と同じ）の構造の点Eのy方向変位δ_Eを求めよ．曲げ剛性をEI_z，ねじり剛性をGI_pとする．

指針　対応するフリーボディダイヤグラム（図4.64）をよく見て各部分に作用する力やモーメントを考える．

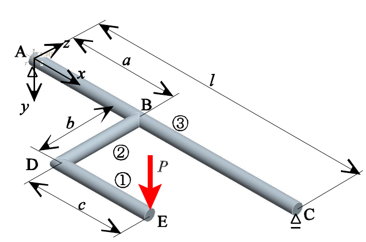


図6.18

解答　①の部分では横荷重Pだけなので，EのたわみはDを基準に

$$v_E = \frac{P}{3EI_z}c^3.$$

②の部分では横荷重PとねじりモーメントPcが作用する. DのたわみはBを基準に

$$v_D = \frac{P}{3EI_z}b^3.$$

Bに対するDのねじり角は

$$\varphi_D - \varphi_B = \frac{Pbc}{GI_p}.$$

③の部分ではBに集中荷重Pと時計回りのモーメントPcとねじりモーメントPbが作用する. たわみv_Bとたわみ角θ_Bは

$$v_B = \frac{P}{3EI_z}\frac{a^2(l-a)^2}{l} + \frac{P}{3EI_z}\frac{a(l-a)(l-2a)c}{l},$$

$$\theta_B = \frac{P}{3EI_z}\frac{a(l-a)(l-2a)}{l} + \frac{P}{3EI_z}\frac{(3a^2-3al+l^2)c}{l}.$$

Aに対するBのねじり角は

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{P}{GI_p}\frac{a(l-a)b}{l}.$$

構造全体として, 点Eのy方向変位は

$$\delta_E = v_B + \theta_B c + (\varphi_B - \varphi_A)b + v_D + (\varphi_D - \varphi_B)c + v_E$$

である. ■

解説：③の点Bではたわみv_Bを生じ, 同時にθ_Bの角度変化を生ずる. この角度変化は①をθ_Bだけ傾斜させるので点Eに$v_B+\theta_B c$の変位を生ずる. ねじり角$\varphi_B-\varphi_A$は②を傾斜させるので点Dに$(\varphi_B-\varphi_A)b$の変位を生ずる. この変位$(\varphi_B-\varphi_A)b$は点Eの変位の変位に加えられる.

②の点Dではたわみv_Dを生じ, ねじり角$\varphi_D-\varphi_B$は①を傾斜させる. そのため, 点Eの変位に$v_D+(\varphi_D-\varphi_B)c$が加わる.

最後に①の部分のDを基準としたたわみv_Eが加わる.

基本事項2（不静定はり）

1. 系全体の静力学的つりあい条件から支点反力などが求められるようなはりを「静定はり」という. 一方, 系全体の静力学的つりあい条件だけでは支点反力などが求められない場合には, はりのたわみやたわみ角という変形に関する条件を加えて系全体を考える必要がある. このようなはりを「不静定はり」という.

2. 不静定はりでは, 未知の支点反力などを文字で置き, たわみ角の式やたわみ関数を求めて拘束条件（支点でのたわみの条件など）を用いて未知の支点反力などに関する連立方程式を立ててその方程式を解く. この時点でようやくすべての支点反力などが決まり, はりのせん断力や曲げモーメントの式を完成させることができる.

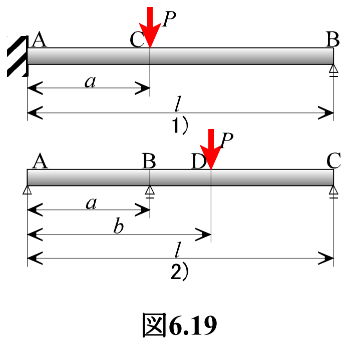


図6.19

基本例題6.24　図6.19の二つのはりは不静定はりであることを示せ.

指針　静力学的つりあい条件の式の数より未知の支点反力などの数が多いことを示す.

解答　1)のはりについて，支点反力R_AとR_B，固定モーメントM_Aの三つが未知である．式は，力のつりあい式(R_AとR_Bは上向きを仮定)

$$R_A+R_B-P=0$$

とモーメントのつりあい式(点Bまわり，M_Aは時計まわり)

$$M_A+R_Al-P(l-a)=0$$

の二つである．三つの未知量に対して式が二つしかたたないので，1)のはりは不静定である．

2)のはりについて，支点反力R_A，R_B，R_Cの三つが未知であるが，式は，力のつりあい式(R_A，R_B，R_Cは上向きを仮定)

$$R_A+R_B+R_C-P=0$$

とモーメントのつりあい式(点Cまわり)

$$R_Al+R_B(l-a)-P(l-b)=0$$

の二つである．三つの未知量に対して式が二つしかたたないので，2)のはりは不静定である．■

解説：モーメントのつりあいの式がもっと作れそうな気がする．しかし，そうではない．たとえば，1)のはりで点Cまわりの式を作ると

$$M_A+R_Aa-R_B(l-a)=0$$

であるが，力のつりあい式から$R_B=P-R_A$なので，これを代入すると，点Bまわりの式になる．

基本例題6.25　**基本例題6.24**の二つのはりの

1)支点反力R_AとR_B，固定モーメントM_A

2)支点反力R_A，R_B，R_C

を，重ね合わせ法を用いて求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

指針　ここでは，次のような二つのはりを重ね合わせて求める．

1)について：二つの片持ちはりの重ね合わせ

2)について：二つの両端支持はりの重ね合わせ

解答　1)図6.20のように，点Cに下向き荷重Pを受ける片持ちはりと，点Bに上向き荷重R_Bを受ける片持ちはりとを重ね合わせる．まず，点Cに下向き荷重Pを受けるはりの点Bでのたわみ(v_{B1}とする)は，

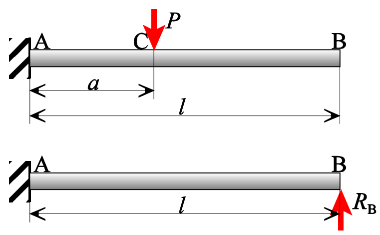


図6.20

$$v_{B1}=\frac{1}{6EI_z}\left(3Pla^2-Pa^3\right).$$

点Bに上向き荷重R_Bを受けるはりの点Bでのたわみ(v_{B2}とする)は，

$$v_{B2}=\frac{-1}{3EI_z}R_Bl^3.$$

二つの荷重が同時に作用するときのたわみは$v_B=v_{B1}+v_{B2}$である．点Bは上下に移動できないので$v_B=0$でなければならない．ゆえに，

$$3Pla^2-Pa^3-2R_Bl^3=0$$

が得られ，これよりR_Bは

$$R_B=\frac{(3l-a)a^2}{2l^3}P$$

となる．支点反力R_Aと固定モーメントM_Aは

$$R_A+R_B-P=0,\ M_A+R_Al-P(l-a)=0$$

にR_Bを代入することによって得られる．

2）図6.21のように，点Dに下向き荷重Pを受ける両端支持はりと点Bに上向き荷重R_Bを受ける両端支持はりとを重ね合わせる．まず，点Dに下向き荷重Pを受けるはりの点Bでのたわみ（v_{B1}とする）は，$a<b$であるから**基本例題6.01**のAC間の式でaをbに置き換え，$x=a$を代入すると

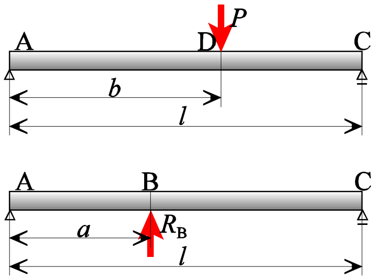


図6.21

$$v_{B1}=\frac{(l-b)P}{6EI_zl}(2l-b)ab-\frac{(l-b)P}{6EI_zl}a^3.$$

点Bに上向き荷重R_Bを受けるはりの点Bでのたわみ（v_{B2}とする）は，

$$v_{B2}=-\frac{(l-a)R_B}{6EI_zl}(2l-a)a^2+\frac{(l-a)R_B}{6EI_zl}a^3$$

1）の場合と同じく，たわみは$v_B=v_{B1}+v_{B2}$であり，点Bは上下に移動できないので$v_B=0$でなければならない．ゆえに，

$$(l-b)(2lb-b^2-a^2)P-2(l-a)^2aR_B=0$$

が得られ，これよりR_Bは

$$R_B=\frac{(l-a)(2lb-b^2-a^2)}{2(l-a)^2a}P$$

となる．残りの反力は

$$R_A+R_B+R_C-P=0,\ R_Al+R_B(l-a)-P(l-b)=0$$

にR_Bを代入することによって得られる．■

発展例題6.26　図6.22のはりのせん断力と曲げモーメントの式を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

指針　ヒンジ点Bで二つのはりに分割して，はりABとBCの先端に互いに逆向きの力を仮定し，点Bのたわみが等しいことからその力を求める．図6.23のような二つのはりの解を重ね合わせて求める．

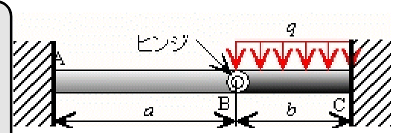


図6.22

解　答　図6.23のように，はりABとBCの先端に互いに逆向きの力R_B（ここでは未知である）がはたらく系を考える．

1．図6.23上の系のBのたわみは**基本例題6.12**の答えで$P_1\to0$，$P_2\to R_B$，$l\to a$とすると

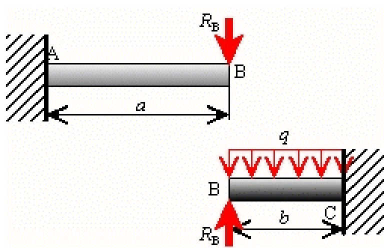


図6.23

$$v_B=\frac{R_Ba^3}{3EI_z}.$$

2．図6.23下の系のBのたわみは**発展例題6.16**の答えで$a\to0$，$l\to b$とした自由端のたわみ$\frac{qb^4}{8EI_z}$と1．で$R_B\to-R_B$，$a\to b$としたものを重ね合わせればよいので，

$$v_B=\frac{qb^4}{8EI_z}-\frac{R_Bb^3}{3EI_z}.$$

3．1．と2．を等しいとおいてR_Bについて解くと

$$R_B=\frac{3}{8}\frac{qb^4}{a^3+b^3}$$

となる．また，せん断力の式と曲げモーメントの式は，x軸の原点をAとして，

AB間 $F_{AB}=R_B$，$M_{AB}=-R_Ba+R_Bx$

BC間 $F_{BC}=R_B-q(x-a)$，$M_{BC}=R_B(x-a)-\frac{1}{2}q(x-a)^2$

である．■

解説：重ね合わせ法では，重ね合わせるはりの解がわかっている場合に便利である．以下では，重ね合わせ法を用いない広く使える方法を述べる．

基本例題6.27　基本例題6.24の二つのはりの

1）支点反力R_AとR_B，固定モーメントM_A

2）支点反力R_A，R_B，R_C

を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

指針　ここでは，たわみ角の式とたわみ関数を導いて解く．

解答　1）曲げモーメントの式は，固定モーメントM_Aを時計まわりとして，

AC間 $M_{AC}=M_A+R_Ax$，

CB間 $M_{CB}=M_A+R_Ax-P(x-a)$．

たわみ角の式とたわみ関数は，

AC間 $\theta_{AC}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2\right]$，

$$v_{AC}=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3\right].$$

CB間 $\theta_{CB}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{2}P(x-a)^2\right]$，

$$v_{CB}=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}P(x-a)^3\right].$$

である．$x=0$でたわみ角とたわみがゼロであるから，$\theta_A=0$，$v_A=0$である．

さて，$x=l$でたわみがゼロでなければならないことから，

$$3M_Al^2+R_Al^3-P(l-a)^3=0$$

が得られる．この式と点Cまわりのモーメントのつりあい式

$$M_A+R_Al-P(l-a)=0$$

からR_AとM_Aが求められる．さらに，力のつりあい式$R_A+R_B-P=0$を用いるとR_Bが求められる．

2) 曲げモーメントの式は,

AB間 $M_{AB}=R_A x$,

BD間 $M_{BD}=R_A x+R_B(x-a)$,

DC間 $M_{DC}=R_A x+R_B(x-a)-P(x-b)$.

たわみ角の式とたわみ関数は,

AB間 $\theta_{AB}=\theta_A-\dfrac{1}{2EI_z}R_A x^2$,

$v_{AB}=v_A+\theta_A x-\dfrac{1}{6EI_z}R_A x^3$.

BD間 $\theta_{BD}=\theta_A-\dfrac{1}{2EI_z}\left[R_A x^2+R_B(x-a)^2\right]$,

$v_{BD}=v_A+\theta_A x-\dfrac{1}{6EI_z}\left[R_A x^3+R_B(x-a)^3\right]$.

DC間 $\theta_{DC}=\theta_A-\dfrac{1}{2EI_z}\left[R_A x^2+R_B(x-a)^2-P(x-b)^2\right]$,

$v_{DC}=v_A+\theta_A x-\dfrac{1}{6EI_z}\left[R_A x^3+R_B(x-a)^3-P(x-b)^3\right]$.

となる. $x=0$でたわみがゼロであることから, $v_A=0$である. さらに, $x=a$と$x=l$でたわみがゼロでなければならないから,

$6EI_z\theta_A a-R_A a^3=0$, (A)

$6EI_z\theta_A l-R_A l^3-R_B(l-a)^3+P(l-b)^3=0$ (B)

が得られる. この二つの式からθ_Aを消去すると

$-R_A(l^2-a^2)l-R_B(l-a)^3+P(l-b)^3=0$ (C)

が得られ, この式と点Cまわりのモーメントのつりあい式

$R_A l+R_B(l-a)-P(l-b)=0$ (D)

からR_AとR_Bが求められ, 力のつりあい式$R_A+R_B+R_C-P=0$を用いるとR_Cが求められる. また, R_Aを式(A)に代入すればθ_Aを求めることができる. ■

解説1:この例題で述べた方法は最終的には連立一次方程式を解く問題に帰着されてその解を求めることに手間がかかりそうであるが, いくつか例外があるものの, 重ね合わせ法のように解がわかっている問題を探す必要もなく, 支点がいくつあっても適用できる点が利点として挙げられる.
解説2:2)では, 式(A), (B), (D)を連立させて解くことと同じである.

基本例題6.28 図6.24に示すはりの端点Bのたわみを求めなさい. 曲げ剛性EI_zは定数である.

指針 端点Bはバネ定数k [N/m]のバネで支持されているので, 点Bでの反力は$R_B=kv_B$ (上向き)である.

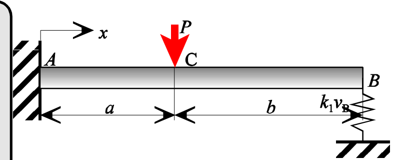


図6.24

解答　1）曲げモーメントの式は，固定モーメントM_Aを時計まわりとして，

AC間 $M_{AC}=M_A+R_Ax$，

CB間 $M_{CB}=M_A+R_Ax-P(x-a)$．

たわみ角の式とたわみ関数は，

AC間 $\theta_{AC}=\theta_A-\dfrac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2\right]$，

$$v_{AC}=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3\right].$$

CB間 $\theta_{CB}=\theta_A-\dfrac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2-\dfrac{1}{2}P(x-a)^2\right]$，

$$v_{CB}=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}P(x-a)^3\right].$$

である．$x=0$でたわみ角とたわみがゼロであるから，$\theta_A=0$，$v_A=0$である．

さて，$x=a+b$でたわみが$v_{CB}|_{x=a+b}=v_B$であることから，$l=a+b$とおいて

$$6EI_zv_B+3M_Al^2+R_Al^3-P(l-a)^3=0$$

が得られ，この式と静力学的つりあい条件

$$R_A+kv_B-P=0，\ M_A+R_Al-P(l-a)=0$$

とから，v_Bは次のような式で表される．

$$v_B=\frac{(3l-a)a^2}{6EI_z+2kl^3}P$$

■

解説：R_AとM_Aは，それぞれ，

$$R_A=\frac{6EI_z+k(l-a)(2l^2+2la-a^2)}{6EI_z+2kl^3}P，\ M_A=-\frac{6EI_z+k(l-a)l(2l-a)}{6EI_z+2kl^3}Pa$$

となる．v_Bは$k=0$なら

$$v_B=\frac{(3l-a)a^2}{6EI_z}P=\frac{P}{3EI_z}a^3+\frac{P}{2EI_z}a^2(l-a)，\ R_A=P，\ M_A=-Pa$$

となり，**発展例題6.12**で$P_2=0$としたときのv_Cに一致する．

$k=\infty$なら$v_B=0$なので代わりにR_Bを求めると，

$$R_B=kv_B=\frac{k(3l-a)a^2}{6EI_z+2kl^3}P=\frac{(3l-a)a^2}{\dfrac{6EI_z}{k}+2l^3}P$$

で$k=\infty$とすると，

$$R_B=\frac{(3l-a)a^2}{2l^3}P.$$

このR_Bの式は**基本例題6.23**の1）の系の式（**基本例題6.24**の1）の系のR_Bと同じである．R_AとM_Aも同じようにして求めることができる．

基本例題6.29　図6.25のような両端が壁に固定されているはりの途中の点Cに荷重Pが作用している．A, Bでの反力と固定モーメントを求めよ．

指針　A, Bでの反力をR_A，R_B，固定モーメントをM_A，M_Bとして図6.26のようなフリーボディダイヤグラムで考える．

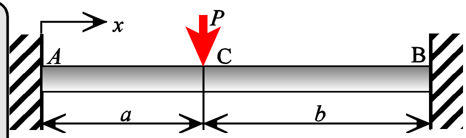


図6.25

解答　曲げモーメントは

AC間 $M_{AC}=M_A+R_Ax$

CB間 $M_{CB}=M_A+R_Ax-P(x-a)$

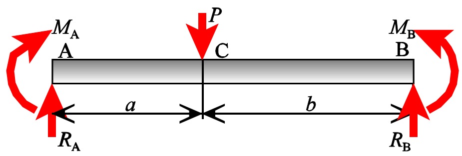


図6.26

たわみ角の式とたわみ関数は

AC間 $$\theta_{AC}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2\right]$$

$$v_{AC}=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3\right]$$

CB間 $$\theta_{CB}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{2}P(x-a)^2\right]$$

$$v_{CB}=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}P(x-a)^3\right]$$

$x=0$で$\theta_{AC}|_{x=0}=0$，$v_{AC}|_{x=0}=0$と$x=a+b$で$\theta_{CB}|_{x=a+b}=0$，$v_{CB}|_{x=a+b}=0$の条件より，$a+b=l$とおいて

$$R_A=\frac{(3a+b)b^2}{l^3}P,\quad M_A=-\frac{ab^2}{l^2}P$$

となる．静力学的つりあい条件を用いると

$$R_B=\frac{(a+3b)a^2}{l^3}P,\quad M_B=-\frac{a^2b}{l^2}P$$

となる．■

基本例題6.30　図6.27のような両端が壁に固定されているはりの途中の点CにモーメントM_Cが作用している．A, Bでの反力と固定モーメントを求めよ．

指針　A, Bでの反力をR_A，R_B，固定モーメントをM_A，M_Bとして図6.28のようなフリーボディダイヤグラムで考える．

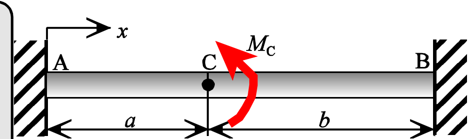


図6.27

解答　曲げモーメントは

AC間 $M_{AC}=M_A+R_Ax$

CB間 $M_{CB}=M_A+R_Ax-M_C$

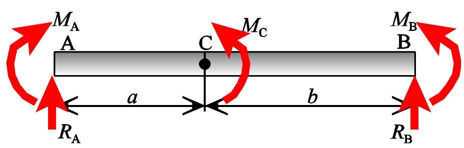


図6.28

AC間のたわみ角の式とたわみ関数は前の例題と同じで，CB間では

CB間 $$\theta_{CB}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2-M_C(x-a)\right]$$

$$v_{CB}=v_A+\theta_A x-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_A x^2+\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{2}M_C(x-a)^2\right]$$

$x=0$で$\theta_{AC}|_{x=0}=0$，$v_{AC}|_{x=0}=0$と$x=a+b$で$\theta_{CB}|_{x=a+b}=0$，$v_{CB}|_{x=a+b}=0$の条件より，$a+b=l$とおいて

$$R_A=6\frac{ab}{l^3}M_C,\quad M_A=-\frac{(2a-b)b}{l^2}M_C$$

となる．静力学的つりあい条件を用いると

$$R_B=-R_A=-6\frac{ab}{l^3}M_C,\quad M_B=-\frac{a(a-2b)}{l^2}M_C$$

となる．■

解説：**基本例題6.29**と**基本例題6.30**を重ね合わせ法で解く場合，図6.29のように考えればよい．
たとえば，系(A)(**基本例題6.29**)は系(A1)と系(C)とを重ね合わせて両端のたわみ角がゼロになるようにモーメントM_AとM_Bを決めればよい．たとえば，系(C)の両端のたわみ角は，**基本例題6.05**から計算して

$$\theta_A^{(C)}=\frac{2M_A+M_B}{6EI_z}l,$$

$$\theta_B^{(C)}=-\frac{M_A+2M_B}{6EI_z}l.$$

系(B)の両端のたわみ角は，**基本例題6.01**から計算して

$$\theta_A^{(B)}=\frac{P}{6EI_z l}ab(a+2b),$$

$$\theta_B^{(B)}=-\frac{P}{6EI_z l}ab(2a+b).$$

$\theta_A^{(B)}+\theta_A^{(C)}=0$，$\theta_B^{(B)}+\theta_B^{(C)}=0$から$M_A$と$M_B$を求めることができる．

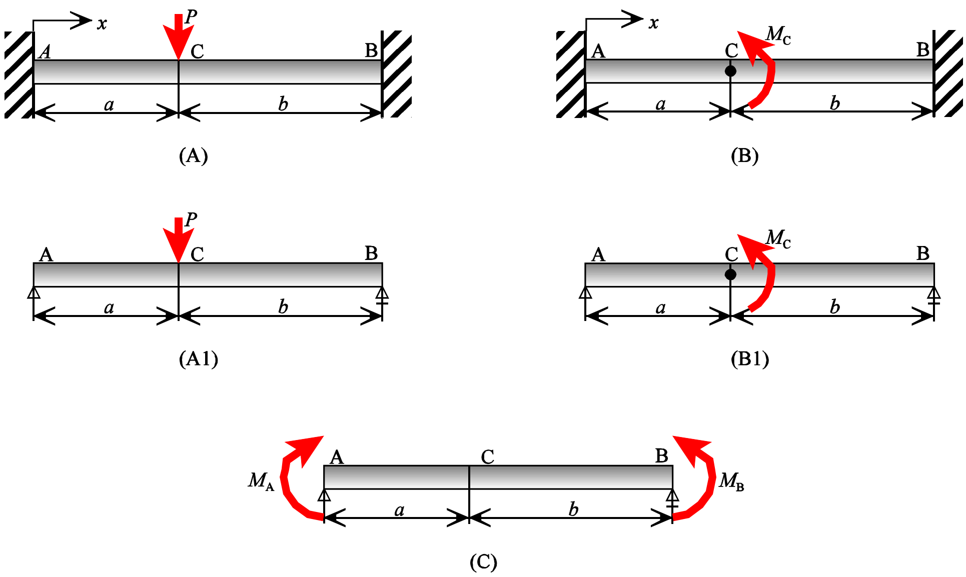


図6.29

発展例題6.31　応用例題4.34の構造システム(図6.30)において，点B，C，Dで床板のたわみがゼロになるようにケーブル#1～#3の張力が調節されている．各ケーブルに作用する力を求めよ．床板の単位長さあたりの重量，曲げ剛性を，それぞれ，w，EI_zとする．

指針　不静定はりとして考える必要がある．ここでは，点Cについて左右対称であることに着目して，点Cでたわみ角とたわみがゼロであることを用いる．

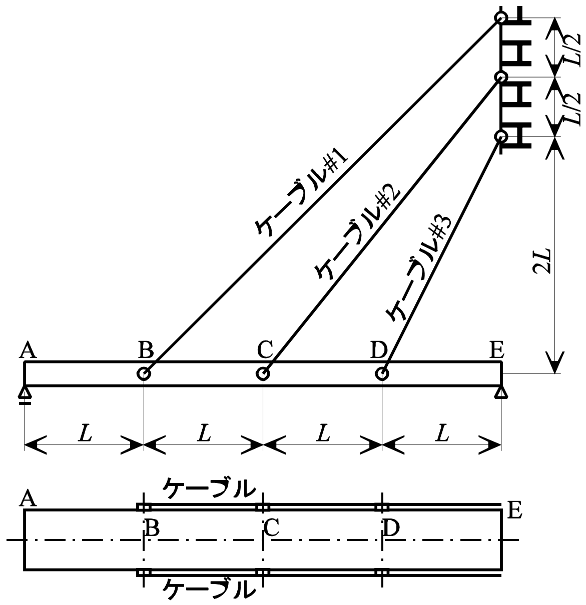


図6.30

解答　床板のB，C，Dの横荷重を上向きにR_B，R_C，R_Dとし，床板の両端点の反力を上向きにR_A，R_Eとする．xを点Aから右向きにとると，各区間で曲げモーメントの式は

AB間 $M_{AB}=-\dfrac{1}{2}wx^2+R_Ax$

BC間 $M_{BC}=-\dfrac{1}{2}wx^2+R_Ax+R_B(x-L)$

CD間 $M_{CD}=-\dfrac{1}{2}wx^2+R_Ax+R_B(x-L)+R_C(x-2L)$

DE間 $M_{DE}=-\dfrac{1}{2}wx^2+R_Ax+R_B(x-L)+R_C(x-2L)+R_D(x-3L)$

である．

たわみ角の式を書き下すと，

AB間 $\theta_{AB}=\theta_A+\dfrac{1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}wx^3-\dfrac{1}{2}R_Ax^2\right]$

BC間 $\theta_{BC}=\theta_A+\dfrac{1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}wx^3-\dfrac{1}{2}R_Ax^2-\dfrac{1}{2}R_B(x-L)^2\right]$

たわみの式は

AB間 $v_{AB}=v_A+\theta_Ax+\dfrac{1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{24}wx^4-\dfrac{1}{6}R_Ax^3\right]$

BC間 $v_{BC}=v_A+\theta_A x+\dfrac{1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{24}wx^4-\dfrac{1}{6}R_A x^3-\dfrac{1}{6}R_B(x-L)^3\right]$

である.

まず, 点A($x=0$)で$v_{AB}=0$であるから, $v_A=0$が得られる. 点B($x=L$)で$v_{AB}=0$であるから,

$$24EI_z\theta_A-4R_A L^2=-wL^3 \qquad \text{(A)}$$

点C($x=2L$)で$v_{BC}=0$であるから,

$$12EI_z\theta_A-8R_A L^2-R_B L^2=-4wL^3 \qquad \text{(B)}$$

点C($x=2L$)で$\theta_{BC}=0$であるから,

$$6EI_z\theta_A-12R_A L^2-3R_B L^2=-8wL^3$$

が得られ, これらから,

$$R_A=\frac{11}{28}wL,\ R_B=\frac{32}{28}wL$$

となり, 対称性から

$$R_E=R_A,\ R_D=R_B$$

である. 残るR_Cは次のように求めることができる.

$$R_C=4wL-2\times R_A-2\times R_B=\frac{26}{28}wL$$

以上のことから, ケーブル張力は

$$T_B=\frac{R_B}{2\sin\varphi_B}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{8}{7}wL,\ T_C=\frac{R_C}{2\sin\varphi_C}=\frac{\sqrt{41}}{10}\frac{13}{14}wL,\ T_D=\frac{R_D}{2\sin\varphi_D}=\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{8}{7}wL$$

になる. なお, $EI_z\theta_A$は

$$EI_z\theta_A=\frac{1}{42}wL^3$$

である. ■

解説1:この例題では, モーメントのつりあい条件を使っていないことに気付くが, **指針**のところであげた「点Cについて左右対称であること」でモーメントのつりあい条件の代わりにたわみ角の条件を使っていると考えてよい.

解説2:対称条件を使わない場合, CD間とDE間のたわみ関数を求めて点DとEでたわみがゼロである条件を用いることになり, 次の二つの式が加わる.

$$72EI_z\theta_A-108R_A L^2-32R_B L^2-4R_C L^2=-81wL^3,$$

$$24EI_z\theta_A-64R_A L^2-27R_B L^2-8R_C L^2-R_D L^2=-64wL^3.$$

R_A～R_Eを求めるためには, これらの式と, 式(A), (B)とモーメントのつりあい式

$$4R_A L+3R_B L+2R_C L+R_D L=8wL$$

を含めた5元の連立一次方程式を解く必要があるが, 通常は数値で与えられることが多いのでコンピュータを用いて計算することになる. 式の形で求める場合は手計算をするか数式処理を使って求めることになる.

ちなみに, これらの式にR_A～R_Dと$EI_z\theta_A$を代入すれば, いずれの式も満足されていることがわかる.

発展例題6.32　図6.31のはりのヒンジ点Bのたわみとたわみ角を求めよ．曲げ剛性EI_zは定数である．

指針　ヒンジ点Bで二つのはりに分割して，はりABとBCの先端に互いに逆向きの力を仮定し，点Bのたわみが等しいことからその力を求める．次に，その力を使ってたわみ角とたわみを計算する．

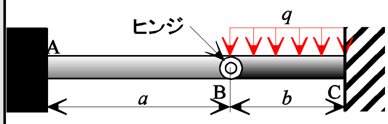


図6.31

解答　図6.32のように，はりABとBCの先端に互いに逆向きの力R_B（ここでは未知である）を仮定すると曲げモーメントの式は次式で表すことができる．

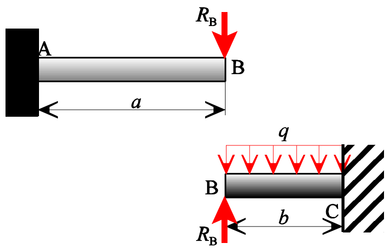


図6.32

AB間　$M_{AB}=-R_B a+R_B x$

BC間　$M_{BC}=R_B(x-a)-\dfrac{1}{2}q(x-a)^2$

たわみ角の式とたわみ関数は，AB間では

$$\theta_{AB}=\frac{1}{EI_z}\left[R_B ax-\frac{1}{2}R_B x^2\right],$$

$$v_{AB}=\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_B ax^2-\frac{1}{6}R_B x^3\right].$$

BC間では，θ_{B2}をはりBCの点Bでのたわみ角，v_Bを点Bのたわみとして

$$\theta_{BC}=\theta_{B2}-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_B(x-a)^2-\frac{1}{6}q(x-a)^3\right],$$

$$v_{BC}=v_B+\theta_{B2}(x-a)-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_B(x-a)^3-\frac{1}{24}q(x-a)^4\right].$$

$x=a+b$で$\theta_{BC}|_{x=a+b}=0$，$v_{BC}|_{x=a+b}=0$でなければならないことから，

$$\theta_{B2}=\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_B b^2-\frac{1}{6}qb^3\right],\quad v_B=-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{3}R_B b^3-\frac{1}{8}qb^4\right]$$

が得られ，v_Bの式と$v_{AB}|_{x=a}$が等しいこと，すなわち，

$$-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{3}R_B b^3-\frac{1}{8}qb^4\right]=\frac{1}{3EI_z}R_B a^3$$

から，R_Bは

$$R_B=\frac{3}{8}\frac{qb^4}{a^3+b^3}.$$

このR_Bを用いてBのたわみ角とたわみの式を求めると

$$\theta_{B1}=\theta_{AB}|_{x=a}=\frac{3}{16EI_z}\frac{qa^2b^4}{a^3+b^3},\quad \theta_{B2}=(\theta_{BC}|_{x=a})=\frac{1}{48EI_z}\frac{qb^3}{a^3+b^3}(b^3-8a^3),$$

$$v_B=\frac{1}{8EI_z}\frac{qa^3b^4}{a^3+b^3}$$

となる．■

解説：この例題は**発展例題6.26**を違う方法で解きなおしたものであるが，ここでは，ヒンジでつながれた二本のはりをあたかも一本のはりのように扱い，ヒンジ点Bで曲げモーメントがゼロになるように曲げモーメントの式をたて，たわみ角の不連続を表現できるようにたわみ角の式をつくっていることに注意．

発展例題6.33　図6.33の構造(a)に示す構造の点Dのy方向変位δ_Dを求めよ．曲げ剛性をEI_z，ねじり剛性をGI_pとする．

指針　CD部分は同図(b)のように考える．また，AB部分は同図(c)のように考える．

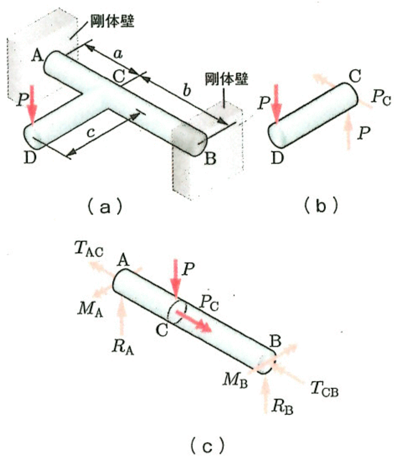


図6.33 本の図7.15

解答　まず，CD部分は前の例題のCB部分と同じなので，Cに対するDのたわみは

$$v_D = \frac{P}{3EI_z}c^3.$$

AB部分で点CにねじりモーメントPcが作用する場合，**基本例題3.07**から，$a+b=l$とおいて

$$T_{AC} = \frac{b}{l}Pc\ ,\ T_{CB} = -\frac{a}{l}Pc$$

であるから，CのAに対する角度変化は

$$\varphi_C - \varphi_A = \frac{Pc}{GI_p}\frac{ab}{l}$$

である．CD部分は角度変化$\varphi_B - \varphi_A$に伴って傾斜し，その傾斜によって点Cは

$$(\varphi_C - \varphi_A)c = \frac{P}{GI_p}\frac{abc^2}{l}$$

だけ変位する．

Cのたわみは**基本例題6.28**のたわみ関数から，

$$v_C = \frac{P}{3EI_z}\frac{a^3b^3}{l^3}$$

であるので，最終的に

$$\delta_D = v_C + v_D + (\varphi_C - \varphi_A)c = \frac{P}{3EI_z}\frac{a^3b^3}{l^3} + \frac{P}{3EI_z}c^3 + \frac{P}{GI_p}\frac{abc^2}{l}$$

である．■

発展例題6.34　図6.34のような，部材BCが部材ABとDCの点BとCでピンで接続された構造の点BとCの垂直方向変位，部材BCに生ずる内力N_{BC}と長さの変化量を求めよ．

部材ABとDCの曲げ剛性をEI_z，部材BCの断面積をA，ヤング率をE_1とする．

指針　部材BCとはりDCを一つのバネとして考えると，フリーボディダイヤグラムは図6.35のように描ける．この系は**基本例題6.28**の場合と同じである．

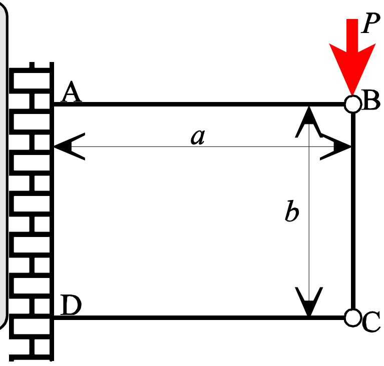


図6.34

解答　部材BCとはりDCを一つのバネのように考えてバネ定数をkとすると，$f_B=kv_B$である．**基本例題6.28**を参考にすると，

$$6EI_zv_B+3M_Aa^2+R_Aa^3=0.$$

静力学的つりあい条件は

$$R_A+kv_B-P=0,\ M_A+R_Aa=0$$

となるから，v_Bは

$$v_B=\frac{Pa^3}{3EI_z+ka^3}$$

となる．一方，

$$v_B=\frac{f_B}{k}=\frac{f_Ba^3}{3EI_z}+\frac{f_Bb}{AE_1}$$

であるから，

$$k=\frac{3EI_zAE_1}{3EI_zb+AE_1a^3}.$$

ゆえに，点Bの垂直方向変位は

$$v_B=\frac{a^3}{3EI_z}\frac{3EI_zb+AE_1a^3}{3EI_zb+2AE_1a^3}P.$$

点Cの垂直方向変位v_Cは

$$v_C=\frac{a^3}{3EI_z}\frac{AE_1a^3}{3EI_zb+2AE_1a^3}P.$$

部材BCに生ずる内力N_{BC}は

$$N_{BC}=-\frac{AE_1a^3}{3EI_zb+2AE_1a^3}P$$

で，長さの変化量δ_{BC}は

$$\delta_{BC}=-\frac{a^3b}{3EI_zb+2AE_1a^3}P$$

である．■

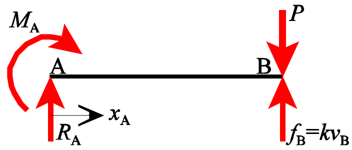


図6.35

解説1：$E_1=0$なら$v_B=Pa^3/3EI_z$，$v_C=0$である．$E_1=\infty$なら$v_B=v_C=Pa^3/6EI_z$である．また，$b=0$としても$v_B=v_C=Pa^3/6EI_z$である．$E_1=\infty$の場合も$b=0$の場合もはり部材ABとDCは$P/2$ずつ負担することになる．

解説2：この問題に対応するフリーボディダイヤグラムは図6.36のようになっている．ここでは系(B)と(C)の変形の考え方を述べておく．系(C)ではDを基準に点Cは下向きにたわみv_Cを生じ，系(B)では点Cを基準に点Bはδ_{BC}だけ長さが変化する．$\delta_{BC}>0$（すなわち，内力$N_{BC}>0$）とすると，点Bは点Dに対して$v_C-\delta_{BC}$だけ下方に移動することになる．一方，系(A)の点Bは点Aを基準に下向きのたわみv_Bが生ずることになるので，結局

$$v_B=v_C-\delta_{BC}$$

が成立する．

はりのたわみ量は$v_B=(P-f_B)a^3/3EI_z$，$v_C=f_Ba^3/3EI_z$．部材BCの長さの変化量は，部材BCの内力は$N_{BC}=-f_B$なので，$\delta_{BC}=N_{BC}b/AE_1=-f_Bb/AE_1$．上の式に代入すると

$$\frac{(P-f_B)a^3}{3EI_z}=\frac{f_Ba^3}{3EI_z}+\frac{f_Bb}{AE_1}$$

となり，この式からf_Bを求めることができる．

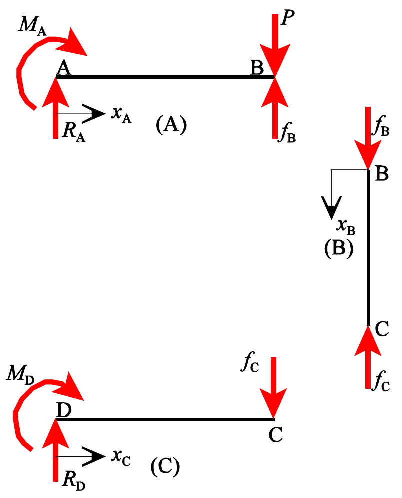


図6.36

発展例題6.35　図6.37のはりの支点反力を求めるための式を求めよ．支点Dには回転バネ（渦巻きバネ）が取り付けられており，角度変化に比例するモーメント$M_D=k_\theta\theta_D$を生ずるものとする．

指針　図6.37のはりに対するフリーボディダイヤグラムは図6.38のようになる．

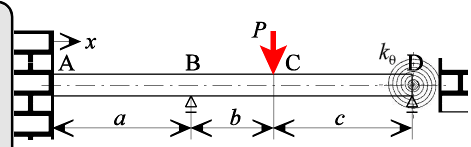


図6.37

解答　各荷重区間での曲げモーメントの式は，フリーボディダイヤグラムから，

AB間 $M_{AB}=M_A+R_{Ax}$，

BC間 $M_{BC}=M_A+R_{Ax}+R_B(x-a)$

CD間 $M_{CD}=M_A+R_{Ax}+R_B(x-a)-P(x-a-b)$

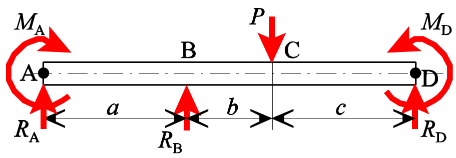


図6.38

たわみ角の式は

AB間 $\theta_{AB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2\right]$

BC間 $\theta_{BC}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2+\dfrac{1}{2}R_B(x-a)^2\right]$

CD間 $\theta_{CD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2+\dfrac{1}{2}R_B(x-a)^2-\dfrac{1}{2}P(x-a-b)^2\right]$

たわみ関数は

AB間 $v_{AB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Ax^2+\dfrac{1}{6}R_Ax^3\right]$

BC間 $v_{BC}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Ax^2+\dfrac{1}{6}R_Ax^3+\dfrac{1}{6}R_B(x-a)^3\right]$

CD間 $v_{CD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Ax^2+\dfrac{1}{6}R_Ax^3+\dfrac{1}{6}R_B(x-a)^3-\dfrac{1}{6}P(x-a-b)^3\right]$

である．

力のつりあいとモーメントのつりあいは

$$R_A+R_B+R_D-P=0 \qquad \text{(A)}$$

$$-M_A-R_A(a+b+c)-R_B(b+c)+Pc+M_D=0 \qquad \text{(B)}$$

支点BとDでたわみがゼロであることから，

$$3M_Aa^2+R_Aa^3=0 \qquad \text{(C)}$$

$$3M_A(a+b+c)^2+R_A(a+b+c)^3+R_B(b+c)^3=Pc^3 \qquad \text{(D)}$$

となる．

式(A)から(D)が支点反力を求めるための式になるが，モーメントのつりあい式で

$$M_D=k_\theta\theta_D=\frac{-k_\theta}{EI_z}\left[M_A(a+b+c)+\frac{1}{2}R_A(a+b+c)^2+\frac{1}{2}R_B(b+c)^2-\frac{1}{2}Pc^2\right]$$

であるから，これを式(B)に代入すると

$$\left[1+\frac{k_\theta}{EI_z}(a+b+c)\right]M_A+\left[1+\frac{k_\theta}{2EI_z}(a+b+c)\right](a+b+c)R_A+\left[1+\frac{k_\theta}{2EI_z}(b+c)\right](b+c)R_B=\left[1+\frac{k_\theta}{2EI_z}c\right]cP \qquad \text{(B')}$$

となり，式(A)，(B')，(C)，(D)が支点反力を求めるための式になる．■

解説1：回転バネとか渦巻きバネについて少し補足する．図6.39左のように支点Dに剛体棒を取り付け，バネ定数kのバネを二本，はりの中立面に対して対称な位置に間隔d離して取り付ける．図6.39右のようにはりにたわみが生じて支点Dではりの横断面がθ_Dだけ傾斜すると，バネの取り付け位置は$\theta_Dd/2$だけ左右に移動し，バネにはこの移動量に比例した大きさ$f=k\theta_Dd/2$の力が発生する．バネが剛体棒におよぼす力の向きは上のバネは右向き，下のバネは左向きなので，合力はゼロで時計回りのモーメント$M_D=k\theta_Dd^2/2$が生ずる．ここで，$k_\theta=kd^2/2$とおくと$M_D=k_\theta\theta_D$となる．このモーメントは支点Dでのはりの傾斜角を減少させる．

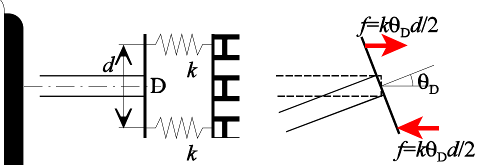


図6.39

解説2：支点Dではたわみがゼロで，D付近で正のたわみ（はりが下に凸にたわむ）を生じていると仮定すると，点Dでのたわみ角は$\theta_D<0$であり，$k_\theta>0$なので$M_D=k_\theta\theta_D<0$である．すなわち，回転バネによって発生するモーメントは時計回りである．M_Dは符号も含むので$M_D=k_\theta\theta_D$という式の元での図6.38のフリーボディダイヤグラムの表記は，実際には図6.40のように時計回りで大きさが$-k_\theta\theta_D>0$のモーメントを受けているということと同じである．

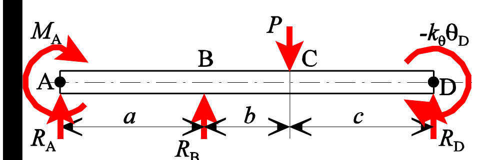


図6.40

発展例題6.36　図6.41の構造の点Cのたわみを求めよ．また，点Aにおける水平方向反力とその向きを求めよ．構造は点Cについて左右対称で，縦部材と横部材の曲げ剛性を，それぞれ，$(EI_z)_1$と$(EI_z)_2$とする．

指針　縦部材と横部材それぞれのフリーボディダイヤグラムからたわみ角の式とたわみ関数を求め，点Bでたわみ角が等しい条件を使う．

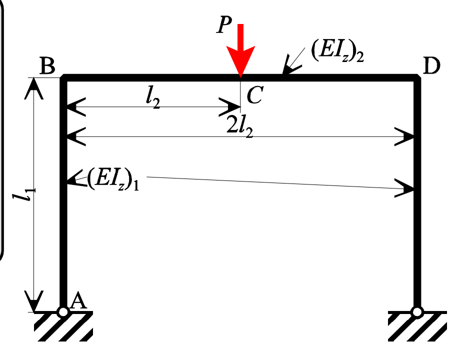


図6.41

解答　対応するフリーボディダイヤグラムは図6.42である．

まず，縦部材について，力のつりあい$R_A+R_B=0$から$R_B=-R_A$．点Bまわりのモーメントのつりあい$M_B-R_Al_1=0$から$R_A=M_B/l_1$である．点Aを基準に上向きにx_1軸を取ると，曲げモーメントの式は

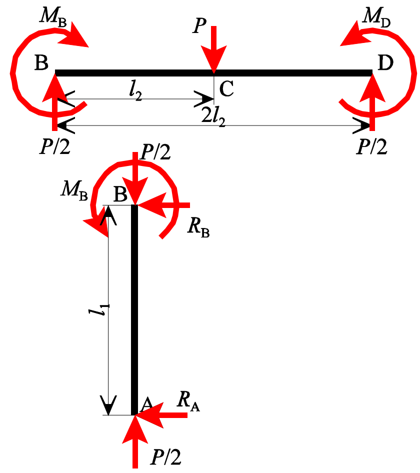


図6.42

$$M_{AB}=R_Ax_1$$

である．たわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{AB}=\theta_A-\frac{1}{(EI_z)_1}\frac{1}{2}R_Ax_1^2,\quad v_{AB}=\theta_Ax_1-\frac{1}{(EI_z)_1}\frac{1}{6}R_Ax_1^3$$

となり，点Bでたわみがゼロであることから

$$\theta_A=\frac{1}{(EI_z)_1}\frac{1}{6}R_Al_1^2=\frac{1}{(EI_z)_1}\frac{1}{6}M_Bl_1$$

点Bでのたわみ角は

$$\theta_B=\theta_A-\frac{1}{(EI_z)_1}\frac{1}{2}R_Al_1^2=\theta_A-\frac{1}{(EI_z)_1}\frac{1}{2}M_Bl_1=-\frac{1}{(EI_z)_1}\frac{1}{3}M_Bl_1. \qquad \text{(A)}$$

となる．

次に，横部材について，フリーボディダイヤグラムから曲げモーメントの式は，点Bを基準に右向きにx_2軸を取ると

$$M_{BC}=M_B+\frac{1}{2}Px_2$$

であるので，たわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{BC}=\theta_B-\frac{1}{(EI_z)_2}\left(M_Bx_2+\frac{1}{4}Px_2^2\right),\quad v_{BC}=\theta_Bx_2-\frac{1}{(EI_z)_2}\left(\frac{1}{2}M_Bx_2^2+\frac{1}{12}Px_2^3\right)$$

となる．点C$(x_2=l_2)$でたわみ角がゼロであるので，

$$\theta_C=\theta_B-\frac{1}{(EI_z)_2}\left(M_Bl_2+\frac{1}{4}Pl_2^2\right)=0$$

この式と式(A)から，

$$3(EI_z)_1\theta_B+M_Bl_1=0$$

$$4(EI_z)_2\theta_B-4M_Bl_2=Pl_2^2$$

が得られ，これらからM_Bとθ_Bは次式のように得られる．

$$M_B=-\frac{3}{4}\frac{(EI_z)_1l_2^2P}{3(EI_z)_1l_2+(EI_z)_2l_1},\quad \theta_B=\frac{1}{4}\frac{l_1l_2^2P}{3(EI_z)_1l_2+(EI_z)_2l_1}$$

点Cのたわみは

$$v_C=v_{BC}|_{x_2=l_2}=\theta_Bl_2-\frac{1}{(EI_z)_2}\left(\frac{1}{2}M_Bl_2^2+\frac{1}{12}Pl_2^3\right)=\frac{1}{24}\frac{l_2^3P}{(EI_z)_2}\frac{3(EI_z)_1l_2+4(EI_z)_2l_1}{3(EI_z)_1l_2+(EI_z)_2l_1}.$$

点Aにおける水平方向反力は$R_A=M_B/l_1$から求めることができ，大きさは$|M_B/l_1|$で向きは右向きである．■

解説1：この例題では，図6.43のように，たわみ軸は，縦部材については右向きに，横部材については下向きに，それぞれ，取っている．この場合，縦部材のθ_Bは$\theta_{AB}(l_1)>0$，横部材のθ_Bは$\theta_{BC}(0)>0$になっている．このようにたわみ軸を取ると，部材接合部でたわみ角が等しい条件が使いやすい．一般に，この種の問題では，各部材ごとのはりの軸線に沿った座標とたわみの向きの取り方をよく考える必要がある．

解説2：特に，$(EI_z)_1=(EI_z)_2=EI_z$なら，

$$M_B=-\frac{3}{4}\frac{l_2^2P}{3l_2+l_1},\quad \theta_B=\frac{1}{4}\frac{1}{EI_z}\frac{l_1l_2^2P}{3l_2+l_1}$$

となり，

$$v_C=\frac{1}{24}\frac{l_2^3P}{EI_z}\frac{4l_1+3l_2}{l_1+3l_2}.$$

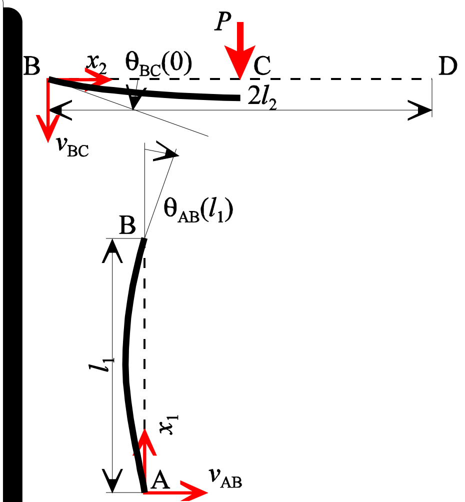


図6.43

発展例題6.37　図6.44のような構造の点Bのたわみを求めよ．また，点AとDに生ずる垂直方向反力を求めよ．横部材と縦部材の曲げ剛性は等しく，EI_zとする．縦部材BCの長さの変化は小さいとして無視する．

指針　発展例題6.34に似ているが，点BとCの結合点はピン結合ではない．また，縦部材の長さの変化を無視するので，点BとCのたわみは等しい．

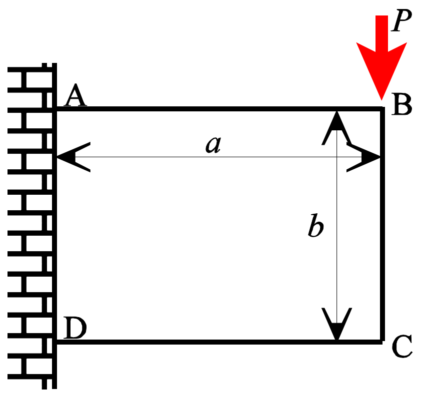


図6.44

解答　フリーボディダイヤグラムを図6.45のように描くと，各系の静力学的つりあい式は，次のようになる．

	垂直	水平	モーメント
系(A)	$R_{AV}+f_{BV}-P=0$	$R_{AH}-f_{BH}=0$	$-M_A-R_{AV}a+M_B=0$
系(B)	$f_{CV}-f_{BV}=0$	$f_{BH}+f_{CH}=0$	$-M_B-M_C-f_{BH}b=0$
系(C)	$R_{DV}-f_{CV}=0$	$R_{DH}-f_{CH}=0$	$-M_D-R_{DV}a+M_C=0$

これらから，系全体の静力学的つりあい式は

$$R_{AV}+R_{DV}-P=0,\ R_{AH}+R_{DH}=0,\ M_A+M_D+f_{BH}b+Pa=0.$$

系(A)について，点Bのたわみ角とたわみは

$$\theta_B=\theta_{AB}|_{x_A=a}=\frac{-1}{EI_z}\left(M_Aa+\frac{1}{2}R_{AV}a^2\right),$$

$$v_B=v_{AB}|_{x_A=a}=\frac{-1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}M_Aa^2+\frac{1}{6}R_{AV}a^3\right).$$

系(B)について，

$$\theta_B=\theta_{BC}|_{x_B=0}=\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}(2M_B-M_C)b,\quad \theta_C=\theta_{BC}|_{x_B=b}=-\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}(M_B-2M_C)b$$

となり，さらに$-M_A-R_{AV}a+M_B=0$と$-M_D-R_{DV}a+M_C=0$を用いると

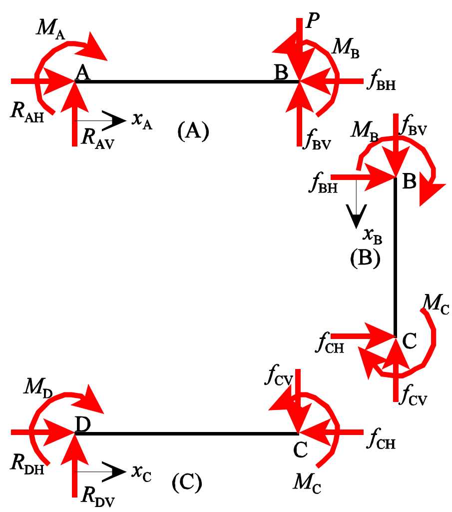


図6.45

$$\theta_B=\theta_{BC}|_{x_B=0}=\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}(2M_A+2R_{AV}a-M_D-R_{DV}a)b,$$

$$\theta_C=\theta_{BC}|_{x_B=b}=-\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}(M_A+R_{AV}a-2M_D-2R_{DV}a)b.$$

系(C)について,

$$\theta_C=\theta_{DC}|_{x_C=a}=\frac{-1}{EI_z}\left(M_Da+\frac{1}{2}R_{DV}a^2\right),\ v_C=v_{DC}|_{x_C=a}=\frac{-1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}M_Da^2+\frac{1}{6}R_{DV}a^3\right).$$

縦部材の長さが変化しないので，$v_B=v_C$が成り立つから，

$$3M_A+aR_{AV}-3M_D-aR_{DV}=0. \qquad \text{(A)}$$

$\theta_{AB}|_{x_A=a}=\theta_{BC}|_{x_B=0}$，$\theta_{BC}|_{x_B=b}=\theta_{DC}|_{x_C=a}$であるから，

$$(6a+2b)M_A+(3a+2b)aR_{AV}-bM_D-abR_{DV}=0, \qquad \text{(B)}$$

$$-bM_A-abR_{AV}+(6a+2b)M_D+(3a+2b)aR_{DV}=0. \qquad \text{(C)}$$

垂直方向の力のつり合いから

$$R_{AV}+R_{DV}=P. \qquad \text{(D)}$$

式(A)～(D)より，

$$R_{AV}=R_{DV}=\frac{1}{2}P,\ M_A=M_D=-\frac{1}{2}\frac{3a+b}{6a+b}Pa.$$

その他の未知量のうちM_BとM_Cは

$$M_B=M_A+R_{AV}a=\frac{1}{2}\frac{3a}{6a+b}Pa,\ M_C=M_D+R_{DV}a=\frac{1}{2}\frac{3a}{6a+b}Pa$$

これらは(仮定したとおり)共に時計回りである．系全体のモーメントのつりあい式$M_A+M_D+f_{BH}b=-Pa$から，

$$f_{BH}=-\frac{3a}{6a+b}\frac{a}{b}P,\ R_{AH}=-R_{DH}=f_{BH}=-\frac{3a}{6a+b}\frac{a}{b}P.$$

点B，Cのたわみは

$$v_B=v_C=\frac{1}{12}\frac{Pa^3}{EI_z}\left(3\frac{3a+b}{6a+b}-1\right)=\frac{1}{6}\frac{Pa^3}{EI_z}\left(1-\frac{9}{2}\frac{a}{6a+b}\right)$$

■

解説1：部材ごとのフリーボディダイヤグラムで，切断部分に外力として置いた力やモーメントは，系全体に戻したときには消えるように置く．たとえば，図6.45の(A)と(B)で，切断部分Bに置いている力とモーメントの向きに注意しよう．これらは，重ね合わせたときすべて消えて外力Pしか残らない．

解説2：系(B)のたわみ角の式の導出は**基本例題6.05**を参照のこと．モーメントの向きに注意！

解説3：点AとDの固定モーメントの向きはいずれも仮定した向きとは逆になっている．

解説4：点AとDの水平方向反力R_{AH}とR_{DH}は大きさが$\frac{3a}{6a+b}\frac{a}{b}P$で点Aでは左向き，点Dでは右向きである．

解説5：点AとDで水平方向反力が生ずる理由は，縦部材の両端のモーメントM_BとM_Cによる．M_BとM_Cの式を，モーメントの向きに注意して，**基本例題4.22**の支点反力の式に代入すると，点AとDで水平方向反力が生ずることがわかる．もし，縦部材の両端のモーメントM_BとM_Cが大きさが等しく互いに逆向きであれば，反力は生じないことも**基本例題4.22**からわかる．

発展例題6.38　図6.46のような構造の点AとCに生ずる反力を求めよ．また，点Dのたわみを求めよ．横部材と縦部材の曲げ剛性は等しく，EI_zとする．すべての部材の長さの変化はないものとし，点Bの移動量も無視する．

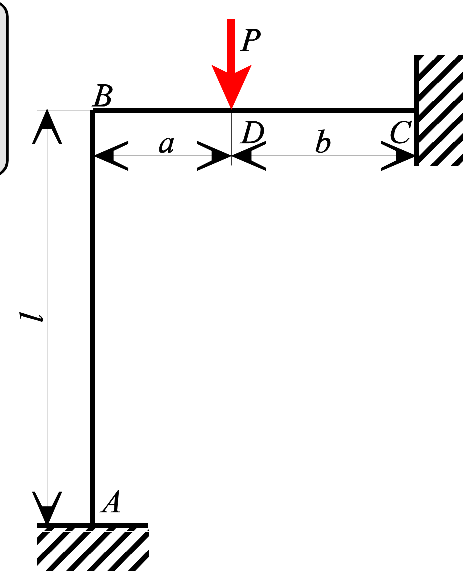


図6.46

解答　フリーボディダイヤグラムを図6.47のように描くと，各系の静力学的つりあい式は，次のようになる．

	垂直	水平	モーメント
系(A)	$R_{AV}-f_{BV}=0$	$R_{AH}-f_{BH}=0$	$-M_A+R_{AH}l+M_B=0$
系(B)	$f_{BV}+R_{CV}-P=0$	$f_{BH}-R_{CH}=0$	$-M_B-f_{BV}(a+b)+M_C+Pb=0$

これらから，系全体の静力学的つりあい式は

$$R_{AV}+R_{CV}-P=0,\ R_{AH}-R_{CH}=0,\ -M_A+M_C+R_{AH}l-f_{BV}(a+b)+Pb=0$$

となる．

系(A)について，点Bのたわみ角とたわみは

$$\theta_B=\theta_{AB}|_{x_A=l}=\frac{-1}{EI_z}\left(M_Al-\frac{1}{2}R_{AH}l^2\right),\quad v_B=v_{AB}|_{x_A=l}=\frac{-1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}M_Al^2-\frac{1}{6}R_{AH}l^3\right).$$

点Bではたわみがゼロ，すなわち，$v_B=v_{AB}|_{x_A=l}=0$とすると，$3M_A-R_{AH}l=0$が成り立つので，点Bのたわみ角は

$$\theta_B=\theta_{AB}|_{x_A=l}=\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}R_{AH}l^2.$$

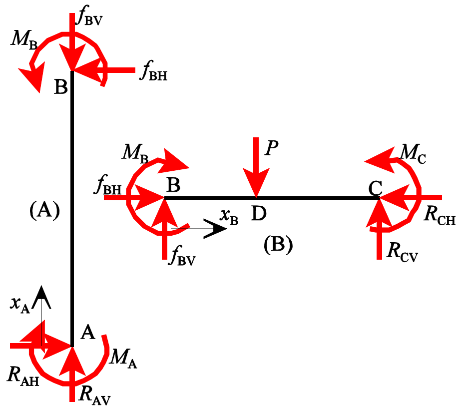


図6.47

系(B)について，$x_B=a+b$でたわみ角とたわみがゼロであるから

$$2EI_z\theta_B-2M_B(a+b)-f_{BV}(a+b)^2+Pb^2=0,$$

$$6EI_z\theta_B(a+b)-3M_B(a+b)^2-f_{BV}(a+b)^3+Pb^3=0.$$

が得られる．

$-M_B-f_{BV}(a+b)+M_C+Pb=0$を用いて系(B)の式から$M_B$を消去し，$6EI_z\theta_B=R_{AH}l^2$を用いると

$$R_{AH}l^2-6M_C(a+b)+3f_{BV}(a+b)^2=3[2(a+b)-b]Pb, \qquad \text{(A)}$$

$$R_{AH}l^2(a+b)-3M_C(a+b)^2+2f_{BV}(a+b)^3=[3(a+b)^2-b^2]Pb \qquad \text{(B)}$$

となる．系全体のモーメントのつりあい式から

$$2R_{AH}l+3M_C-3f_{BV}(a+b)=-3Pb. \qquad \text{(C)}$$

以上より，点AとCに生ずる反力は

$$R_{AH}=R_{CH}=\frac{3}{2}\frac{ab^2}{(a+b)(a+b+l)l}P,\quad R_{AV}=f_{BV}=\frac{1}{2}\frac{2(a+b)(3a+b)+(3a+2b)l}{(a+b)^3(a+b+l)}b^2P,\quad M_C=\frac{1}{2}\frac{(2a+b)l+a(a+b)}{(a+b)^2(a+b+l)}abP,$$

$$R_{CV}=P-R_{AV},\quad M_A=\frac{1}{3}R_{AH}l,\quad M_B=M_A-R_{AH}l=-2M_A.$$

点Dのたわみは次式から求めることができる．

$$v_D=\theta_Ba-\frac{1}{EI_z}\left(\frac{1}{2}M_Ba^2+\frac{1}{6}f_{BV}a^3\right)=\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}\left[R_{AH}la(l+2a)-R_{AV}a^3\right]$$

■

発展例題6.39　図6.48のような構造の回転支点AとDに生ずる反力を求めよ．横部材と縦部材の曲げ剛性は等しく，EI_zとする．すべての部材の長さの変化はないものとする．分布荷重は下向きで，点Bから右向きにx_Bをとって$q=q_0x_B/b$とする．

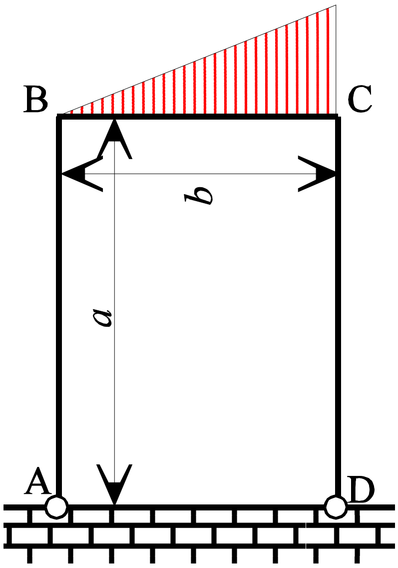


図6.48

解答　フリーボディダイヤグラムを図6.49のように描くと，各系の静力学的つりあい式は，次のようになる．

	垂直	水平	モーメント
系(A)	$R_{AV}-f_{BV}=0$	$R_{AH}+f_{BH}=0$	$-R_{AH}a-M_B=0$
系(B)	$f_{BV}+f_{CV}-\frac{1}{2}q_0b=0$	$-f_{BH}+f_{CH}=0$	$M_B-M_C-f_{BV}b+\frac{1}{6}q_0b^2=0$
系(C)	$R_{DV}-f_{CV}=0$	$-f_{CH}+R_{DH}=0$	$-f_{CH}a+M_C=0$

これらから，系全体の静力学的つりあい式は

$$R_{AV}+R_{DV}-\frac{1}{2}q_0b=0,\ R_{AH}+R_{DH}=0,\ R_{AH}a+f_{BV}b+f_{CH}a-\frac{1}{6}q_0b^2=0$$

となる．モーメントのつりあい式は，系(A)と(B)の水平方向の力のつり合いから$R_{AH}+f_{CH}=0$，系(A)の垂直方向の力のつり合いから$f_{BV}=R_{AV}$であるから，

$$R_{AV}b-\frac{1}{6}q_0b^2=0.$$

これより，

$$R_{AV}=f_{BV}=\frac{1}{6}q_0b$$

が得られ，系(B)と(C)の垂直方向の力のつり合いから

$$R_{VD}=f_{CV}=\frac{1}{3}q_0b$$

も得られる．また，系(B)のモーメントのつりあいから，

$$M_B=M_C=-R_{AH}a=R_{DH}a.$$

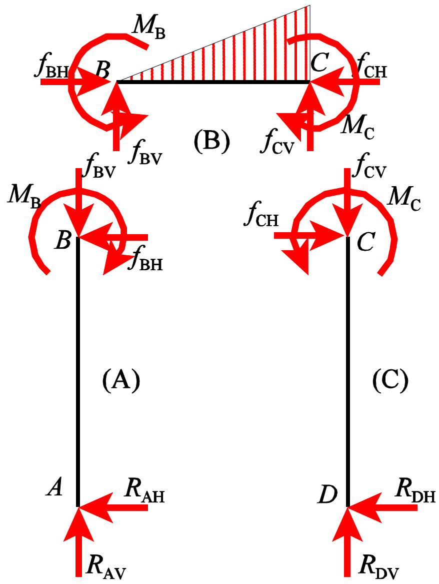


図6.49

系(A)のたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{AB}=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\frac{1}{2}R_{AH}x_A^2,\ v_{AB}=\theta_Ax_A-\frac{1}{EI_z}\frac{1}{6}R_{AH}x_A^3$$

となり，これから

$$\theta_B=\theta_{AB}|_{x_A=a}=\theta_A-\frac{1}{2}\frac{1}{EI_z}R_{AH}a^2\ \rightarrow\ \theta_B-\theta_A=-\frac{1}{2}\frac{1}{EI_z}R_{AH}a^2\qquad (\mathrm{A}).$$

系(C)のたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{DC}=\theta_D-\frac{1}{EI_z}\frac{1}{2}R_{DH}x_A^2,\ v_{DC}=\theta_Dx_A-\frac{1}{EI_z}\frac{1}{6}R_{DH}x_A^3.$$

横部材が伸縮しないことから$v_B=v_C=v_{AB}|_{x_A=a}=v_{DC}|_{x_A=a}$が成立することと$R_{DH}=-R_{AH}$を用いると点DとCのたわみ角は

$$\theta_D=\theta_A-\frac{1}{3}\frac{1}{EI_z}R_{AH}a^2,\ \theta_C=\theta_{DC}|_{x_A=a}=\theta_A+\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}R_{AH}a^2$$

系(B)のたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{BC}=\theta_B-\frac{1}{EI_z}\left(-M_Bx_B+\frac{1}{2}f_{BV}x_B^2-\frac{1}{24}\frac{q_0}{b}x_B^4\right),\ v_{BC}=\theta_Bx_B-\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{2}M_Bx_B^2+\frac{1}{6}f_{BV}x_B^3-\frac{1}{120}\frac{q_0}{b}x_B^5\right)$$

となり，これから点Cのたわみ角は，$f_{BV}=q_0b/6$，$M_B=-R_{AH}a$を用いて

$$\theta_C=\theta_{BC}|_{x_B=b}=\theta_B-\frac{1}{EI_z}\left(R_{AH}ab+\frac{1}{24}q_0b^3\right)$$

これと系(C)のθ_Cが等しい，すなわち，$\theta_{BC}|_{x_B=b}=\theta_{DC}|_{x_A=a}$より，

$$\theta_B-\theta_A=\frac{1}{EI_z}\left(R_{AH}ab+\frac{1}{24}q_0b^3\right)+\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}R_{AH}a^2 \qquad \text{(B)}$$

式(A)と(B)より，R_{AH}は

$$R_{AH}=-\frac{1}{8}\frac{q_0b^3}{(2a+3b)a}$$

となる．

以上から，支点AとDに生ずる反力は

$$R_{AH}=-\frac{1}{8}\frac{q_0b^3}{(2a+3b)a},\ R_{AV}=\frac{1}{6}q_0b,\ R_{DH}=\frac{1}{8}\frac{q_0b^3}{(2a+3b)a},\ R_{VD}=\frac{1}{3}q_0b$$

である．■

発展例題6.40 第4章の問題11の系の点Eのたわみを求めよ．

解答 **発展例題6.23**との違いは点AとCが曲げに対して固定支持になっていることだけであるので，フリーボディダイヤグラムは，③の系が**基本例題6.29**と**6.30**の二つの系を重ね合わせたものになることがわかる．これら二つの系で$b=l-a$とおき，$M_C=-Pc$であることを考慮すると，本例題の点Bのたわみ角θ_Bとたわみv_Bは，**基本例題6.29**と**6.30**の二つの系のθ_Cとv_Cに対応するので，

$$v_B=\frac{P}{3EI_z}\frac{a^3(l-a)^3}{l^3}+\frac{P}{2EI_z}\frac{a^2(l-a)^2(l-2a)}{l^3}c,$$

$$\theta_B=\frac{P}{2EI_z}\frac{a^2(l-a)^2(l-2a)}{l^3}+\frac{P}{EI_z}\frac{a(l-a)(3a^2-3al+l^2)}{l^3}c.$$

となる．その他の量は**発展例題6.23**と同じである．■

はりのたわみと不静定はりに関する補足

最後に少しややこしい問題を考えてみよう．第2章の**発展例題2.22**の横部材が剛体ではなくはりだったら・・・．このほうが現実的である．

まず，力のつりあいとモーメントのつりあいはそのまま成立して，棒＃1と＃2に発生する内力をN_1とN_2で共に正，支点Aの反力を上向きにR_Aとすると，力のつりあいと支点Aまわりのモーメントのつりあいは，**発展例題2.22**と同じように図2.30を参照して

$$N_1-N_2+R_A=0,$$

$$N_1L_1-N_2L_2=0$$

となる．棒＃1と＃2の長さの変化量λ_1とλ_2も**発展例題2.22**と同じで

$$\lambda_1=\frac{N_1l_1}{A_1E_1}+\alpha_1T_1l_1,\ \lambda_2=\frac{N_2l_2}{A_2E_2}+\alpha_2T_2l_2$$

であるが，横部材がはりなのでたわみが生ずるから関係式

$$\tan\theta=\frac{\lambda_1}{L_1}=-\frac{\lambda_2}{L_2}$$

は成立しない．

この式の代わりにはりのたわみの式をたてる．曲げモーメントの式は

$$M_{AB}=R_Ax$$

$$M_{BC}=R_Ax+N_1(x-L_1)$$

となるので，たわみ角の式は，曲げ剛性をEI_zとして

$$\theta_{AB}=\theta_A+\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{2}R_Ax^2\right),$$

$$\theta_{BC}=\theta_A+\frac{1}{EI_z}\left[-\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{2}N_1(x-L_1)^2\right].$$

ここで支点Aのたわみ角θ_Aは未知である．たわみ関数は，支点Aのたわみがゼロであることを考慮すると，

$$v_{AB}=\theta_Ax+\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{6}R_Ax^3\right),$$

$$v_{BC}=\theta_Ax+\frac{1}{EI_z}\left[-\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}N_1(x-L_1)^3\right].$$

たわみ関数から点BとCのたわみv_Bとv_Cを求めると，

$$v_B=\theta_AL_1+\frac{1}{EI_z}\left(-\frac{1}{6}R_AL_1^3\right),$$

$$v_C=\theta_AL_2+\frac{1}{EI_z}\left[-\frac{1}{6}R_AL_2^3-\frac{1}{6}N_1(L_2-L_1)^3\right]$$

となる．

一方，図2.31でδ_1とδ_2を，それぞれ，たわみv_Bとv_Cに置き換えるとはりのたわみの正負の定義から$v_B>0$，$v_C>0$なので，

$$v_B=\lambda_1,\ v_C=-\lambda_2$$

の関係が成立する必要があり，この二つの関係式が変形に関する条件式になる．なお，この二つの式の意味は**発展例題2.22**の解説1に書いたことと似ていて，棒の長さの変化量とはりのたわみとの関係である．

まとめると，未知の量は内力N_1とN_2，支点Aの上向き反力R_A，それに加えて支点Aのたわみ角θ_Aの全部で四つになり，必要な式は

$$N_1-N_2+R_A=0,$$

$$N_1L_1-N_2L_2=0,$$

$$v_B=\lambda_1,$$

$$v_C=-\lambda_2$$

の四つになってめでたく解ける．実際に計算する際は数値を代入して連立方程式を解くことになるだろうが，これらの式から，たとえば，N_1は

$$N_1=-\frac{3EI_zA_1E_1A_2E_2L_2(\alpha_1T_1l_1L_2+\alpha_2T_2l_2L_1)}{A_1E_1A_2E_2L_1^2L_2(L_2-L_1)^2+3EI_z(A_1E_1L_1^2l_2+A_2E_2L_2^2l_1)}$$

となる．N_1の式ではりが剛体とみなせる，つまり，$EI_z=\infty$なら**発展例題2.22**のN_1の式に一致する．

棒＃2が剛体（$E_2=\infty$）とみなすことができて$T_2=0$なら

$$N_1=-\frac{3EI_zA_1E_1\alpha_1T_1l_1L_2}{A_1E_1L_1^2(L_2-L_1)^2+3EI_zL_2l_1}$$

である．この系に対応するフリーボディダイヤグラムは図6.50のようになる．はり部分の点Bのたわみは**基本例題6.01**の結果を使って

$$v_B=\frac{P_B}{3EI_z}\frac{L_1^2(L_2-L_1)^2}{L_2}$$

棒部分について，$N_1=-P_B$なので，点Bの長さの変化量は

$$\lambda_1=-\frac{P_Bl_1}{A_1E_1}+\alpha_1T_1l_1$$

となり，$v_B=\lambda_1$からP_Bを求めることができる．

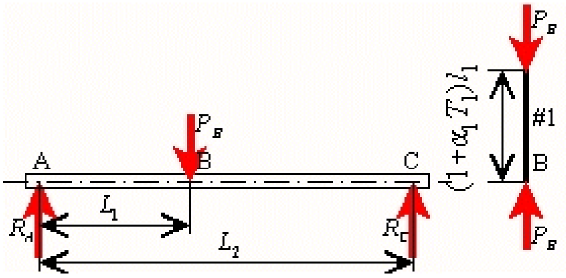


図6.50

不静定はりの問題でややこしいのは「連続はり」である．本書では**発展例題6.30**である．しかし，連続はりは思ったほど難しくない．基本は，

1．曲げモーメントの式を荷重区間ごとに書き下す．
2．曲げモーメントの式を積分してたわみ角の式を作る．
3．たわみ角の式を積分してたわみ関数を求める．
4．拘束条件を入れて連立方程式を作る．
5．作った連立方程式を解く．

だけである．このプロセスは普通の不静定はりと同じで，支点が増えても各支点に生ずる反力をはりにはたらく外力として考えればよい．支点が増えることで荷重区間が増えて未知の外力が増えるだけである．その分連立方程式の元数が多くなるが，連立方程式だけきちんと書ければその答えは計算機の力を借りれば難なく得られるはずである．

続・左端を固定支持にすることの便利な点

第4章の終わりに「左端を固定支持にすることの便利な点」ということについてさらりと述べたが，ここまできたらもうわかったでしょう．たわみの微分方程式を積分する際に積分定数がなくなってしまうのだ．

では，引き続き考えてみよう．図4.72の1)の系で，点Bを基準に左に向かってx軸を取ると，曲げモーメントは2)の系と同じく，$M=-\dfrac{1}{2}qx^2$で表現される．この式から得られるBMDは図4.73のBMDと同じである．曲げモーメントをxで微分するとせん断力は$F=-qx$となるが，図4.73のせん断力と正負が逆転しているので正しくない．この理由は，せん断力と曲げモーメントの関係式$F=\dfrac{dM}{dx}$は左から右に向かってx軸を取るという約束事から導かれている関係式なので，いま考えているような左に向かってx軸を取る場合は$-x$で微分する必要がある．つまり，$M=-\dfrac{1}{2}(-x)^2$と書いて，

$F=\dfrac{dM}{d(-x)}=-q(-x)=qx$となる．

このような問題ははりのたわみ角とたわみの場合にも現れる．たわみの微分方程式の導出課程においても左から右に向かってx軸を取るという約束事があるので，今のように左から右にx軸を取る場合には，たわみの微分方程式は

$$\frac{d^2v}{d(-x)^2}=-\frac{M}{EI_z}$$

に書き換えなければならない．書き換えずに，そのまま使うと，

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{q}{2EI_z}x^2$$

からたわみ角の式は

$$\theta=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{6}\frac{q}{EI_z}x^3+C$$

となり，$x=L$で$\theta(L)=0$から$C=-\dfrac{1}{6}\dfrac{qL^3}{EI_z}$となり，点Bでのたわみ角は$\theta_B=\theta(0)=-\dfrac{1}{6}\dfrac{qL^3}{EI_z}$となる．この値は負の値なので，はりは自由端に向かってたわみ角が増加するという事実からみると，あれ？という感覚になる．ところが，

$$\frac{d^2v}{d(-x)^2}=-\frac{M}{EI_z}$$

を使うと，

$$\frac{d^2v}{d(-x)^2}=\frac{q}{2EI_z}(-x)^2$$

と書いて，

$$\theta=\frac{dv}{d(-x)}=\frac{1}{6}\frac{q}{EI_z}(-x)^3+C$$

となり，$x=L$で$\theta(L)=0$から$C=\dfrac{1}{6}\dfrac{qL^3}{EI_z}$が得られ点Bでのたわみ角は$\theta_B=\theta(0)=\dfrac{1}{6}\dfrac{qL^3}{EI_z}$となる．この値は正しいことになる．

さて，図4.72の1)の系で，点Bを基準に左に向かってx軸を取っても，曲げモーメントの式の形は変わるが，正負は逆転しないことがわかるが，実は，この点は後の章で述べるひずみエネルギを用いた解法で重要な役割を果たす．さて，とっとと後の章へ行きましょう．

基本事項3（はりの熱応力）

第2章であつかった熱応力の問題は，棒全体に温度変化が生じた場合であったが，ここでは，はりの厚さ方向に温度が変化する場合の考え方を理解する．公式といえるものはなく，熱ひずみが存在する場合の全ひずみと内力，それに伴って発生する曲げモーメントやはりの変形を考えることになる．ここで述べる熱応力の問題は，弾性力学や熱応力の専門書ほど厳密ではないので，考え方のみざっと理解していただけるとありがたい．

発展例題6.41　図6.51のように，異なる材料でできた二本の棒が接着されていて，接着面が断熱されているものとする．二本の棒にそれぞれΔT_1，ΔT_2の温度変化が生じたとすると，それぞれの棒に生ずる熱応力を求めよ．ただし，二本の棒は曲がらないものとする．

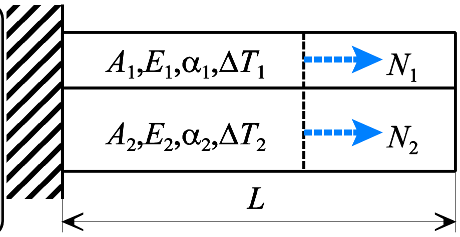


図6.51

解答　それぞれの棒に発生している内力をN_1，N_2とすると，力のつりあいから

$$N_1+N_2=0$$

全ひずみは

$$\varepsilon_{t1}=\frac{N_1}{A_1E_1}+\alpha_1\Delta T_1,\quad \varepsilon_{t2}=\frac{N_2}{A_2E_2}+\alpha_2\Delta T_2$$

である．長さの変化量が等しい条件$\varepsilon_{t1}L=\varepsilon_{t2}L$から

$$\frac{N_1L}{A_1E_1}-\frac{N_2L}{A_2E_2}=-\alpha_1\Delta T_1L+\alpha_2\Delta T_2L$$

である．以上から，それぞれの棒に生ずる内力は次式のように得られる．

$$N_1=-\frac{\alpha_1\Delta T_1-\alpha_2\Delta T_2}{\dfrac{1}{A_1E_1}-\dfrac{1}{A_2E_2}},\qquad N_2=\frac{\alpha_1\Delta T_1-\alpha_2\Delta T_2}{\dfrac{1}{A_1E_1}-\dfrac{1}{A_2E_2}}$$

発生する熱応力は内力を断面積で割ればよいので

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=-\frac{\alpha_1\Delta T_1-\alpha_2\Delta T_2}{\left(\dfrac{1}{A_1E_1}-\dfrac{1}{A_2E_2}\right)A_1},\qquad \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{\alpha_1\Delta T_1-\alpha_2\Delta T_2}{\left(\dfrac{1}{A_1E_1}-\dfrac{1}{A_2E_2}\right)A_2}$$

である．■

解説1：この問題では棒は曲がらないものとしているので本来ならば第2章の例題にいれるのが適切であるが，そこに入れなかったのは実際には考え難い系であるためである．ここでは，全ひずみの考え方の復習としてみてほしい．

解説2：ここでは，二本の棒は同じ長さとしているが，もし長さが異なっている場合は長さの変化量が等しい条件は

$$\frac{N_1L_1}{A_1E_1}-\frac{N_2L_2}{A_2E_2}=-\alpha_1\Delta T_1L_1+\alpha_2\Delta T_2L_2$$

になることは明らかである．

解説3：さて，内力N_1，N_2は大きさが等しく向きが逆であるから偶力の関係にあり，偶力のモーメントを生ずる．これらの力の作用点間の距離をcとすると，偶力のモーメントの大きさは$|N_1c|$である．このモーメントが棒の曲げに関係するが，この例題のように棒が曲がらない場合はこのモーメントを打ち消すための外力のモーメントがはたらいていなければならない．

発展例題6.42　**発展例題6.41**で二本の棒が曲がると考えて，自由端のたわみを求めよ．二本の棒の厚さと幅は等しく，$\Delta T_1=\Delta T_2=\Delta T$とする．

解答　図6.52のように，それぞれの横断面には軸方向内力N_1とN_2が生じ，曲げモーメントM_1とM_2が生ずる．これらによって，それぞれの棒は曲率半径をR_1とR_2の円弧状に曲がるとする．軸方向全ひずみは

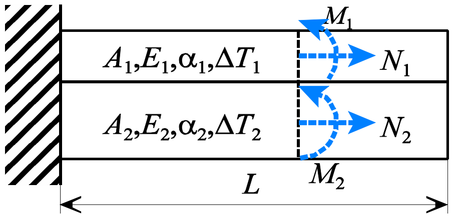


図6.52

$$\varepsilon_{t1}=\frac{N_1}{AE_1}+\frac{y_1}{R_1}+\alpha_1\Delta T,\quad \varepsilon_{t2}=\frac{N_2}{AE_2}+\frac{y_2}{R_2}+\alpha_2\Delta T$$

である．ここでy_1とy_2はそれぞれの棒の中立面から下向きにとった座標である．板の厚さをcとすると接着面は$y_1=\frac{c}{2}$，$y_2=-\frac{c}{2}$であるから，これらを代入すると接着面のひずみが得られ，これを等しいとおくと

$$\frac{N_1}{AE_1}+\frac{c}{2R_1}+\alpha_1\Delta T=\frac{N_2}{AE_2}-\frac{c}{2R_2}+\alpha_2\Delta T$$

となる．軸方向の力のつりあい$N_1+N_2=0$から$N_1=-N_2$であり，$N=N_2(>0)$とおきなおすと，接着面においてひずみが等しい条件は

$$-\frac{N}{AE_1}+\frac{c}{2R_1}+\alpha_1\Delta T=\frac{N}{AE_2}-\frac{c}{2R_2}+\alpha_2\Delta T$$

である．曲率半径が大きいと仮定すると，$R_1=R_2=R$とおいてもよいから，

$$-\frac{c}{R}+\frac{N}{A}\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)=(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T \qquad (*)$$

曲率半径Rの円弧状に曲がるとき，生じている曲げモーメントは教科書の式(4.6)から反時計まわりに

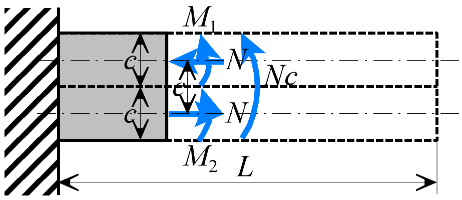


図6.53

$$M_1=\frac{E_1I_z}{R},\qquad M_2=\frac{E_2I_z}{R}$$

であり，内力Nのつくる偶力のモーメントも反時計まわりにNcである(図6.53)．これらのモーメントの和がゼロでなければならない(外力のモーメントがない)から

$$M_1+M_2+Nc=0$$

が成立しなければならないから

$$(E_1+E_2)\frac{I_z}{R}=-Nc \qquad (**)$$

式(*)と(**)から，

$$\frac{1}{R}=-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}{c}\frac{12E_1E_2}{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}$$

が得られる．ただし，この式の誘導には棒の幅をbとして$A=bc$，$I_z=bc^3/12$を用いてある．一方，曲率$\frac{1}{R}$とたわみvとの関係は$\frac{1}{R}=-\frac{d^2v}{dx^2}$であるから，たわみの微分方程式は

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}{c}\frac{12E_1E_2}{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}.$$

$x=0$でたわみとたわみ角がゼロである条件からたわみ関数は

$$v=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}{c}\frac{12E_1E_2}{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}\frac{1}{2}x^2$$

となる．自由端でのたわみは$x=L$を代入すると

$$v|_{x=L}=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}{c}\frac{6E_1E_2L^2}{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}$$

である．■

解説1：$\alpha_1>\alpha_2$なら$v|_{x=L}>0$なので自由端は下方に移動し，逆なら上方に移動する．

解説2：この例題でははり全体の温度変化量が等しいとおいたが，上下で温度変化量が異なる場合は最初の全ひずみの式を

$$\varepsilon_{t1}=\frac{N_1}{AE_1}+\frac{y_1}{R_1}+\alpha_1\Delta T_1,\quad \varepsilon_{t2}=\frac{N_2}{AE_2}+\frac{y_2}{R_2}+\alpha_2\Delta T_2$$

に変更すればよい．ただし，接着層が断熱されているものとする．この場合の自由端のたわみは

$$v|_{x=L}=\frac{\alpha_1\Delta T_1-\alpha_2\Delta T_2}{c}\frac{6E_1E_2L^2}{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}$$

となる．

解説3：はり全体が同じ材料でできていて，上下の温度変化量のみ異なる場合は

$$v|_{x=L}=\frac{\alpha(\Delta T_1-\Delta T_2)}{c}\frac{3}{8}L^2$$

となる．

解説4：さて，気付いた人もいると思うが，曲率$\frac{1}{R}$が一定である場合は変形後のはりは半径Rの円弧の一部であるから，**解答**のような二次関数での表現はおかしいが，変形が小さい場合は正しい．これを確認してみよう．

いま，変形後のはりが半径Rで中心角φ radの扇型の一部であるとすると，$L=R\varphi$が成り立ち，自由端のたわみは$v|_{x=L}=(1-\cos\varphi)R$で表される．変形が小さければ$\varphi$も小さいので$1-\cos\varphi\approx 1-\left(1-\frac{1}{2}\varphi^2\right)=\frac{1}{2}\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{L^2}{R^2}$と近似できるから，$v|_{x=L}=\frac{1}{2}\frac{L^2}{R}$となり，この式に曲率$\frac{1}{R}$の値を代入すると**解答**と同じ式が得られる．

解説5：**発展例題6.41**のような変形状態になるためには，外力のモーメントがはたらいていなければならない．このモーメントをM_0とおくと，$M_1+M_2+Nc-M_0=0$を満たすとき曲率$\frac{1}{R}=0$になる．

発展例題6.43　両端を固定支持した長さLのはりの上面にΔT，下面に$-\Delta T$の温度変化が生じ，厚さ方向に一次関数で表現される温度分布が生じている．このはりに発生する曲げ応力を求めよ．はりの厚さをhとする．

解答　はりに生じている温度分布は，中立面から下向きにy座標をとると，

$$T=-\frac{\Delta T}{h/2}y$$

と表されるから，自由熱膨張ひずみは

$$\alpha T=-\frac{\alpha\Delta T}{h/2}y$$

である. はりに生じている曲げモーメントをMとすると, 弾性ひずみは$\dfrac{M}{EI_z}y$であるから, 全ひずみε_tは

$$\varepsilon_t=\frac{M}{EI_z}y-\frac{\alpha\Delta T}{h/2}y$$

であり, このひずみが拘束されるので

$$M=EI_z\frac{\alpha\Delta T}{h/2}$$

である. このとき, はりに発生する曲げ応力は

$$\sigma_x=\frac{M}{I_z}y=\alpha E\Delta T\frac{y}{h/2}$$

である. ■

解説:この場合, 一様な軸方向応力は発生しないことを確認する. 発生すると仮定すると全ひずみは, 一様軸方向応力をσ_{x0}として,

$$\varepsilon_t=\frac{\sigma_{x0}}{E}+\frac{M}{EI_z}y-\frac{\alpha\Delta T}{h/2}y$$

このひずみが拘束されるから, yの0次の項と1次の項は, それぞれ,

$$\frac{\sigma_{x0}}{E}=0,\quad \frac{M}{EI_z}y-\frac{\alpha\Delta T}{h/2}y=0$$

を満たさなければならない. 前者から$\sigma_{x0}=0$, すなわち, 一様軸方向応力は発生しない.

発展例題6.44 厚さ方向に任意の温度分布$T(y)$を持つはりに発生する熱応力を次の三つの場合について求めよ.

1) 伸縮が拘束される場合
2) 曲げが拘束される場合
3) 完全に拘束される場合

解答 1) 伸縮が拘束される場合:発生する軸力をNとすると, 全ひずみは次の関係を満たさなければならない.

$$\varepsilon_t=\frac{N}{AE}+\alpha T(y)=0$$

この式は, 任意のyについて成り立つ必要がある. これから,

$$\frac{N}{AE}=-\alpha T(y)$$

である. この式をはりの横断面にわたって積分すると,

$$N=-\alpha E\int_A T(y)dA$$

となるから, 発生する熱応力は

$$\boxed{\sigma_x=-\frac{\alpha E}{A}\int_A T(y)dA}$$

2) 曲げが拘束される場合:発生する曲げモーメントをMとすると, 全ひずみは次の関係を満たさなければならない.

$$\varepsilon_t = \frac{M}{EI_z} y + \alpha T(y) = 0$$

これから，

$$\frac{M}{EI_z} y = -\alpha T(y)$$

yを乗じて横断面にわたって積分すると，

$$M = -\alpha E \int_A T(y) y dA$$

ゆえに，発生する熱応力は

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{\alpha E y}{I_z} \int_A T(y) y dA}$$

3)　完全に拘束される場合：弾性ひずみをε_xとおくと，全ひずみは次の関係を満たさなければならない．

$$\varepsilon_t = \varepsilon_x + \alpha T(y) = 0$$

これから，

$$\varepsilon_x = -\alpha T(y)$$

であるから，発生する熱応力は

$$\boxed{\sigma_x = -\alpha E T(y)}$$

である．■

解説：完全に拘束されたはりの場合，はりが一様な温度変化ΔTを受けるなら発生する熱応力は$\sigma_x = -\alpha E \Delta T$であり，**発展例題6.43**のように一次関数であれば$\sigma_x = \alpha E \Delta T \dfrac{y}{h/2}$である．前者は自由熱膨張が完全に拘束された棒に発生する熱応力の答え(本演習の第2章参照)と一致し，後者は**発展例題6.43**の答えと一致する．

発展例題6.45　厚さ方向に任意の温度分布$T(y)$を持つはりの両端が伸縮ならびに曲げについて自由であるとき，はりに発生する熱応力を求めよ．

解答　伸縮にかかわる全ひずみをε_{t1}，曲げにかかわる全ひずみを$\varepsilon_{t2} = \dfrac{y}{R_1}$とおく．ここで$\varepsilon_{t1}$，$R_1$は，いずれも，ある一定値である．伸縮にかかわる弾性ひずみをε_x，曲げひずみを$\dfrac{y}{R}$とおくと，全ひずみは

$$\varepsilon_{t1} + \frac{y}{R_1} = \varepsilon_x + \frac{y}{R} + \alpha T(y)$$

で表されるから，弾性ひずみ(伸縮＋曲げ)は

$$\varepsilon_x + \frac{y}{R} = \varepsilon_{t1} + \frac{y}{R_1} - \alpha T(y)$$

と表され，発生する応力は

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + E\frac{y}{R} = E\varepsilon_{t1} + E\frac{y}{R_1} - \alpha E T(y)$$

となる．いま，伸縮と曲げについて自由であれば，この応力の合力と曲げについての合モーメントがゼロでなければならないから，$\int_A y dA = 0$ であることを念頭に置くと

$$E\int_A \varepsilon_{t1} dA - \alpha E\int_A T(y) dA = 0, \qquad \frac{E}{R_1}\int_A y^2 dA - \alpha E\int_A T(y) y dA = 0.$$

この二つの式から

$$\varepsilon_{t1} = \frac{\alpha}{A}\int_A T(y) dA$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\alpha}{I_z}\int_A T(y) y dA$$

が得られる．以上から，弾性ひずみは

$$\varepsilon_x + \frac{y}{R} = \frac{\alpha}{A}\int_A T(y) dA + \frac{\alpha y}{I_z}\int_A T(y) y dA - \alpha T(y)$$

となるから，伸縮ならびに曲げについて自由なら，熱応力は

$$\boxed{\sigma_x = \frac{\alpha E}{A}\int_A T(y) dA + \frac{\alpha E y}{I_z}\int_A T(y) y dA - \alpha E T(y)}$$

から計算できる．■

解説1：もし，伸縮も曲げも拘束されていないはりが一様な温度変化 ΔT を受けるなら発生する熱応力はゼロであり，**発展例題6.43**のように一次関数の場合もゼロである．ゆえに，伸縮も曲げも拘束されていないはりの温度分布が $T(y) = T_0 - \dfrac{\Delta T}{h/2} y$ である場合も熱応力は発生しないことがわかる．

解説2：温度分布が $T(y) = T_0\left(1 - 4\dfrac{y^2}{h^2}\right)$ の場合がある本の例題に挙がっている．T_0 が一定値の場合このような温度分布はありえないことに注意しておこう．温度分布は熱伝導方程式に従い，温度分布が時間的に変化しないなら，一次元の場合の熱伝導方程式は $\dfrac{d^2T}{dy^2} = 0$ である．この方程式の解は $T = ay + b$ の形を持ち放物線状にはならないからである．温度分布が時間的に変化する場合熱伝導方程式は $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \kappa^{-1}\dfrac{\partial T}{\partial t}$ であるから，この式に $T(y) = T_0\left(1 - 4\dfrac{y^2}{h^2}\right)$ を代入すると T_0 は $-\dfrac{8}{h^2}T_0 = \kappa^{-1}\left(1 - 4\dfrac{y^2}{h^2}\right)\dfrac{dT_0}{dt}$ を満たすように決まることになる．

解説3：ついでのことに，温度分布が $\dfrac{d^2T}{dy^2} = 0$ を満たすとき，両端が伸縮ならびに曲げについて自由なはりには熱応力は発生しない．つまり，解説1で熱応力が発生しない場合として挙げた温度分布 $T = T_0 - \dfrac{\Delta T}{h/2} y$ は $T = ay + b$ の形をしていて，この形を持つ温度分布は $\dfrac{d^2T}{dy^2} = 0$ を満たす．この例題の場合に熱応力が生ずるのは温度分布が時間的に変化する場合であることは明らかである．

発展例題6.46 厚さh，幅b，長さLの長方形断面をもつ片もちはりの温度分布が$T(y)=T_0-\dfrac{\Delta T}{h/2}y$である．自由端の軸方向伸縮量とたわみ量を求めよ．

指針 この系は熱応力を生じないので熱変形にのみ着目する．

解答 この場合曲げ応力は発生しないので，全ひずみの伸縮にかかわる成分と曲げにかかわる成分は

$$\varepsilon_{t1}=\frac{\alpha}{A}\int_A T(y)dA,\qquad \frac{y}{R_1}=\frac{\alpha y}{I_z}\int_A T(y)ydA$$

であり，温度分布の式を代入すると

$$\varepsilon_{t1}=\alpha T_0,\qquad \frac{1}{R_1}=-\frac{\alpha}{h/2}\Delta T$$

ここで$A=bh$，$I_z=\dfrac{1}{12}bh^3$を用いた．

伸縮量は

$$\delta=\varepsilon_{t1}L=\alpha T_0 L$$

たわみ量は，たわみの基礎方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{1}{R_1}=\frac{\alpha}{h/2}\Delta T$$

からたわみ関数は

$$v=\frac{\alpha}{h/2}\Delta T\frac{x^2}{2}$$

となり，自由端のたわみは$x=L$として

$$v|_{x=L}=\frac{\alpha}{h}\Delta T L^2$$

である．■

解説：ここではあえて前の例題を受けて計算したが，より単純に考えれば伸縮量ははりの一様温度変化量T_0に線膨張係数と長さをかければ$\alpha T_0 L$が出てくる．はりのたわみ量は次のように考える．

上面$(y=-h/2)$と下面$(y=h/2)$の自由熱膨張量は$\alpha(T_0+\Delta T)L$と$\alpha(T_0-\Delta T)L$である．中立面の曲率半径をR_1とおくと上下面の曲率半径は$R_1+h/2$，$R_1-h/2$と書ける．中心角が等しいから，

$$\frac{[1+\alpha(T_0+\Delta T)]L}{R_1+h/2}=\frac{[1+\alpha(T_0-\Delta T)]L}{R_1-h/2}$$

この式から，

$$\frac{1}{R_1}=\frac{\alpha\Delta T}{1+\alpha T_0}\frac{1}{h/2}$$

中心角をφとすると，$(1+\alpha T_0)L=R_1\varphi$であり，自由端のたわみは，発展例題6.42の解説4のように考えると

$$v|_{x=L}=(1-\cos\varphi)R_1\approx\frac{1}{2}\varphi^2R_1=\frac{1}{2}\frac{[(1+\alpha T_0)L]^2}{R_1}=\frac{\alpha}{h}\Delta T(1+\alpha T_0)L^2$$

である．ここで$\alpha T_0 \ll 1$であるから$v|_{x=L}=\dfrac{\alpha}{h}\Delta T L^2$である．

発展例題6.47　発展例題6.42で自由端に回転支点をおいてたわみをゼロにした. 回転支点に生ずる力を求めよ. ただし, このはり全体の曲げ剛性をEI_zとする.

解答　回転支点に生ずる力を上向きにR_0とおくと, 固定支点の固定モーメントは時計まわりにR_0L, 反力は下向きにR_0であるから, 新たに生ずる曲げモーメントは$M=R_0L-R_0x$であるから, たわみの微分方程式は**発展例題6.42**の式に曲げモーメントの項を加えると

$$\frac{d^2v}{dx^2}=M_T-\frac{R_0}{EI_z}(L-x)$$

となる. ここで, $M_T=\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}{c}\dfrac{12E_1E_2}{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}$である.

$x=0$でたわみとたわみ角がゼロである条件からたわみ関数は

$$v=\frac{1}{2}M_Tx^2-\frac{R_0}{EI_z}\left(\frac{1}{2}Lx^2-\frac{1}{6}x^3\right)$$

となる.

$x=L$でたわみがゼロであることから,

$$\frac{1}{2}M_TL^2-\frac{1}{3}\frac{R_0}{EI_z}L^3=0$$

が得られ, この式から

$$\frac{R_0}{EI_z}=\frac{3}{2}\frac{M_T}{L}=\frac{3}{2}\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T}{cL}\frac{12E_1E_2}{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}$$

である. ■

解説:この例題ではり全体の曲げ剛性をEI_zとおいたが, これは組合せはりの等価曲げ剛性である. 等価曲げ剛性については以下を参照のこと.

等価曲げ剛性について

等価曲げ剛性は, 図6.54左のように, 何種類かの材料をその接合面ですべりが生じないように積層して作った組合せはり(composite beam)を, それと等価な単一材料からなるはりのように扱うためのものである. そのため, 組合せはりについて述べなければならない. ここでは横断面が対称軸をもち, 横荷重が軸線と対称軸を含む面内に作用する対称曲げを考える.

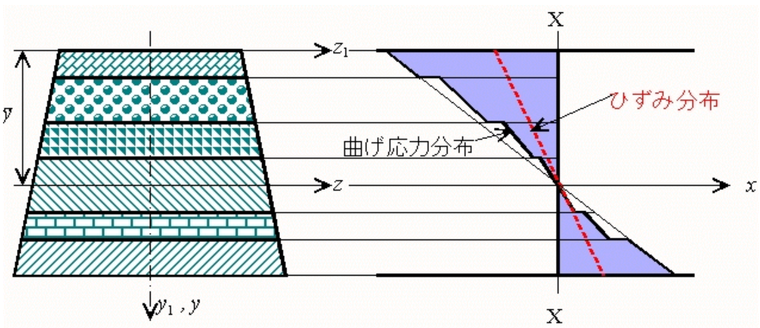


図6.54

組合せはりの場合も曲げ応力がゼロの面, すなわち, 中立面が存在し, 中立(中立面と横断面との交線)が存在する. 中立面をxz面, 中立軸をz軸とする.

いまn層からなるはりについて図6.54左のようにy_1軸をはりの上面のz_1軸を基準に, y軸をはりの中立面のz軸(中立軸)を基準に, 変形後のx軸線の曲率半径をRとする. 接合面ですべりが生じないので, ひずみは横断面内で連続で

あるから，教科書の式(4.1)が成り立つ．i 番目の層について，中立軸からy_iの距離にある材料のヤング率をE_iとすると曲げ応力は

$$\sigma_{xi}=E_i\varepsilon_{xi}=E_i\frac{y_i}{R}$$

で表される．

軸荷重が作用していなければ横断面の垂直な方向の合力がゼロ，すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}\sigma_{xi}dA_i=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}y_i dA_i=0$$

z_1 軸からz 軸までの距離を$\bar{y}$とすると，$y_i=y_{1i}-\bar{y}$であるからこれを上式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}y_i dA_i=\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}y_{1i}dA_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}dA_i=0$$

これから，$A_i=\int_{A_i}dA_i$であるから中立軸の位置は

$$\boxed{\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}y_{1i}dA_i}{\sum_{i=1}^{n}E_iA_i}}$$

曲げモーメントと曲げ応力の関係は曲げ応力のつくるモーメントを横断面にわたって積分することによって得られる．中立軸を基準にした各層内の曲げ応力のつくるモーメントの総和をとると

$$M=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_1}\sigma_{xi}y_i dA_i$$

となり，これに応力の式を代入すると，曲げモーメントは

$$\boxed{M=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_1}y_i^2 dA_i=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_iI_{zi}}$$

となる．ここで$I_{zi}=\int_{A_i}y_i^2 dA_i$は第$i$ 層の中立軸に関する断面二次モーメントであり，$\boxed{\sum_{i=1}^{n}E_iI_{zi}}$は等価曲げ剛性(equivalent flexural rigidity)と呼ばれる．また，$\dfrac{1}{R}$は

$$\boxed{\frac{1}{R}=\frac{M}{\sum_{i=1}^{n}E_iI_{zi}}}$$

である．

発展例題6.48　発展例題6.47のはりの中立軸の位置ならびに等価曲げ剛性を求めよ．

解答　中立軸の位置$\bar{y}$を求める．$dA_1=bdy_{11}$，$dA_2=bdy_{12}$であり，$0\leq y_{11}\leq c$，$c\leq y_{12}\leq 2c$であるから，

$$\int_{A_1}y_{11}dA_1=b\int_0^c y_{11}dy_{11}=\frac{1}{2}bc^2,\qquad \int_{A_2}y_{12}dA_2=b\int_c^{2c}y_{12}dy_{12}=\frac{3}{2}bc^2$$

ゆえに，

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{2}E_i\int_{A_i}y_{1i}dA_i}{\sum_{i=1}^{2}E_iA_i}=\frac{1}{2}\frac{(E_1+3E_2)bc^2}{(E_1+E_2)bc}=\frac{1}{2}\frac{E_1+3E_2}{E_1+E_2}c$$

である.

次に等価曲げ剛性を求める. 等価曲げ剛性の式における断面二次モーメントは中立軸を基準にしているので, 平行軸の定理を用いて

$$I_{z1}=\frac{1}{12}bc^3+\left(\bar{y}-\frac{c}{2}\right)^2bc,\quad I_{z2}=\frac{1}{12}bc^3+\left(\frac{3}{2}c-\bar{y}\right)^2bc$$

であるから, 等価曲げ剛性は

$$\sum_{i=1}^{n}E_iI_{zi}=E_1I_{z1}+E_2I_{z2}=(E_1+E_2)\frac{1}{12}bc^3+\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}bc^3=\frac{(E_1+E_2)^2+12E_1E_2}{E_1+E_2}\frac{1}{12}bc^3$$

である. ■

解説: **発展例題6.47**のR_0の値のEI_zにこの例題で求めた等価曲げ剛性の値を用いると

$$R_0=\frac{3}{2}(\alpha_1-\alpha_2)\Delta T\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\frac{bc^2}{L}$$

となる.

もう一度組合せはりについて考えてみよう. 図6.54右のような応力分布にあると仮定すると, 第i番目の層に発生する応力は

$$\sigma_{xi}=\bar{\sigma}_{xi}+E_i\frac{\eta_i}{R}$$

で表される. ここで, $\bar{\sigma}_{xi}$はこの層の平均応力で, 一般にはゼロではない. また, η_iはこの層の中立軸を基準に取った座標である.

各層の平均応力にそれぞれの断面積を乗じて和を取ると, 軸方向の内力の総和になる. これをゼロにおくと,

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\sigma}_{xi}A_i=0$$

である. また, 各層の応力にその層のy座標成分y_{li}を乗じて断面にわたって積分すると各層の曲げモーメントが得られるから, これの総和をとり, これをM_1とすると

$$M_1=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}\eta_i^2dA_i$$

である. モーメントはこれだけではない. 平均応力もモーメントをつくり, これをM_2とすると

$$M_2=\sum_{i=1}^{n}\bar{\sigma}_{xi}A_iy_{ci}$$

ここでy_{ci}は全体の中立軸を基準とした$\bar{\sigma}_{xi}A_i$の作用点までの距離である.

全体の曲げモーメントはM_1とM_2の和であるから,

$$M=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}\eta_i^2dA_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{\sigma}_{xi}A_iy_{ci}$$

ここで平均応力 $\bar{\sigma}_{xi}$ は各層の平均ひずみ $\dfrac{y_{ci}}{R}$ にヤング率 E_i を乗じたものに等しいから，教科書の式(4.2)を使うと

$$M=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_i}\eta_i^2dA_i+\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_iA_iy_{ci}^2=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_i\left(\int_{A_i}\eta_i^2dA_i+A_iy_{ci}^2\right)$$

と書ける．さらに，()内は平行軸の定理から全体の中立軸を基準とした i 番目の層の断面二次モーメントを表すから，

$I_{zi}=\int_{A_i}\eta_i^2dA_i+A_iy_{ci}^2$ とおくと上式は

$$\boxed{M=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_i\int_{A_1}y_i^2dA_i=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n}E_iI_{zi}}$$

となる．

ここで述べたプロセスは，**発展例題6.42**の解答のプロセスとまったく同じことを言っていることに気が付くだろうか．わかってくれるとありがたいなぁ．

第6章　演習問題

問題1．図1A)とB)のはりのたわみ角の式とたわみ関数を求めよ．

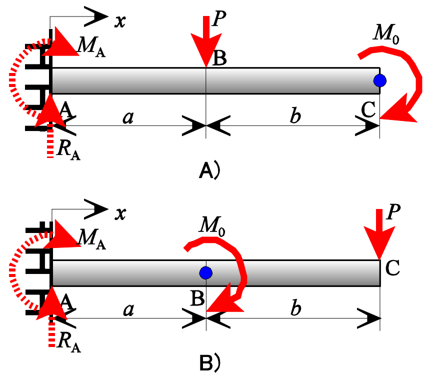


図1

ヒント：固定支持端での固定モーメントを時計回り，反力を上向きとすると，

A)の曲げモーメントの式は，$M_A=-(Pa+M_0)$，$R_A=P$として

AB間 $(0<x<a)$: $M_{AB}=M_A+R_Ax$

BC間 $(a<x<a+b)$: $M_{AB}=M_A+R_Ax-P(x-a)=-M_0$

B)の曲げモーメントの式は，$M_A=-P(a+b)-M_0$，$R_A=P$として

AB間 $(0<x<a)$: $M_{AB}=M_A+R_Ax$

BC間 $(a<x<a+b)$: $M_{AB}=M_A+R_Ax+M_0$

である．

Ans. A)たわみ角の式は

AB間 $(0<x<a)$: $\theta_{AB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2\right]$

BC間 $(a<x<a+b)$: $\theta_{BC}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2-\dfrac{1}{2}P(x-a)^2\right]=\theta_B+\dfrac{1}{EI_z}M_0(x-a)$，ただし，$\theta_B=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Aa+\dfrac{1}{2}R_Aa^2\right]$

たわみ関数は

AB間 $(0<x<a)$: $v_{AB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Ax^2+\dfrac{1}{6}R_Ax^3\right]$

BC間 $(a<x<a+b)$: $v_{BC}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Ax^2+\dfrac{1}{6}R_Ax^3-\dfrac{1}{6}P(x-a)^3\right]=v_B+\theta_B(x-a)+\dfrac{1}{EI_z}\dfrac{1}{2}M_0(x-a)^2$

ただし，$v_B=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Aa^2+\dfrac{1}{6}R_Aa^3\right]$

B)たわみ角の式は

AB間 $(0<x<a)$: $\theta_{AB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2\right]$

BC間 $(a<x<a+b)$: $\theta_{BC}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\dfrac{1}{2}R_Ax^2+M_0(x-a)\right]$

たわみ関数は

AB間 $(0<x<a)$: $v_{AB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Ax^2+\dfrac{1}{6}R_Ax^3\right]$

BC間 $(a<x<a+b)$: $v_{BC}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}M_Ax^2+\dfrac{1}{6}R_Ax^3+\dfrac{1}{2}M_0(x-a)^2\right]$

問題2．問題1のA)のはりについて，

$$\frac{1}{M_0}v_B\Big|_{P=0}=\frac{1}{P}\theta_C\Big|_{M_0=0}=\frac{1}{EI_z}\frac{1}{2}a^2$$

を確かめよ．また，B)のはりについて

$$\frac{1}{M_0}v_C\Big|_{P=0}=\frac{1}{P}\theta_B\Big|_{M_0=0}=\frac{1}{EI_z}\left[(a+b)a-\frac{1}{2}a^2\right]$$

を確かめよ．（関連例題：**発展例題7.12**）

補足：A)について，「M_0がv_Bにおよぼす効果とPがθ_Cにおよぼす効果は同じである」と言っている．また，B)について，「M_0がv_Cにおよぼす効果とPがθ_Bにおよぼす効果は同じである」と言っている．

問題3．図2のはりのたわみ角の式とたわみ関数を求めよ．なお，このはりの曲げモーメントの式は第五章の問題8のB)のAnsを参照のこと．

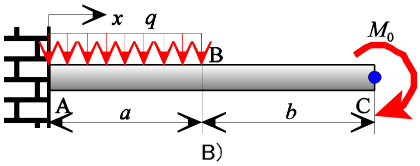


図2

Ans. たわみ角の式は

$$\text{AB間}\ (0<x<a):\ \theta_{AB}=\frac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{6}qx^3\right]$$

$$\text{BC間}\ (a<x<a+b):\ \theta_{BC}=\frac{-1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{6}qx^3+\frac{1}{6}q(x-a)^3\right]$$

たわみ関数は

$$\text{AB間}\ (0<x<a):\ v_{AB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{24}qx^4\right]$$

$$\text{BC間}\ (a<x<a+b):\ v_{BC}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{24}q(x-a)^4\right]$$

参考：曲げモーメントの別表現を使った場合のBC間のたわみ角の式は

$$\text{BC間}\ (a<x<a+b):\ \theta_{BC}=\theta_B+\frac{1}{EI_z}M_0(x-a),\ \text{ただし}\quad \theta_B=\frac{-1}{EI_z}\left[M_Aa+\frac{1}{2}R_Aa^2-\frac{1}{6}qa^3\right]$$

たわみ関数は

$$\text{BC間}\ (a<x<a+b):\ v_{BC}=v_B+\theta_B(x-a)+\frac{1}{EI_z}\frac{1}{2}M_0(x-a)^2,\ \text{ただし}\quad v_B=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Aa^2+\frac{1}{6}R_Aa^3-\frac{1}{24}qa^4\right]$$

問題4. 図3のA)からD)のはりのたわみ角の式とたわみ関数を求めよ. 分布荷重q, $q(x)$はすべて下向きである. なお, これらのはりの曲げモーメントの式は第五章の問題9のAnsを参照のこと.

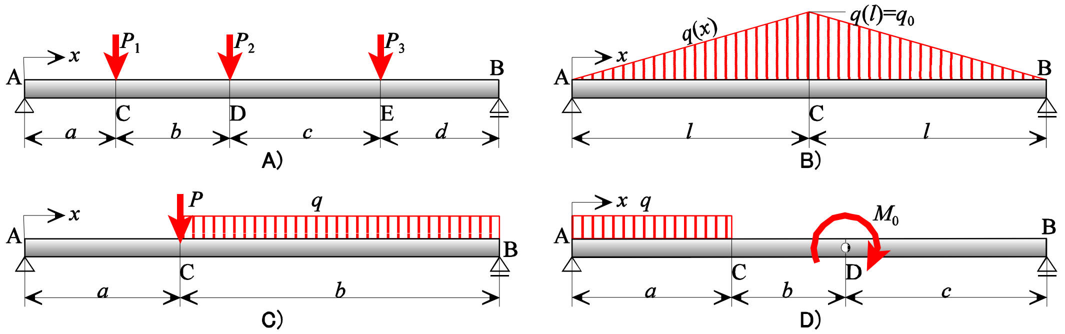


図3

Ans. A)たわみ角の式は, θ_AをAのたわみ角として

$$\text{AC間}\,(0<x<a):\ \theta_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\frac{1}{2}R_Ax^2+\theta_A$$

$$\text{CD間}\,(a<x<a+b):\ \theta_{CD}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{2}P_1(x-a)^2\right]+\theta_A$$

$$\text{DE間}\,(a+b<x<a+b+c):\ \theta_{DE}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{2}P_1(x-a)^2-\frac{1}{2}P_2(x-a-b)^2\right]+\theta_A$$

$$\text{EB間}\,(a+b+c<x<a+b+c+d):\ \theta_{EB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{2}P_1(x-a)^2-\frac{1}{2}P_2(x-a-b)^2-\frac{1}{2}P_3(x-a-b-c)^2\right]+\theta_A.$$

たわみ関数は

$$\text{AC間}\,(0<x<a):\ v_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\frac{1}{6}R_Ax^3+\theta_Ax$$

$$\text{CD間}\,(a<x<a+b):\ v_{CD}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}P_1(x-a)^3\right]+\theta_Ax$$

$$\text{DE間}\,(a+b<x<a+b+c):\ v_{DE}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}P_1(x-a)^3-\frac{1}{6}P_2(x-a-b)^3\right]+\theta_Ax$$

$$\text{EB間}\,(a+b+c<x<a+b+c+d):\ v_{EB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{6}P_1(x-a)^3-\frac{1}{6}P_2(x-a-b)^3-\frac{1}{6}P_3(x-a-b-c)^3\right]+\theta_Ax.$$

θ_Aは$v_B=v_{EB}|_{x=a+b+c+d}=0$から求めることができる.

B)このはりは点Cについて対称なのでAC間($0<x<l$)のたわみ角の式とたわみ関数を求めるだけで十分である. これらは, θ_AをAのたわみ角として

$$\theta_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{24}\frac{q_0}{l}x^4\right]+\theta_A,\quad v_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_Ax^3-\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5\right]+\theta_Ax$$

θ_A は $\theta_C=\theta_{AC}|_{x=l}=0$ から求めることができる.

C) たわみ角の式は, θ_A をAのたわみ角として

$$\text{AC間}\ (0<x<a):\theta_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\frac{1}{2}R_A x^2+\theta_A$$

$$\text{CB間}\ (a<x<a+b):\theta_{CB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{2}P(x-a)^2-\frac{1}{6}q(x-a)^3\right]+\theta_A$$

たわみ関数は

$$\text{AC間}\ (0<x<a):v_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\frac{1}{6}R_A x^3+\theta_A x$$

$$\text{CB間}\ (a<x<a+b):v_{CB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{6}P(x-a)^3-\frac{1}{24}q(x-a)^4\right]+\theta_A x$$

θ_A は $v_B=v_{CB}|_{x=a+b}=0$ から求めることができる.

D) たわみ角の式は, θ_A をAのたわみ角として

$$\text{AC間}\ (0<x<a):\theta_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}qx^3\right]+\theta_A$$

$$\text{CD間}\ (a<x<a+b):\theta_{CD}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}qx^3+\frac{1}{6}q(x-a)^3\right]+\theta_A$$

$$\text{DB間}\ (a+b<x<a+b+c):\theta_{DB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}qx^3+\frac{1}{6}q(x-a)^3+M_0(x-a-b)\right]+\theta_A$$

たわみ関数は

$$\text{AC間}\ (0<x<a):v_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}qx^4\right]+\theta_A x$$

$$\text{CD間}\ (a<x<a+b):v_{CD}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{24}q(x-a)^4\right]+\theta_A x$$

$$\text{DB間}\ (a+b<x<a+b+c):v_{DB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{24}q(x-a)^4+\frac{1}{2}M_0(x-a-b)^2\right]+\theta_A x$$

ただし, θ_A は $v_B=v_{DB}|_{x=a+b+c}=0$ から求めることがきる.

参考:曲げモーメントの別表現を使った場合のたわみ角の式は

$$\text{CD間}\ (a<x<a+b):\theta_{CD}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}qa^3-\frac{1}{2}qa^2(x-a)-\frac{1}{2}qa(x-a)^2\right]+\theta_A$$

$$\text{DB間}\ (a+b<x<a+b+c):\theta_{DB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}qa^3-\frac{1}{2}qa^2(x-a)-\frac{1}{2}qa(x-a)^2+M_0(x-a-b)\right]+\theta_A$$

たわみ関数は

$$\text{CD間}\ (a<x<a+b):v_{CD}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}qa^4-\frac{1}{6}qa^3(x-a)-\frac{1}{4}qa^2(x-a)^2-\frac{1}{6}qa(x-a)^3\right]+\theta_A x$$

DB間($a+b<x<a+b+c$):

$$v_{DB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}qa^4-\frac{1}{6}qa^3(x-a)-\frac{1}{4}qa^2(x-a)^2-\frac{1}{6}qa(x-a)^3+\frac{1}{2}M_0(x-a-b)^2\right]+\theta_A x$$

問題5. 問題4のB)のはりで, CB間($l<x<2l$)のたわみ角の式とたわみ関数を求め,

$$\theta_B=\theta_{CB}|_{x=2l}=-\theta_A,\ v_B=v_{CB}|_{x=2l}=0$$

になることを示せ.

Ans.CB間($l<x<2l$)のたわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{CB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A(x^2-l^2)-\frac{1}{6}q_0l^2(x-l)-\frac{1}{4}q_0l(x-l)^2-\frac{1}{6}q_0(x-l)^3+\frac{1}{24}\frac{q_0}{l}(x-l)^4\right],$$

$$v_{CB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A(x-l)^2(x+2l)-\frac{1}{12}q_0l^2(x-l)^2-\frac{1}{12}q_0l(x-l)^3-\frac{1}{24}q_0(x-l)^4+\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}(x-l)^5\right]+v_C.$$

$R_A=\frac{1}{2}q_0l$, $\theta_A=\frac{1}{EI_z}\frac{5}{24}q_0l^3$, $v_C=\frac{1}{EI_z}\frac{2}{15}q_0l^4$であるから,

θ_{CB}の式に$x=2l$を代入すると$\theta_B=\theta_{CB}|_{x=2l}=\frac{-1}{EI_z}\frac{5}{24}q_0l^3=-\theta_A$.

v_{CB}の式に$x=2l$を代入すると$v_B=v_{CB}|_{x=2l}=0$.

以上により示された.

問題6. 図4のA)からD)のはりのたわみ角の式とたわみ関数を求めよ. 分布荷重q, $q(x)$はすべて下向きである. なお, これらのはりの曲げモーメントの式は第五章の問題10のAnsを参照のこと.

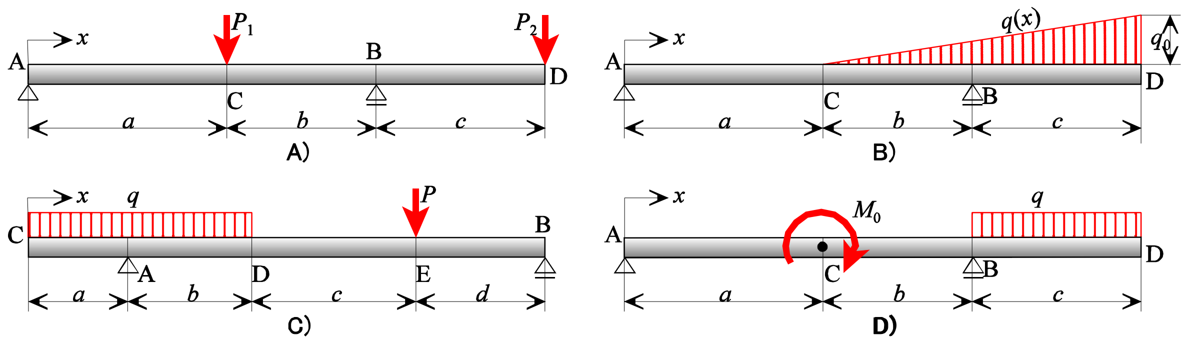


図4

Ans. A)たわみ角の式は, θ_AをAのたわみ角として

AC間($0<x<a$): $\theta_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\frac{1}{2}R_Ax^2+\theta_A$

CB間 ($a<x<a+b$) : $\theta_{CB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}R_A x^2-\dfrac{1}{2}P_1(x-a)^2\right]+\theta_A$

BD間 ($a+b<x<a+b+c$) : $\theta_{BD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}R_A x^2-\dfrac{1}{2}P_1(x-a)^2+\dfrac{1}{2}R_B(x-a-b)^2\right]+\theta_A$

たわみ関数は

AC間 ($0<x<a$) : $v_{AC}=\dfrac{-1}{EI_z}\dfrac{1}{6}R_A x^3+\theta_A x$

CB間 ($a<x<a+b$) : $v_{CB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}R_A x^3-\dfrac{1}{6}P_1(x-a)^3\right]+\theta_A x$

BD間 ($a+b<x<a+b+c$) : $v_{BD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}R_A x^3-\dfrac{1}{6}P_1(x-a)^3+\dfrac{1}{6}R_B(x-a-b)^3\right]+\theta_A x$

ただし，θ_Aは$v_B=v_{CB}|_{x=a+b}=0$から求めることができる.

B)たわみ角の式は，θ_AをAのたわみ角として

AC間 ($0<x<a$) : $\theta_{AC}=\dfrac{-1}{EI_z}\dfrac{1}{2}R_A x^2+\theta_A$

CB間 ($a<x<a+b$) : $\theta_{CB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}R_A x^2-\dfrac{1}{24}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^4\right]+\theta_A$

BD間 ($a+b<x<a+b+c$) : $\theta_{BD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}R_A x^2-\dfrac{1}{24}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^4+\dfrac{1}{2}R_B(x-a-b)^2\right]+\theta_A$

たわみ関数は

AC間 ($0<x<a$) : $v_{AC}=\dfrac{-1}{EI_z}\dfrac{1}{6}R_A x^3+\theta_A x$

CB間 ($a<x<a+b$) : $v_{CB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}R_A x^3-\dfrac{1}{120}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^5\right]+\theta_A x$

BD間 ($a+b<x<a+b+c$) : $v_{BD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}R_A x^3-\dfrac{1}{120}\dfrac{q_0}{b+c}(x-a)^5+\dfrac{1}{6}R_B(x-a-b)^3\right]+\theta_A x$

ただし，θ_Aは$v_B=v_{CB}|_{x=a+b}=0$から求めることができる.

C)たわみ角の式は，θ_CをCのたわみ角として

CA間 ($0<x<a$) : $\theta_{CA}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[-\dfrac{1}{6}qx^3\right]+\theta_C$

AD間 ($a<x<a+b$) : $\theta_{AD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[-\dfrac{1}{6}qx^3+\dfrac{1}{2}R_A(x-a)^2\right]+\theta_C$

DE間 ($a+b<x<a+b+c$) : $\theta_{DE}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[-\dfrac{1}{6}qx^3+\dfrac{1}{2}R_A(x-a)^2+\dfrac{1}{6}q(x-a-b)^3\right]+\theta_C$

EB間（$a+b+c<x<a+b+c+d$）: $\theta_{EB}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{6}qx^3+\frac{1}{2}R_A(x-a)^2+\frac{1}{6}q(x-a-b)^3-\frac{1}{2}P(x-a-b-c)^2\right]+\theta_C$

たわみ関数は，v_CをCのたわみとして

CA間（$0<x<a$）: $v_{CA}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{24}qx^4\right]+\theta_C x+v_C$

AD間（$a<x<a+b$）: $v_{AD}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{6}R_A(x-a)^3\right]+\theta_C x+v_C$

DE間（$a+b<x<a+b+c$）: $v_{DE}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{6}R_A(x-a)^3+\frac{1}{24}q(x-a-b)^4\right]+\theta_C x+v_C$

EB間（$a+b+c<x<a+b+c+d$）: $v_{EB}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{24}qx^4+\frac{1}{6}R_A(x-a)^3+\frac{1}{24}q(x-a-b)^4-\frac{1}{6}P(x-a-b-c)^3\right]+\theta_C x+v_C$

ただし，θ_Cとv_Cは$v_A=v_{CA}|_{x=a}=0$と$v_B=v_{EB}|_{x=a+b+c+d}=0$から求めることができる.

参考:曲げモーメントの別表現を使った場合のたわみ角の式は

DE間（$a+b<x<a+b+c$）: $\theta_{DE}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{6}q(a+b)^3-\frac{1}{2}q(a+b)^2(x-a-b)+\frac{1}{2}R_A(x-a)^2-\frac{1}{2}q(a+b)(x-a-b)^2\right]+\theta_C$

EB間（$a+b+c<x<a+b+c+d$）:

$$\theta_{EB}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{6}q(a+b)^3-\frac{1}{2}q(a+b)^2(x-a-b)+\frac{1}{2}R_A(x-a)^2-\frac{1}{2}q(a+b)(x-a-b)^2-\frac{1}{2}P(x-a-b-c)^2\right]+\theta_C$$

たわみ関数は

DE間（$a+b<x<a+b+c$）:
$$v_{DE}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{24}q(a+b)^4-\frac{1}{6}q(a+b)^3(x-a-b)-\frac{1}{4}q(a+b)^2(x-a-b)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}R_A(x-a)^3-\frac{1}{6}q(a+b)(x-a-b)^3\right]+\theta_C x+v_C$$

EB間（$a+b+c<x<a+b+c+d$）:
$$v_{EB}=\frac{-1}{EI_z}\left[-\frac{1}{24}q(a+b)^4-\frac{1}{6}q(a+b)^3(x-a-b)-\frac{1}{4}q(a+b)^2(x-a-b)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}R_A(x-a)^3-\frac{1}{6}q(a+b)(x-a-b)^3-\frac{1}{6}P(x-a-b-c)^2\right]+\theta_C x+v_C$$

D）たわみ角の式は，θ_AをAのたわみ角として

AC間（$0<x<a$）: $\theta_{AC}=\frac{-1}{EI_z}\frac{1}{2}R_A x^2+\theta_A$

CB間（$a<x<a+b$）: $\theta_{CB}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2+M_0(x-a)\right]+\theta_A$

BD間（$a+b<x<a+b+c$）: $\theta_{BD}=\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2+M_0(x-a)+\frac{1}{2}R_B(x-a-b)^2-\frac{1}{6}q(x-a-b)^3\right]+\theta_A$

たわみ関数は

AC間（$0<x<a$）: $v_{AC}=\dfrac{-1}{EI_z}\dfrac{1}{6}R_A x^3+\theta_A x$

CB間（$a<x<a+b$）: $v_{CB}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}R_A x^3+\dfrac{1}{2}M_0(x-a)^2\right]+\theta_A x$

BD間（$a+b<x<a+b+c$）: $v_{BD}=\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}R_A x^3+\dfrac{1}{2}M_0(x-a)^2+\dfrac{1}{6}R_B(x-a-b)^3-\dfrac{1}{24}q(x-a-b)^4\right]+\theta_A x$

ただし，θ_Aは$v_B=v_{CB}|_{x=a+b}=0$から求めることができる．

問題7．問題3．で，C$(x=a+b)$のたわみ角をゼロにしたい．M_0はどのような式で表されるか．また，このときのAの固定モーメントM_Aはどのような式で表されるか．

ヒント: $\theta_C=\theta_{BC}|_{x=a+b}=\theta_B+\dfrac{1}{EI_z}M_0 b=\dfrac{-1}{EI_z}\left[M_A a+\dfrac{1}{2}R_A a^2-\dfrac{1}{6}qa^3\right]+\dfrac{1}{EI_z}M_0 b=0$から求めるが，$R_A=qa$，$M_A=-\dfrac{1}{2}qa^2-M_0$を代入し忘れないように．

Ans. $M_0=-\dfrac{1}{6}\dfrac{qa^3}{a+b}$，$M_A=-\dfrac{1}{2}qa^2(2a+3b)$．

問題8．問題7のはりで，点C$(x=a+b)$のたわみ角をゼロに保ったまま点Cに横荷重P_Cを作用させてたわみをゼロにしたい．P_CとM_0はどのような式で表されるか．また，Aの反力R_Aと固定モーメントM_Aはどのような式で表されるか．

ヒント:ここでは次のステップに従って重ね合わせ法で求める．

ステップ1:問題3のθ_{BC}とv_{BC}の式に$x=a+b$を代入してθ_Cとv_Cの式を求め，θ_{C1}とv_{C1}とする．

ステップ2:**基本例題7．1**で$P_1=0$，$P_2=P_C$，$l=a+b$として点Cのθ_Cとv_Cの式を求め，θ_{C2}とv_{C2}とする．

ステップ3: $\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}=0$，$v_C=v_{C1}+v_{C2}=0$の条件から$P_C$と$M_0$の式を求める．

注意:反力R_Aと固定モーメントM_Aの式を求める際，下向きの横荷重P_Cを含めた系全体の力のつりあい

$$R_A-qa-P_C=0,\quad M_A+\frac{1}{2}qa^2+M_0+P_C(a+b)=0$$

を考える必要がある．

Ans. θ_{C1}とv_{C1}は，$R_A=qa$，$M_A=-\dfrac{1}{2}qa^2-M_0$を使って

$$\theta_{C1}=\frac{1}{EI_z}\frac{1}{6}qa^3+\frac{1}{EI_z}M_0(a+b),\quad v_{C1}=\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{8}qa^4+\frac{1}{6}qa^3 b\right]+\frac{1}{EI_z}\frac{1}{2}M_0(a+b)^2$$

θ_{C2}とv_{C2}は，P_Cを下向きとして

$$\theta_{C2}=\frac{1}{EI_z}\frac{1}{2}P_C(a+b)^2,\quad v_{C2}=\frac{1}{EI_z}\frac{1}{3}P_C(a+b)^3$$

$\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}=0$，$v_C=v_{C1}+v_{C2}=0$の条件から

$$P_C=-\frac{1}{2}\frac{a+2b}{(a+b)^3}qa^3,\quad M_0=\frac{1}{12}\frac{a+4b}{(a+b)^2}qa^3.$$

Aの反力R_Aと固定モーメントM_Aは

$$R_A=P_C+qa=\frac{1}{2}\frac{a^3+4a^2b+6ab^2+2b^3}{(a+b)^3}qa,\quad M_A=-\frac{1}{2}qa^2-M_0-P_C(a+b)=-\frac{1}{12}\frac{a^2+4ab+6b^2}{(a+b)^2}qa^2.$$

$P_C<0$，$M_A<0$なので，P_Cは上向きで大きさは$\frac{1}{2}\frac{a+2b}{(a+b)^3}qa^3$，$M_A$は反時計回りで大きさは$\frac{1}{12}\frac{a^2+4ab+6b^2}{(a+b)^2}qa^2$である．

補足：

1．特に分布荷重がはり全長にわたって作用するとき，$b=0$して，$R_A=\frac{1}{2}qa$，$P_C=-\frac{1}{2}qa$，$M_A=-\frac{1}{12}qa^2$，$M_0=\frac{1}{12}qa^2$となる．

2．この問題は，点Cでたわみ角とたわみが共にゼロなのでCが固定支持されていることと同じである．すなわち，図5A)に示す両端が固定支持されたはりと同じである．対応するフリーボディダイヤグラムは，固定支持点Cの反力を上向きにR_C，固定モーメントM_Cを反時計回りに取って，図5B)のように描くのが普通である．固定支持端での反力と固定モーメントの置き方に注意しておこう．図5B)では，静力学的つりあい式は

$$R_A+R_C-qa=0,\quad M_A-M_C+\frac{1}{2}qa^2-R_C(a+b)=0$$

となる．

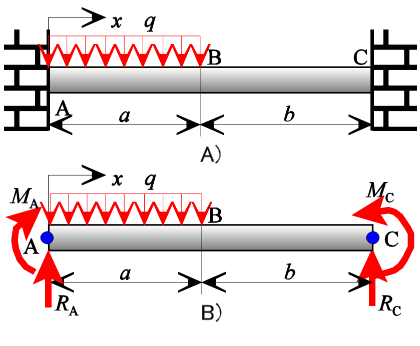


図5

問題9．図3A)のはりで点Dのたわみをδにしたい．P_1とP_3が決まっているものとしてP_2を決めるための式の求め方を述べよ．また，$a=b=c=d$であるとき，P_2の式を求めよ．ただし，$P_1\neq P_3$とする．

Ans. $v_D=v_{CD}|_{x=a+b}=\delta$の条件から

$$-(a+b)^3R_A+b^3P_1+6EI_z\theta_A(a+b)=EI_z\delta$$

この式に，第五章の問題9で求めたR_Aと問題4のA)からθ_Aの式を代入し，P_2を決める式を求める．ちなみに，

$$R_A=\frac{(b+c+d)P_1+(c+d)P_2+dP_3}{a+b+c+d},$$

$$\theta_A=\frac{1}{6}\frac{1}{EI_z}\frac{a(b+c+d)(a+2b+2c+2d)P_1+(a+b)(c+d)(a+b+2c+2d)P_2+(a+b+c)d(a+b+c+2d)P_3}{a+b+c+d}$$

である.

$a=b=c=d$のとき，$R_A=\frac{1}{4}(3P_1+2P_2+P_3)$，$\theta_A=\frac{1}{24}\frac{1}{EI_z}(21P_1+24P_2+15P_3)a^2$となり，これらを用いると

$$P_2=\frac{1}{16}\left[2\frac{EI_z}{a^3}\delta-11(P_1+P_3)\right].$$

補足:さらに，$P_1=P_3=P$，$\delta=0$なら，$P_2=-\frac{11}{8}P$，$\theta_A=\frac{1}{8}\frac{1}{EI_z}Pa^2$となる.

問題10．図6の示す二つの不静定はりの反力を求めたい．各はりについて，最終的に解かなければならない連立一次方程式を求めよ．ただし，(B)では点Cはヒンジ点であり，**発展例題6.29**の解法を参考にせよ.

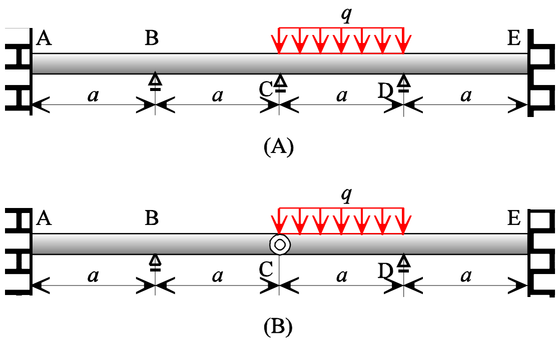


図6

Ans.

(A)支点反力をすべて上向き，点Aでの固定モーメントを時計回りに仮定する．未知の量は，M_A，R_A，R_B，R_C，R_Dの五個である．解かなければならない連立一次方程式は

$$3M_A+aR_A=0$$

$$12M_A+8aR_A+aR_B=0$$

$$108M_A+108aR_A+32aR_B+4aR_C=qa^2$$

$$192M_A+256aR_A+108aR_B+32aR_C+4aR_D=15qa^2$$

$$24M_A+48aR_A+27aR_B+12aR_C+3aR_D=7qa^2$$

(B)ヒンジ点Cの左部分でCにはたらく力を下向きにR_C，右部分でCにはたらく力を上向きにR_Cとする．支点反力をすべて上向き，点Aでの固定モーメントを時計回りに仮定する．未知の量は，M_A，R_A，R_B，R_C，R_D，θ_{C2}(はりのCDE部分の点Cおけるたわみ角)，v_C(点Cのたわみ)の七個である．解かなければならない連立一次方程式は

$$M_A+2aR_A+aR_B=0$$

$$R_A+R_B-R_C=0$$

$$3M_A+aR_A=0$$

$$12a^2M_A+8a^3R_A+a^3R_B+6EI_zv_C=0$$

$$4a^3R_C-24EI_za\theta_{C2}-24EI_Zv_C=qa^4$$

$$32a^3R_C+4a^3R_D-48EI_za\theta_{C2}-24EI_zv_C=15qa^4$$

$$12a^2R_C+3a^2R_D-6EI_z\theta_{C2}=7qa^3$$

参考までに，系(A)，(B)の解は，それぞれ，次のようである．

系(A)：$M_A=-\dfrac{5}{672}qa^2$, $R_A=\dfrac{5}{224}qa$, $R_B=-\dfrac{5}{56}qa$, $R_C=\dfrac{63}{112}qa$, $R_D=\dfrac{33}{56}qa$.

系(B)：$M_A=\dfrac{3}{28}qa^2$, $R_A=-\dfrac{9}{28}qa$, $R_B=\dfrac{15}{28}qa$, $R_C=\dfrac{3}{14}qa$, $R_D=\dfrac{17}{14}qa$, $EI_z\theta_{C2}=-\dfrac{11}{84}qa^3$, $EI_zv_C=\dfrac{1}{8}qa^4$.

問題11．図6(B)の系で，ヒンジ点Cに下向きの集中荷重P_Cを加えた．M_A，R_A，R_B，R_C，R_Dを求めよ．また，θ_{C2}(はりのCDE部分の点Cおけるたわみ角)，v_C(点Cのたわみ)を求めよ．

ヒント：集中荷重P_Cのみが作用する場合は，点Cについて左右対称になるので，点Cの左右のはりで$P_C/2$ずつの荷重が作用することになる．このことを使えばよい．

Ans.

$$M_A=\frac{3}{28}qa^2+\frac{1}{4}P_Ca,\ R_A=-\frac{9}{28}qa-\frac{3}{4}P_C,\ R_B=\frac{15}{28}qa+\frac{5}{4}P_C,\ R_{C1}=\frac{3}{14}qa+\frac{1}{2}P_C,$$

$$R_{C2}=\frac{3}{14}qa-\frac{1}{2}P_C,\ R_D=\frac{17}{14}qa+\frac{5}{4}P_C.$$

$$EI_z\theta_{C2}=-\frac{11}{84}qa^3-\frac{3}{8}P_Ca^2,\ EI_zv_C=\frac{1}{8}qa^4+\frac{7}{24}P_Ca^3$$

補足：この問題の場合，点Cは荷重の作用点なので，この点の左右で大きさP_Cのせん断力の差が生ずる．つまり，左側の力をR_{C1}(下向きとする)，右側の力をR_{C2}(上向きとする)とおくと，$R_{C1}-R_{C2}=P_C$(下向き)でなければならない．この場合解かなければならない連立一次方程式は

$$M_A+2aR_A+aR_B=0$$

$$R_A+R_B-R_{C1}=0$$

$$3M_A+aR_A=0$$

$$12a^2M_A+8a^3R_A+a^3R_B+6EI_zv_C=0$$

$$4a^3R_{C1}-24EI_za\theta_{C2}-24EI_Zv_C=qa^4+4a^3P_C$$

$$32a^3R_{C1}+4a^3R_D-48EI_za\theta_{C2}-24EI_zv_C=15qa^4+32a^3P_C$$

$$12a^2R_{C1}+3a^2R_D-6EI_z\theta_{C2}=7qa^3+12a^2P_C$$

となる．

問題12．第2章の演習問題8．で，剛体棒を曲げ剛性E_1Iの弾性はりに代えた．三本の弾性棒に生ずる軸力を求めるための式を導け．

ヒント：棒の伸縮の向きとはりのたわみの向きをよく考える．たとえば，第2章の演習問題8．の図8の棒の点A，B，Cでの位置の移動量λ_1，λ_2，λ_3を点A，B，Cでのはりのたわみと考える．これらの点のたわみはたわみ関数から求める．ついでに，点Aは固定支持ではないので，たわみ角θ_Aはゼロではない．

Ans.

$$N_1+N_2+N_3=0$$

$$2N_1+N_2=0$$

$$-N_1\left[l+\frac{AE}{EI_1}a^3\right]+N_2\left[2(l-b)-\frac{AE}{EI_1}\frac{1}{6}a^3\right]-N_3(l-2b)=AE\alpha\Delta T(l-2b)$$

の三つの式が弾性棒に生ずる軸力を決めるための条件式になる．

補足：Ans.の二番目の式は点Cまわりのモーメントのつりあい式から得られるが，Aまわりのつりあい式からなら$N_2+2N_3=0$，Bまわりのつりあい式からなら$N_1-N_3=0$である．

第7章　長柱の座屈，フレームの座屈

ここでは，長柱の座屈とフレームの座屈に係る例題を挙げる．座屈の問題を考える上で重要な点は，「長柱やフレームの部材が変形したと考えて静力学的つり合いを考える」ことである．ここで「変形」とは，軸方向の伸縮ではなく，柱やフレーム部材がたわむことである．

基本事項1（オイラー座屈）

1．オイラーの座屈荷重P_{cr}は次のような公式から求めることができる．

$$P_{cr}=C\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

ここで，EIは柱の曲げ剛性，lは柱の長さ，係数Cは柱の支持条件によって

一端固定，他端自由(以下，C/F柱と略す)　　$C=1/4$

両端回転自由(以下，S/S柱と略す)　　$C=1$

両端固定(以下，C/C柱と略す)　　$C=4$

である．Cは固定(clamped)，Fは自由(free)，Sは回転自由(simply supported)を表す．図7.1に座屈変形時の様子を示す．(A)はC/F柱，(B)はS/S柱，(C)はC/C柱の場合である．

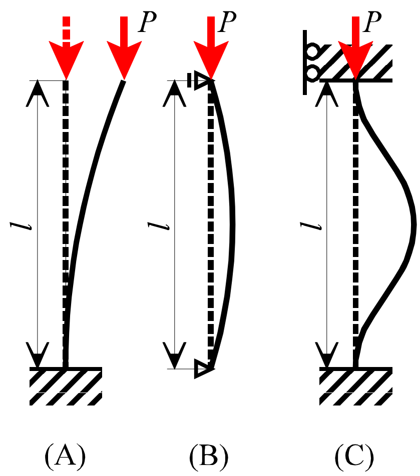


図7.1

2．オイラーの座屈荷重の公式は次の条件を満たす細長比l/kの柱に対して適用される．

$$\frac{l}{k}>\pi\sqrt{C\frac{E}{\sigma_Y}}$$

ここで，係数Cは上述の値であり，Eとσ_Yは，それぞれ，柱の材料のヤング率と降伏応力(または耐力)である．この条件式は座屈応力$\sigma_{cr}=\dfrac{P_{cr}}{A}$と降伏応力$\sigma_Y$との関係で定まる．なお，$P_{cr}$の計算に際しては，対象とする柱の細長比と上式の右辺の値がこの不等式を満たすことを確認する．

基本例題7.01　$\sigma_Y>\sigma_{cr}$から**基本事項1**の2．で述べた条件式を導け．

解答　オイラーの座屈荷重の式を，$C=1/4$(C/F柱の場合)，$C=1$(S/S柱の場合)，$C=4$(C/C柱の場合)として

$$P_{cr}=C\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

で表す．オイラーの座屈応力は，断面積をAで表すと

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=C\pi^2 E\frac{1}{l^2}\frac{I}{A}$$

から求められる．ここで，$k^2=\dfrac{I}{A}$とおくと，

$$\sigma_{cr}=C\pi^2 E\left(\frac{k}{l}\right)^2$$

この座屈応力は降伏応力σ_Yを超えることができないことから，

$$\sigma_Y>C\pi^2 E\left(\frac{k}{l}\right)^2$$

から,

$$\frac{l}{k}>\pi\sqrt{C\frac{E}{\sigma_Y}}$$

が得られる. ■

基本例題7.02　基本事項1の三種類の支持条件の柱についてオイラー座屈荷重の式が適用できる細長比の条件を導け. 柱の材料のヤング率を70 GPa, 降伏応力を120 MPaとする. また, 横断面形状が図7.2のような長方形断面で, 長さl=1 mの柱についてオイラーの座屈荷重の式が適用できるかどうかを調べ, 適用できるものについてオイラー座屈荷重と座屈応力を求めよ.

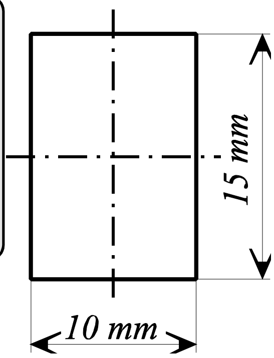


図7.2

解答　[**細長比の条件**]

所定の数値を用いると, 細長比の条件は

C/F柱(C=1/4)　$$\frac{l}{k}>\pi\sqrt{C\frac{E}{\sigma_Y}}=\pi\times\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{70\times10^9}{120\times10^6}}=37.9$$

S/S柱(C=1)　$$\frac{l}{k}>\pi\sqrt{C\frac{E}{\sigma_Y}}=\pi\times\sqrt{1\times\frac{70\times10^9}{120\times10^6}}=75.8$$

C/C柱(C=4)　$$\frac{l}{k}>\pi\sqrt{C\frac{E}{\sigma_Y}}=\pi\times\sqrt{4\times\frac{70\times10^9}{120\times10^6}}=151$$

となる.

[**オイラー座屈荷重の式の適用性**]

横断面が長方形断面であるから, 断面二次モーメントは二つ考えられる. すなわち,

$$I_1=\frac{1}{12}\times15\times10^3=1250\ mm^4=1.25\times10^{-9}\ m^4$$

$$I_2=\frac{1}{12}\times10\times15^3=2813\ mm^4=2.813\times10^{-9}\ m^4$$

である. $I_1<I_2$であるから, $I=I_1$としてオイラー座屈荷重の式が使えるかどうかを検討する.

柱の横断面積は$A=10\times15=150\ mm^2=150\times10^{-6}\ m^2$である. これから, 細長比は

$$\frac{l}{k}=l\sqrt{\frac{A}{I}}=1\times\sqrt{\frac{150\times10^{-6}}{1.25\times10^{-9}}}=346.4$$

となる. この値は, [**細長比の条件**]で求めた**基本事項1**の三種類の柱の支持条件に対する限界値のいずれの値よりも大きいため, オイラー座屈荷重の公式を適用できる.

[**オイラー座屈荷重と座屈応力**]

C/F柱の座屈荷重は**基本事項1**のC/F柱のオイラー座屈荷重の式から

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4l^2}=\frac{\pi^2\times70\times10^9\times1.25\times10^{-9}}{4\times1^2}=216\ N$$

となる. これを横断面積$A=150\times10^{-6}\ m^2$で割ると, 座屈応力σ_{cr}が次のように得られる.

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=1.44\ MPa$$

S/S柱の座屈荷重と座屈応力はC/F柱の4倍になるので,

P_{cr}=864 N,　　　σ_{cr}=5.76 MPa

C/C柱の座屈荷重と座屈応力は，さらに4倍になるので，

P_{cr}=3.45 kN,　　　σ_{cr}=23.0 MPa

である．■

解説1：横断面の寸法や柱の材質が決まっている場合，オイラー座屈荷重の公式が適用できる柱の長さを決めることができる．この例題の場合，k=1/346.4 mなので，

C/F柱：　l>109×10^{-3} m=109 mm

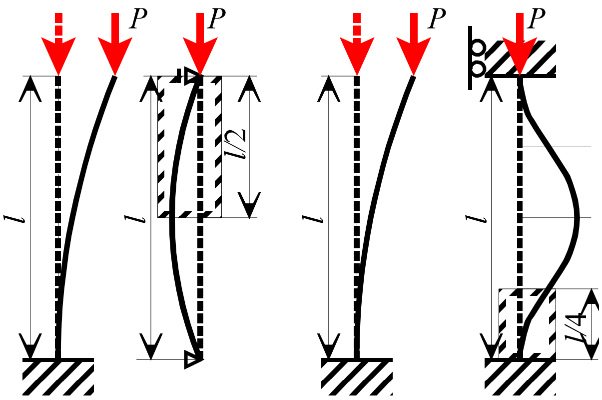
S/S柱：　l>218×10^{-3} m=218 mm

C/C柱：　l>435×10^{-3} m=435 mm

となる．「うわ！短っ！」と思うかどうかは皆さんの判断に任せます．

基本例題7.03　C/F柱のオイラー座屈荷重は$P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{4l^2}$である．このことを用いて，S/S柱とC/C柱のオイラー座屈荷重を導け．ともに，長さをlとする．

指針　S/S柱の場合，図7.3(A)のように長さ$l/2$のC/F柱を二本つなっがっているもの，C/C柱の場合，図7.3(B)のように長さ$l/4$のC/F柱が四本つながっているものと考える．



(A)　　(B)

図7.3

解答　S/S柱の場合，図7.3(A)のように$l/2$の位置に固定端を置き，この位置に対して上下対称と考えると，C/F柱のオイラー座屈荷重の式のlを$l/2$に置き換えて，

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4(l/2)^2}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

となり，C/C柱の場合，C/F柱のオイラー座屈荷重の式のlを$l/4$に置き換えると，

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4(l/4)^2}=\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

となる．■

解説：長さlのS/S柱のオイラー座屈荷重は，長さ$l/2$のC/F柱のオイラー座屈荷重に等しい．また，長さlのC/C柱のオイラー座屈荷重は，長さ$l/4$のC/F柱のオイラー座屈荷重に等しい．

発展例題7.04　C/F柱，S/S柱，C/C柱のオイラー座屈荷重をたわみの方程式から導け．柱の長さをl，曲げ剛性をEIとする．

指針　図7.4から7.6のフリーボディダイヤグラムを参考にすること．

解答 1．C/F柱：自由端のたわみをv_Bとすると，図7.4上のように固定端Aには右向きの反力Pと固定モーメントPv_B(ここでは反時計回りを仮定)が生じていなければならない．固定端からxの点でのたわみをvとする．点Aの力とモーメントは局所系の外力になるため，図7.4下のフリーボディダイヤグラムのように，xでは曲げモーメントMと内力Pが発生していなければならないので，モーメントのつりあいは$Pv_B+M-Pv=0$となり，これより，曲げモーメントは

$$M=-Pv_B+Pv$$

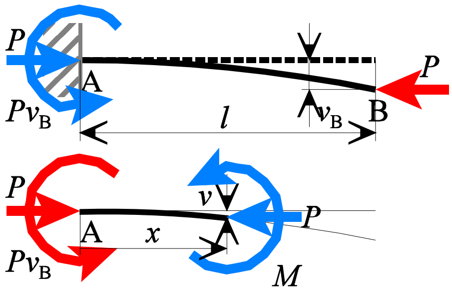


図7.4

である．したがって，たわみの方程式は

$$\frac{dv^2}{dx^2}=-\frac{1}{EI}M=-\frac{1}{EI}\left(Pv-Pv_B\right) \quad\rightarrow\quad \boxed{\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=\frac{P}{EI}v_B}$$

となる．$\alpha^2=P/EI$とすると，解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+v_B$$

$x=0$で$v=0$，$\theta=dv/dx=0$から$A=-v_B$，$B\equiv0$である．ゆえに，たわみ関数は

$$v=(1-\cos\alpha x)v_B$$

また，$x=l$で$v=v_B$より$\cos\alpha l=0$でなければならない．これより，$\alpha l=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$(ただし，$n=1,2\cdots$)．最小値を$\alpha_{cr}$で表すと，

$n=1$のとき最小値$\alpha_{cr}l=\dfrac{\pi}{2}$となり，このときの$P$を$P_{cr}$で表すと，

$$\boxed{P_{cr}=EI\alpha_{cr}^2=\frac{\pi^2EI}{4l^2}}$$

である．

2．S/S柱：図7.5上のように回転自由端Aには右向きの反力Pのみが生じている．Aからxの点でのたわみをvとする．点Aの力は局所系の外力になるため，図7.5下のフリーボディダイヤグラムのように，xでは曲げモーメントMと内力Pが発生していなければならないので，モーメントのつりあいは$M-Pv=0$となり，これより，曲げモーメントは

$$M=Pv$$

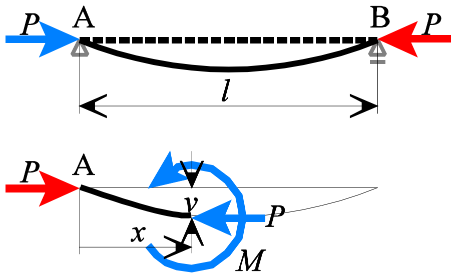


図7.5

である．したがって，たわみの方程式は

$$\frac{dv^2}{dx^2}=-\frac{1}{EI}M=-\frac{1}{EI}Pv \quad\rightarrow\quad \boxed{\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=0}$$

である．$\alpha^2=P/EI$とすると，解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$$

$x=0$で$v=0$，$x=l$で$v=0$でなければならないから，$A\equiv0$，$B\sin\alpha l=0$でなければならない．いま，$B\neq0$であるから$\sin\alpha l=0$．これより，$\alpha l=n\pi$(ただし，$n=1,2\cdots$)．$n=1$のとき最小値$\alpha_{cr}l=\pi$となり，このときのPをP_{cr}で表すと，

$$\boxed{P_{cr}=EI\alpha_{cr}^2=\frac{\pi^2EI}{l^2}}$$

である．

3．C/C柱：図7.6上のように固定端Aには右向きの反力Pと固定モーメント

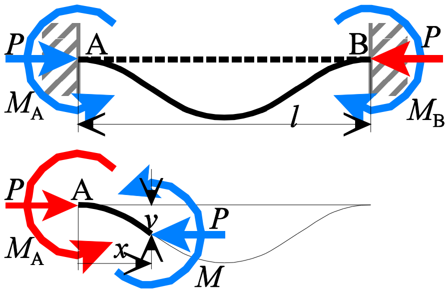


図7.6

M_A(ここでは反時計回りを仮定)が生じていなければならない．固定端からxの点でのたわみをvとする．点Aの力とモーメントは局所系の外力になるため，図7.6下のフリーボディダイヤグラムのように，xでは曲げモーメントMと内力Pが発生していなければならないので，モーメントのつりあいは$M_A+M-Pv=0$となり，これより，曲げモーメントは

$$M=Pv-M_A$$

であるから，たわみの方程式は

$$\frac{dv^2}{dx^2}=-\frac{1}{EI}M=-\frac{1}{EI}(Pv-M_A) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=\frac{M_A}{EI}}$$

である．$\alpha^2=P/EI$とすると，解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\frac{M_A}{P}$$

$x=0$で$v=0$，$\theta=dv/dx=0$から$A=-\frac{M_A}{P}$，$B\equiv 0$である．ゆえに，

$$v=(1-\cos\alpha x)\frac{M_A}{P}.$$

座屈後の形状が$x=\frac{l}{2}$について対称である(あるいは，$x=\frac{l}{2}$でたわみが最大値をとる)ことから，$x=\frac{l}{2}$で$\frac{dv}{dx}=0$でなければならない．ゆえに，$\sin\frac{1}{2}\alpha l=0$でなければならない．これより，$\alpha_{cr}l=2n\pi$(ただし，$n=1,2\cdots$)．$n=1$のとき最小値$\alpha_{cr}l=2\pi$となり，このときの$P$を$P_{cr}$で表すと，

$$\boxed{P_{cr}=EI\alpha_{cr}^2=\frac{4\pi^2 EI}{l^2}}$$

である．■

解説1：さて，C/F柱ではv_B，S/S柱では係数B，C/C柱では$\frac{M_A}{P}$が決まっていないことに気付くが，座屈後の形状を表す関数だけは決まっている．つまり，C/F柱では$1-\cos\frac{\pi x}{2l}$，S/S柱では$\sin\pi\frac{x}{l}$，C/C柱では$1-\cos 2\pi\frac{x}{l}$である．このような，形状を特徴付ける関数を固有関数(eigen function)という．また，C/F柱では$\cos\alpha l=0$，S/S柱では$\sin\alpha l=0$，C/C柱では$\sin\frac{1}{2}\alpha l=0$を固有値方程式といい，固有値方程式の根を固有値(eigen value)という．固有関数，固有値，固有値方程式は組になっている．また，$\cos\alpha l=0$のように，代数方程式ではない形の方程式を超越方程式(transcendental equation)と呼んでいる．

基本事項2（少し複雑な系の座屈荷重）

ここでは，オイラー座屈より少し複雑な系の座屈荷重や座屈荷重を決めるための固有値が満足すべき固有値方程式の導出などについて考える．基本的に重要なことは，**発展例題7.02**のオイラー座屈について考えたように，柱の支持条件と変形状態を考えてフリーボディダイヤグラムを描くことである．これによって系全体の静力学的つりあい条件と局所系のつりあい条件，たわみの基礎方程式を組み合わせることで固有値方程式を導くことができる．

発展例題7.05　図7.7に示すような，一端固定，他端回転自由柱(C/S柱)の座屈荷重を求めよ．

指針　図7.1(A)のC/F柱の自由端に水平方向左向きに力Vを作用させ，自由端を元の位置に戻すとして考える．このとき，固定端には水平方向の力のつり合いから水平方向左向きに$R=V$の反力が生ずることに注意する．

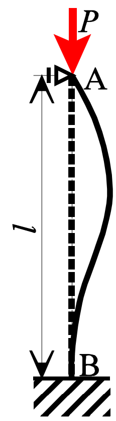


図7.7

解答　図7.8のようにフリーボディダイヤグラムを考える．上の図は系全体のもので，下の図は局所系のものである．図7.4と比較すると，固定モーメントがM_Aで表されているほかは力Vが作用している．

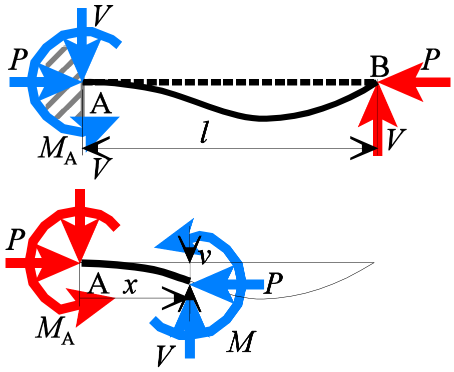


図7.8

図7.8下の局所系のフリーボディダイヤグラムからモーメントのつりあいは$M_A+Vx-Pv+M=0$であるから，これより曲げモーメントは

$$M=Pv-Vx-M_A$$

である．また，点Bは回転自由端であるから$M(l)=0$．また，この点では$v(l)=0$であるから，$M_A=-Vl$となる．これを用いると曲げモーメントは

$$M=Pv-Vx+Vl$$

たわみの方程式は

$$\frac{dv^2}{dx^2}=-\frac{1}{EI}M=-\frac{1}{EI}(Pv-Vx+Vl) \quad\rightarrow\quad \boxed{\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=\frac{Vx}{EI}-\frac{Vl}{EI}}$$

である．$\alpha^2=P/EI$とすると，解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\frac{V}{P}(x-l)$$

$x=0$で$v=0$，$\theta=dv/dx=0$から$A=\dfrac{V}{P}l$，$B=-\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{P}{V}$である．ゆえに，

$$v=-(1-\cos\alpha x)\frac{V}{P}l+\left(x-\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\right)\frac{V}{P}.$$

$x=l$で$v=0$でなければならないから，

$$\alpha l-\tan\alpha l=0$$

が得られる．この方程式がαが満たさなければならない方程式になる．この方程式を満足する最小の値をα_{cr}とすると，$\alpha_{cr}l=4.4934$であるから，座屈荷重P_{cr}は

$$\boxed{P_{cr}=\alpha_{cr}^2EI=\left(\frac{4.4934}{l}\right)^2EI=2.045\frac{\pi^2EI}{l^2}}$$

である．■

解説1：固有値方程式$\alpha l - \tan\alpha l = 0$を満たす$\alpha l$は，$y=\tan x$のグラフと$y=x$のグラフを同じ方眼紙上に描いて，これら二つのグラフの交点のx座標がこの場合の$\alpha_{cr}l$である．コンピュータで計算することもできるので，興味ある人はぜひやってみてください．

解説2：C/S柱の座屈荷重もオイラー座屈荷重に含め，

$$P_{cr}=C\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

で表すことがある．C/S柱の場合，$C=2.045$である．

発展例題7.06　図7.9のように，S/S柱の中立軸からわずかにeだけずれた位置に軸圧縮荷重Pが作用している．この系におけるたわみ関数を求めよ．

指針　図7.10のような等価な系で考える．

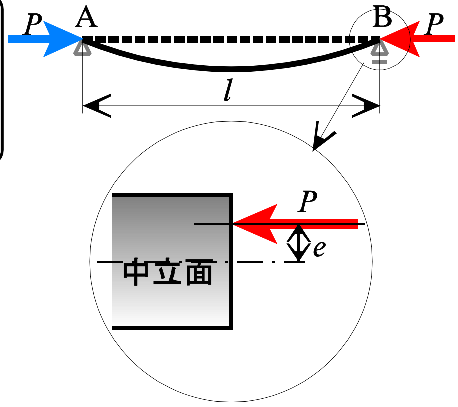


図7.9

解答　図7.9の荷重の作用線のずれは，作用線を中立面内の柱の軸線へ移したときモーメントPeを生ずるので，図7.9と等価な系は図7.10になる．

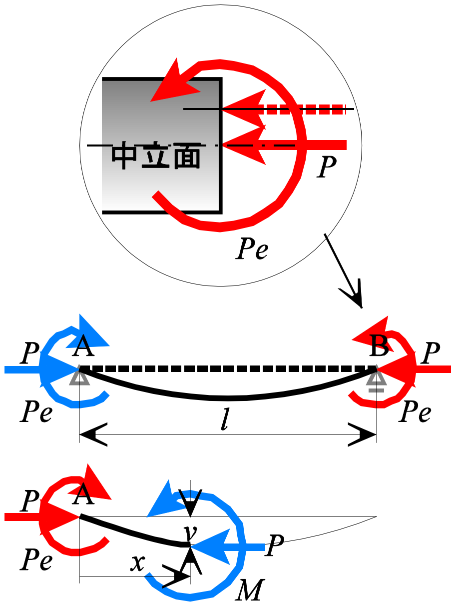


図7.10

たわみvが生じているとき，図7.10から，モーメントのつりあいは

$$M-Pe-Pv=0$$

となるから，柱の曲げモーメントは

$$M=Pe+Pv$$

である．したがって，たわみの方程式は

$$\frac{dv^2}{dx^2}=-\frac{1}{EI}M=-\frac{1}{EI}(Pv+Pe) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=-\frac{P}{EI}e}$$

となる．$\alpha^2=P/EI$とすると，解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x-e$$

$x=0$，lで$v=0$から$A=e$，$B=\dfrac{1-\cos\alpha l}{\sin\alpha l}e=e\tan\dfrac{1}{2}\alpha l$である．ゆえに，たわみ関数は

$$\boxed{v=e\left(\tan\frac{1}{2}\alpha l\cdot\sin\alpha x+\cos\alpha x-1\right)} \rightarrow \boxed{v=2e\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha x\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha(l-x)}{\cos\frac{1}{2}\alpha l}}$$

となる．この関数は明らかに$x=\dfrac{1}{2}l$について対称である．■

解説1：この場合の固有関数は

$$\frac{v}{e}=2\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha x\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha(l-x)}{\cos\frac{1}{2}\alpha l}$$

である．

解説2：さて，たわみ関数で，eが有限で$\cos\frac{1}{2}\alpha l=0$，つまり，$\alpha l=(2n-1)\pi$(ただし，$n=1,2\cdots$)であれば，**たわみが無限大になって構造部材として機能しなくなる**．このような状態を座屈という場合がある．「たわみが無限大になる」というのは数学的な表現であり，実際にはこの条件を満たす荷重に達するとたわみが急激に増加してしまうと考える．

解説3：最大たわみは$x=\frac{1}{2}l$で生じ，$v_{\max}=e\left(\sec\frac{1}{2}\alpha l-1\right)$．一方，$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$であるから，$\frac{1}{2}\alpha l=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}l=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}$となり，最大たわみは$v_{\max}=e\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}-1\right)$とも書ける．ちなみに，$\sec x=\frac{1}{\cos x}$．

解説4：$x=\frac{1}{2}l$で曲げモーメントも最大になり$M_{\max}=Pe\sec\frac{1}{2}\alpha l$であるから，発生する応力は軸応力$\frac{P}{A}$と曲げ応力$\frac{M_{\max}}{Z}$との和になるから，$\sigma_{x\max}=\frac{P}{A}+\frac{P}{Z}e\sec\frac{1}{2}\alpha l=\frac{P}{A}+\frac{P}{Z}e\sec\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$となる．

解説5：解説4の$\sigma_{x\max}$の式でさらに，$\sigma_x=\frac{P}{A}$と置くと，$\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2}\sqrt{\frac{A\sigma_x}{EI}}\right)$と書ける．この$\sigma_{x\max}$が降伏応力$\sigma_Y$に達すると構造部材として機能しなくなると考えると，降伏しないためには

$$\sigma_Y>\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)\qquad \text{ただし，}k^2=\frac{I}{A}$$

でなければならない．$\sigma_Y=\sigma_{x\max}$が成り立つときのσ_xをσ_{cr}と考える．通常σ_{cr}はオイラーの座屈荷重より常に小さい．また，eを仮定して設計に用いることもある．また，柱が降伏しないためには，不等式

$$\sigma_Y>\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)$$

が成り立つ範囲のσ_xであればよいとも言える．

応用例題7.07　長さ200 mmで，横断面が10 mm×15 mmの長方形形状のS/S柱に15.0 kNの軸圧縮力が作用する．実際の力の作用点は中立軸から1 mmずれてしまった(図7.11の×印)．この柱は降伏するか．柱の材料のヤング率を70 GPa，降伏応力を120 MPa とする．

指針　σ_{cr}の値を求める代わりに，$\sigma_x=\frac{P}{A}$として**発展例題7.06**の解説5に挙げた不等式

$$\sigma_Y>\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)$$

が成り立つかどうかを調べる．

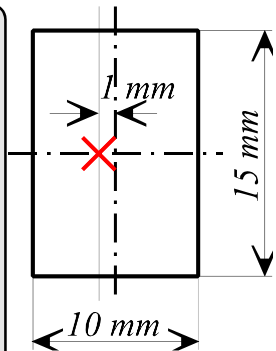


図7.11

解答　偏心量を無視した場合，柱の横断面積は$A=10\times15=150\ mm^2=150\times10^{-6}\ m^2$，最小の断面二次モーメントは

$$I=\frac{1}{12}\times 15\times 10^3=1250\ mm^4=1.25\times 10^{-9}\ m^4$$

であり，$l=0.2\ m$であるから，

$$\frac{l}{k}=l\sqrt{\frac{A}{I}}=0.2\times\sqrt{\frac{150\times 10^{-6}}{1.25\times 10^{-9}}}=69.28\,.$$

この値は，**基本例題7.02**からS/S柱に対するオイラー座屈荷重の公式の適用範囲$\dfrac{l}{k}>75.8$より小さいのでオイラーの座屈荷重の公式は適用されない．

次に，柱に発生している軸応力の大きさは

$$\sigma_x=\frac{P}{A}=\frac{15.0\times 10^3}{150\times 10^{-6}}=100.0\ MPa$$

であり，軸圧縮応力は降伏応力$\sigma_Y=120\ MPa$を超えないので，この柱は単純な軸圧縮では降伏しないことになる．

さて，偏心量の影響を調べるため，$\sigma_Y>\sigma_x\left(1+\dfrac{A}{Z}e\sec\dfrac{l}{2k}\sqrt{\dfrac{\sigma_x}{E}}\right)$が成り立つかどうかを確認する．断面係数は

$$Z=\frac{1.25\times 10^{-9}}{5\times 10^{-3}}=250\times 10^{-9}\ m^3$$

であり，$e=1$ mmであるから，

$$\frac{A}{Z}e=\frac{150\times 10^{-6}}{250\times 10^{-9}}\times 1\times 10^{-3}=0.6,\quad \frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}=\frac{69.28}{2}\times\sqrt{\frac{100.0\times 10^6}{70\times 10^9}}=1.309$$

となり，式の右辺は

$$\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)=100.0\times\left(1+0.6\times\frac{1}{\cos(1.309)}\right)=331.8\ MPa$$

となる．この値は降伏応力$\sigma_Y=120\ MPa$より大きいので，この柱は降伏すると考えられる．■

応用例題7.08　応用例題7.07の柱について，σ_xが変わらないとして，$\sigma_Y>\sigma_{x\max}$となるような偏心量eの限界を求めよ．

解答　条件$\sigma_Y>\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\dfrac{A}{Z}e\sec\dfrac{l}{2k}\sqrt{\dfrac{\sigma_x}{E}}\right)$から

$$\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}} < \frac{\sigma_Y}{\sigma_x}-1=\frac{120\times 10^6}{100\times 10^6}-1=0.2$$

これから，

$$\frac{A}{Z}e < 0.2\times\cos\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}=0.2\times\cos(1.309)=0.05176$$

となるから，許容される偏心量は

$$e<0.05176\times\frac{Z}{A}=0.05176\times\frac{250\times 10^{-9}}{150\times 10^{-6}}=0.0862\times 10^{-3}\ m$$

すなわち，許容されるeの値は$e<0.086$ mmである．■

解説1：この結果から，僅かの偏心量でも注意が必要であることがわかる．

解説2：$e=1$ mmのままで柱一本あたりの軸圧縮荷重が$P=7.5$ kNであれば，$\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)=99.9\ MPa$となり，降伏応力を超えない．つまり，柱の本数を増やして一本あたりの軸圧縮荷重を小さくする必要がある．そうでなければ，偏心量を小さくするか柱を太くする必要があるが，後者の場合，断面積以外に断面二次モーメントや断面係数に影響を与えるので，横断面の再設計になる．

応用例題7.09 図7.12のように上端が水平方向に移動できる柱に軸圧縮荷重が作用する．この柱の座屈荷重を求めよ．ただし，上下端のたわみ角はゼロである．

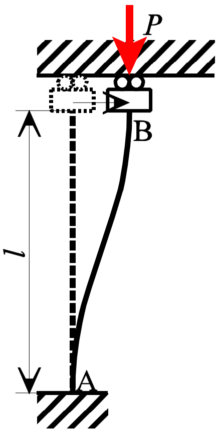


図7.12

解答 上下端が固定端になっているが，上端が水平方向に移動可能である．この柱の座屈後の形状は図7.12のように$x=l/2$の位置について反対称である．それゆえ，**基本例題7.01**のように，C/F柱を二本つないだものと同じと考えることができるので，座屈荷重はC/F柱の座屈荷重の式でlを$l/2$に置き換えて

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

■

発展例題7.10 応用例題7.09の座屈荷重の式を，たわみの方程式から導け．

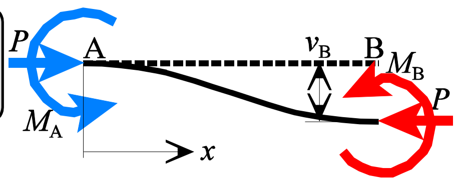


図7.13

解答 系全体のフリーボディダイヤグラムは図7.13のように考える．ここで，上端のたわみをv_Bとし上端にはそこでのたわみ角をゼロにするようなモーメントM_Bが作用しているものとする．このときモーメントのつりあいは$M_A+M_B-Pv_B=0$であるから，固定端Aでの固定モーメントは

$$M_A=-M_B+Pv_B$$

となる．曲げモーメントは，局所系のつり合い$M_A-Pv+M=0$から

$$M=Pv-M_A=Pv+M_B-Pv_B$$

となり，たわみの方程式は

$$\frac{dv^2}{dx^2}=-\frac{1}{EI}M=-\frac{1}{EI}\left(Pv-Pv_B+M_B\right)\rightarrow\quad \boxed{\frac{dv^2}{dx^2}+\frac{P}{EI}v=\frac{P}{EI}v_B-\frac{M_B}{EI}}$$

となる．$\alpha^2=P/EI$とすると，たわみ関数

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+v_B-\frac{M_B}{P}$$

が得られる．

$x=0$で$v=0$から$A=-v_B+\frac{M_B}{P}$，$x=l$で$v=v_B$から$B=\dfrac{v_B\cos\alpha l+\frac{M_B}{P}(1-\cos\alpha l)}{\sin\alpha l}$が得られる．$x=0$で$\frac{dv}{dx}=0$から$B=0$．ゆえに，

$$v_B\cos\alpha l+\frac{M_B}{P}(1-\cos\alpha l)=0 \rightarrow \quad \boxed{\frac{M_B}{P}=-\frac{\cos\alpha l}{1-\cos\alpha l}v_B}$$

ゆえに，たわみ関数は

$$v=\left(v_B-\frac{M_B}{P}\right)(1-\cos\alpha x)=\frac{1-\cos\alpha x}{1-\cos\alpha l}v_B.$$

$x=l$で$\dfrac{dv}{dx}=0$から固有値αが満足すべき方程式は

$$\frac{v_B\alpha\sin\alpha l}{1-\cos\alpha l}=0$$

として得られる．この方程式で$v_B\neq0$，$\alpha\neq0$であり，分母の$1-\cos\alpha l$も無限大にならないから，固有値αが満足すべき方程式は

$$\boxed{\sin\alpha l=0}$$

となる．これを満たすα_{cr}は$\alpha_{cr}l=n\pi$である．ただし，$n=1,2\cdots$．$n=1$のとき最小値$\alpha_{cr}l=\pi$となり，このときのPをP_{cr}で表すと，

$$\boxed{P_{cr}=EI\alpha_{cr}^2=\frac{\pi^2EI}{l^2}}$$

である．この場合のP_{cr}はS/S柱の場合と同じである．■

> 解説1：$\alpha_{cr}l=\pi$なので$\cos\alpha_{cr}l=-1$となり，固有関数は$\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\left(\pi\dfrac{x}{l}\right)\right)$である．

> **発展例題7.11** 軸圧縮荷重Pを受けるS/S柱の途中に横荷重Qが作用している．このシステムの座屈荷重を求めよ．

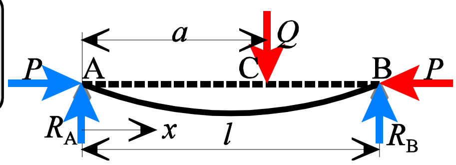


図7.14

解答 この問題のフリーボディダイヤグラムは図7.14である．A，Bでの反力をR_A，R_Bで表すと，曲げモーメントの式は，点Aから右にx座標をとると，

AC間：　$M_{AC}=Pv_{AC}+R_Ax$

CB間：　$M_{CB}=Pv_{CB}+R_Ax-Q(x-a)$

であるから，たわみ方程式は，$\alpha^2=P/EI$として，

AC間：　$$\frac{d^2v_{AC}}{dx^2}=-\frac{M_{AC}}{EI}=-\frac{1}{EI}(Pv_{AC}+R_Ax) \quad\rightarrow\quad \frac{d^2v_{AC}}{dx^2}+\alpha^2v_{AC}=-\frac{1}{EI}R_Ax$$

CB間：　$$\frac{d^2v_{CB}}{dx^2}=-\frac{M_{CB}}{EI}=-\frac{1}{EI}(Pv_{CB}+R_Ax-Q(x-a)) \quad\rightarrow\quad \frac{d^2v_{CB}}{dx^2}+\alpha^2v_{CB}=-\frac{1}{EI}(R_Ax-Q(x-a))$$

である．これらの式から，

AC間：　$$v_{AC}=A_1\cos\alpha x+B_1\sin\alpha x-\frac{1}{\alpha^2EI}R_Ax$$

CB間: $v_{CB}=A_2\cos\alpha x+B_2\sin\alpha x-\dfrac{1}{\alpha^2EI}(R_Ax-Q(x-a))$

である. 境界条件は,

$x=0$で　$v_{AC}=0$　(A)

$x=l$で　$v_{CB}=0$　(B)

$x=a$で　$v_{AC}=v_{CB}$, $\theta_{AC}=\theta_{CB}$　(C), (D)

である. ここで, θはたわみ角で$\theta=\dfrac{dv}{dx}$である.

条件(A)から$A_1=0$. 条件(B)から

$$A_2\cos\alpha l+B_2\sin\alpha l=\frac{1}{\alpha^2EI}(R_Al-Q(l-a))$$

となるが, 点Bまわりの横荷重のモーメントのつり合いから$R_Al-Q(l-a)=0$であるので, 条件(B)から

$$A_2\cos\alpha l+B_2\sin\alpha l=0$$

条件(C)から

$$B_1\sin\alpha a-A_2\cos\alpha a-B_2\sin\alpha a=0$$

条件(D)から

$$B_1\alpha\cos\alpha a+A_2\alpha\sin\alpha a-B_2\alpha\cos\alpha a=\frac{1}{\alpha^2EI}Q$$

が得られる. これらから, 各係数は$\alpha^2EI=P$として

$$B_1=\frac{Q}{P}\frac{\sin\alpha(l-a)}{\alpha\sin\alpha l},\ A_2=\frac{Q}{P}\frac{\sin\alpha a}{\alpha},\ B_2=-\frac{Q}{P}\frac{\cos\alpha l\cdot\sin\alpha a}{\alpha\sin\alpha l}$$

となり, 各区間でのたわみ関数は

AC間: $v_{AC}=\dfrac{Q}{P}\dfrac{\sin\alpha(l-a)}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha x-\dfrac{Q}{P}\dfrac{l-a}{l}x$

CB間: $v_{CB}=\dfrac{Q}{P}\dfrac{\sin\alpha a}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha(l-x)-\dfrac{Q}{P}\dfrac{a}{l}(l-x)$

となる.

さて, 座屈荷重を求めるにあたり, **発展例題7.08**の解説２で触れたような「たわみが無限大になって構造部材として機能していない」状態を座屈と考えると, 固有値αが満足すべき方程式は

$$\boxed{\sin\alpha l=0}$$

となる. これを満たすα_{cr}は$\alpha_{cr}l=n\pi$である. ただし, $n=1,2\cdots$. $n=1$のとき最小値$\alpha_{cr}l=\pi$となり, このときのPをP_{cr}で表すと,

$$\boxed{P_{cr}=EI\alpha_{cr}^2=\frac{\pi^2EI}{l^2}}$$

である. ■

解説1:この例題のたわみ方程式の解で，v_{CB}を

CB間:　　$v_{CB}=A_2\cos\alpha(x-a)+B_2\sin\alpha(x-a)-\dfrac{1}{\alpha^2 EI}(R_A x-Q(x-a))$

とおいてもよい．この場合，

$$B_1=\frac{Q}{P}\frac{\sin\alpha(l-a)}{\alpha\sin\alpha l},\ A_2=\frac{Q}{P}\frac{\sin\alpha a\cdot\sin\alpha(l-a)}{\alpha\sin\alpha l},\ B_2=-\frac{Q}{P}\frac{\sin\alpha a\cdot\cos\alpha(l-a)}{\alpha\sin\alpha l}$$

となる．これらを用いて整理すると，同じ答えが得られる．

解説2:この結果はS/S柱の座屈荷重に等しい．このことは，横荷重が同時に作用した場合でも，柱の座屈荷重は横荷重に無関係であることを示している．

解説3:横荷重の負荷位置がスパン中央のとき，つまり$a=\dfrac{l}{2}$のとき，たわみ関数は，$\beta=\dfrac{1}{2}\alpha l$として

AC間:　　$v_{AC}=\dfrac{Q}{P}\dfrac{\sin\beta}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha x-\dfrac{Q}{P}\dfrac{1}{2}x=\dfrac{Q}{P}\dfrac{\sin\alpha x}{2\alpha\cos\beta}-\dfrac{Q}{P}\dfrac{1}{2}x$

CB間:　　$v_{CB}=\dfrac{Q}{P}\dfrac{\sin\beta}{\alpha\sin\alpha l}\sin\alpha(l-x)-\dfrac{Q}{P}\dfrac{1}{2}(l-x)=\dfrac{Q}{P}\dfrac{\sin\alpha(l-x)}{2\alpha\cos\beta}-\dfrac{Q}{P}\dfrac{1}{2}(l-x)$

となる．v_{CB}の式で$l-x=x_1$とすると，v_{AC}の式のxをx_1で置き換えた式になる．xとx_1は互いに逆向きに取られているので，たわみ形状はスパン中央について対称になっている．また，この場合固有値αが満足すべき方程式は$\cos\beta=\cos\dfrac{1}{2}\alpha l=0$になり，これを満たす$\alpha_{cr}l$は$\alpha_{cr}l=(2n-1)\pi$(ただし，$n=1,2\cdots$)であり，$n=1$のとき$\alpha_{cr}l=\pi$である．

発展例題7.12　発展例題7.11で，横荷重Qの負荷位置がスパン中央のとき，たわみ関数，最大たわみと最大曲げモーメントを求め，最大たわみと最大曲げモーメントを$P=0$の場合(集中荷重を受ける両端支持はり)と比較せよ．

解答　荷重負荷位置がスパン中央であるので，**発展例題7.11**の解説2からAC間のみの式を考えればよい．たわみ関数

$$v_{AC}=\frac{Q}{P}\frac{\sin\alpha x}{2\alpha\cos\beta}-\frac{Q}{P}\frac{1}{2}x$$

において，$P=\alpha^2 EI$を代入すると，たわみ関数は

$$v_{AC}=\frac{Q}{2\alpha^2 EI}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha\cos\beta}-x\right)$$

である．

最大たわみ$v_{\max}$はスパン中央で生ずるから，$x=\dfrac{l}{2}$を代入すると

$$v_{\max}=\frac{Ql^3}{16EI}\frac{1}{\beta^3}(\tan\beta-\beta).$$

となる．さらに，$\tan\beta=\beta+\dfrac{1}{3}\beta^3+\dfrac{2}{15}\beta^5+\cdots$を使って第三項目までとると，

$$v_{\max} \approx \frac{Ql^3}{48EI}\left(1+\frac{2}{5}\beta^2\right)$$

となる．スパン中央に集中荷重Qを受ける長さlの両端単純支持はりの中央たわみは$\dfrac{Ql^3}{48EI}$であるから，軸圧縮荷重と横荷重が同時に作用するはりのたわみは軸圧縮荷重のない場合に比べて大きいことがわかる．

最大曲げモーメント$M_{\max}$は$x=\dfrac{l}{2}$で生ずる．**発展例題7.11**の曲げモーメントの式でv_{AC}を$v_{\max}$に置き換えると

$$M_{\max}=Pv_{\max}+\frac{1}{4}Ql \quad \rightarrow \quad M_{\max}=\alpha^2 EIv_{\max}+\frac{1}{4}Ql=4\frac{k^2}{l^2}EIv_{\max}+\frac{1}{4}Ql$$

この式から最大曲げモーメントは

$$M_{\max}=\frac{1}{4}Ql\frac{\tan\beta}{\beta}$$

となる．さらに近似を使うと，

$$M_{\max} \approx \frac{1}{4}Ql\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)$$

スパン中央に集中荷重Qを受ける長さlの両端単純支持はりの最大曲げモーメントは$\dfrac{1}{4}Ql$であるから，軸圧縮荷重と横荷重が同時に作用するはりの曲げモーメントは軸圧縮荷重のない場合に比べて大きいことがわかる．■

解説1：ここで$\tan\beta$の近似式を使ったのは軸圧縮荷重がたわみや曲げモーメントに及ぼす影響を調べるためであることに注意しよう．また，近似式を使って得られた式はβが小さい場合にのみ成り立つことにも注意しよう．

解説2：$v_{\max}$と$M_{\max}$の式には$\tan\beta$を含んでいる．もし，$\beta=\dfrac{\pi}{2}$なら$\tan\beta=\infty$となり，このときのαの値は$\alpha=2\dfrac{k}{l}=\dfrac{\pi}{l}$，すなわち，$\alpha l=\pi$である．この値は，**発展例題7.11**で求めたαlの値と同じである．

解説3：$\beta^2=\dfrac{1}{4}\alpha^2 l^2=\dfrac{1}{4}\dfrac{Pl^2}{EI}$と書ける．一方，座屈荷重$P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$から$\dfrac{l^2}{EI}=\dfrac{\pi^2}{P_{cr}}$と書けるので，$\beta^2=\dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{P}{P_{cr}}$と書ける．これを用いると，$v_{\max}$と$M_{\max}$の近似式は

$$v_{\max} \approx \frac{Ql^3}{48EI}\left(1+\frac{\pi^2}{10}\frac{P}{P_{cr}}\right),\quad M_{\max} \approx \frac{1}{4}Ql\left(1+\frac{\pi^2}{12}\frac{P}{P_{cr}}\right)$$

とそれぞれ書くことができる．解説1でも触れたが，これらの式は$P \ll P_{cr}$でなければ使えない．

解説4：荷重Pの向きが逆になって引張荷重になったとき，Pを$-P$に置き換えればよい．このとき，最大たわみと最大曲げモーメントは次式で表される．

$$v_{\max}=\frac{Ql^3}{16EI}\frac{1}{\beta^3}(\tanh\beta-\beta),\quad M_{\max}=\frac{1}{4}Ql\frac{\tanh\beta}{\beta}$$

$P \ll P_{cr}$の際の近似式は

$$v_{\max} \approx \frac{Ql^3}{48EI}\left(1-\frac{\pi^2}{10}\frac{P}{P_{cr}}\right),\quad M_{\max} \approx \frac{1}{4}Ql\left(1-\frac{\pi^2}{12}\frac{P}{P_{cr}}\right)$$

となる．

発展例題7.13　図7.15のように軸圧縮荷重Pを受けるS/S柱の両端に外力のモーメントM_AとM_Bが作用している．このシステムのたわみ関数を求めよ．

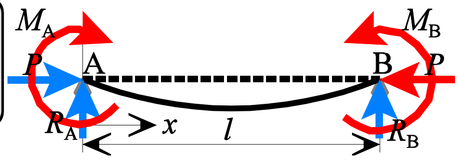


図7.15

解答　曲げモーメントは

$$M=Pv+M_A+R_Ax=Pv+\frac{M_A}{l}(l-x)+\frac{M_B}{l}x$$

である．ここでは**基本例題4.22**から$R_A=-\dfrac{M_A-M_B}{l}$を用いた．

たわみ方程式は，$\alpha^2=P/EI$として，

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2v=-\frac{\alpha^2}{Pl}[M_A(l-x)+M_Bx]$$

である．この方程式の解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x-\frac{1}{Pl}[M_A(l-x)+M_Bx]$$

である．$x=0$で$v=0$から$A=\dfrac{M_A}{P}$．$x=l$で$v=0$から$B=-\dfrac{1}{P}\dfrac{M_A\cos\alpha l-M_B}{\sin\alpha l}$となるから，たわみ関数は

$$v=\frac{M_A}{P}\left(\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}-\frac{l-x}{l}\right)+\frac{M_B}{P}\left(\frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha l}-\frac{x}{l}\right)$$

である．■

解説：この例題の解答で，$M_A=M_B=Pe$とおくと**発展例題7.06**の答えと同じ式が得られる．

発展例題7.14　S/S柱に単位長さあたりq N/mの等分布荷重が作用している．このシステムのたわみ関数を求めよ．

解答　曲げモーメントは

$$M=Pv+\frac{q}{2}lx-\frac{q}{2}x^2$$

であるので，たわみ方程式は，$\alpha^2=P/EI$として，

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2v=-\frac{q}{2}\frac{\alpha^2}{P}(lx-x^2)$$

である．この方程式の解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x-\frac{q}{2P}\left(lx-x^2+\frac{2}{\alpha^2}\right)$$

である．$x=0$で$v=0$から$A=\dfrac{q}{2P}\dfrac{2}{\alpha^2}$．$x=l$で$v=0$から$B=-\dfrac{q}{2P}\dfrac{2}{\alpha^2}\dfrac{1-\cos\alpha l}{\sin\alpha l}$となるから，たわみ関数は

$$v=\frac{q}{2P}\frac{2}{\alpha^2}\cos\alpha x-\frac{q}{2P}\frac{2}{\alpha^2}\frac{1-\cos\alpha l}{\sin\alpha l}\sin\alpha x-\frac{q}{2P}\left(lx-x^2+\frac{2}{\alpha^2}\right)$$

となり，さらに整理すると

$$v=\frac{q}{2P}\frac{4}{\alpha^2}\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha x\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha(l-x)}{\cos\frac{1}{2}\alpha l}-\frac{q}{2P}x(l-x)$$

である．■

発展例題7.15　図7.16のような軸圧縮荷重Pと単位長さあたり$q(x)$の分布荷重が同時に作用する場合のたわみの微分方程式を求めよ．曲げ剛性$EI(x)$はxの関数とする．

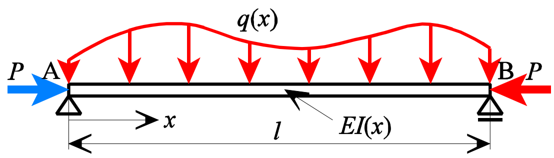


図7.16

解答　いま，軸圧縮荷重と分布荷重をうける柱の任意点でのたわみをvで表す．このとき，曲げモーメントMはたわみと軸圧縮荷重が作るモーメントPvと横荷重によるモーメントM_qとの和であるから，

$$M=Pv+M_q$$

である．たわみの微分方程式は，曲げ剛性がxの関数であるので，教科書p.73の式(6.2)を少し書き直して，

$$EI(x)\frac{d^2v}{dx^2}=-M$$

と書くことができる．分布荷重と曲げモーメントの関係は，教科書p.64の式(5.2)から，

$$\frac{d^2M_q}{dx^2}=-q(x)$$

と書ける．

たわみの微分方程式をxで二回微分すると，

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2v}{dx^2}\right]=-\frac{d^2M}{dx^2}$$

となり，曲げモーメントの二回微分は

$$\frac{d^2M}{dx^2}=P\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2M_q}{dx^2}=P\frac{d^2v}{dx^2}-q(x)$$

であるから，この式をたわみの微分方程式に代入すると，

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2v}{dx^2}\right]+P\frac{d^2v}{dx^2}=q(x)$$

となる．この式が横荷重として分布荷重が作用する場合のたわみの微分方程式である．■

解説：この例題の解答で，曲げモーメントの式が$M=Pv+M_q$で表されているが，点Aでの分布荷重の反力R_Aを考慮すると$M=Pv+M_q+R_Ax$となるが，この式をxで二回微分すると，R_Axの項が消える．このため，最初から曲げモーメントの式にR_Axの項を含めていない．

発展例題7.16　**発展例題7.15**で，曲げ剛性が全体にわたって一定値EIで，$q(x)=q_0\sin\frac{n\pi x}{l}$のときの座屈荷重を求めよ．$n=1,2,\cdots$である．

解答　たわみの微分方程式は，

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{P}{EI}v\right]=\frac{q_0}{EI}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

と書ける．特解v_1は

$$v_1=\frac{q_0}{EI}\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-\frac{P}{EI}\right]}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

で表される．

境界条件は，

$x=0,l$で$v=0$

$x=0,l$で$\dfrac{d^2v}{dx^2}=0$（この式は，両端が回転支点なので曲げモーメントがゼロであるという条件から出る）

あるが，特解v_1はこれらの条件を満足するので，特解v_1は微分方程式の解vそのものであることがわかる．

座屈荷重は，**発展例題7.06**の解説で述べたように，**たわみが無限大になって構造部材として機能しなくなる**状態を座屈として定義すると，特解v_1の式から

$$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-\frac{P_{cr}}{EI}=0$$

すなわち，座屈荷重は

$$P_{cr}=n^2\frac{\pi^2EI}{l^2}$$

である．■

発展例題7.17　発展例題7.16の横部材を単位長さあたりのバネ定数k_s N/m/mの弾性床(Elastic Foundation)上に設置した．このときの，座屈荷重を求めよ．部材と弾性床は常に密着している．

解答　単位長さあたりのバネ定数k_sの弾性床から受ける横部材が受ける力は，単位長さあたりk_svであり，上向きの力になるので，たわみの微分方程式は，**発展例題7.15**の$q(x)$を$q(x)-k_sv$に置き換えると，

$$\frac{d^4v}{dx^4}+\frac{P}{EI}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{k_s}{EI}v=\frac{q_0}{EI}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

と書ける．特解v_1は

$$v_1=\frac{q_0}{EI}\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\frac{P}{EI}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\frac{k_s}{EI}}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

で表される．

境界条件は**発展例題7.16**と同じである．特解v_1はこれらの条件を満足するので，特解v_1は微分方程式の解vそのものであることがわかる．

座屈荷重は，**発展例題7.16**と同じように考えて

$$P_{cr}=\frac{(n\pi/l)^4EI+k_s}{(n\pi/l)^2}$$

である．

特に，$\dfrac{k_s}{EI}=\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{P}{EI}\right)^2$を満たすとき，座屈荷重は

$$\frac{1}{4}\left(\frac{P}{EI}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\frac{P}{EI}+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4=0$$

から決めることができて，

$$P_{cr}=2n^2\frac{\pi^2EI}{l^2}$$

となる．■

発展例題7.18 図7.17のように，曲げ剛性がEI_1とEI_2で長さがl_1とl_2の二本の柱を接続して一本のC/F柱を作った．この柱の座屈荷重を求めよ．

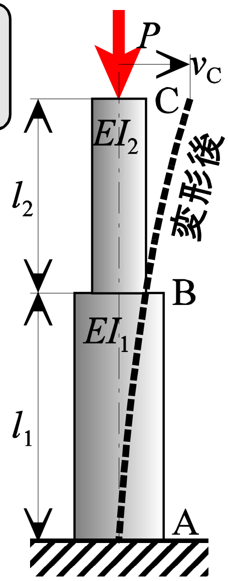


図7.17

解答 固定端から上方にx座標をとると，曲げモーメントは柱全体で

$$M=-Pv_C+Pv$$

である．$\alpha_1^2=\dfrac{P}{EI_1}$，$\alpha_2^2=\dfrac{P}{EI_2}$とすると，たわみの方程式は

AB間： $$\frac{dv_{AB}^2}{dx^2}+\alpha_1^2v_{AB}=\alpha_1^2v_C$$

BC間： $$\frac{dv_{BC}^2}{dx^2}+\alpha_2^2v_{BC}=\alpha_2^2v_C$$

となる．たわみ関数は

AB間： $v_{AB}=A_1\cos\alpha_1x+B_1\sin\alpha_1x+v_C$

BC間： $v_{BC}=A_2\cos\alpha_2(x-l_1)+B_2\sin\alpha_2(x-l_1)+v_C$

である．境界条件は，

$x=0$で	$v_{AB}=0$，$\theta_{AB}=0$	(A), (B)
$x=l_1+l_2$で	$v_{BC}=v_C$	(C)
$x=l_1$で	$v_{AB}=v_{BC}$，$\theta_{AB}=\theta_{BC}$	(D), (E)

である．ここで，θはたわみ角で$\theta=\dfrac{dv}{dx}$である．

条件(A)から， $A_1=-v_C$

条件(B)から， $B_1=0$

条件(C)から， $A_2\cos\alpha_2l_2+B_2\sin\alpha_2l_2=0$

条件(D)から， $v_C(1-\cos\alpha_1l_1)-A_2-v_C=0 \quad\rightarrow\quad A_2=-v_C\cos\alpha_1l_1$

条件(E)から， $-A_1\alpha_1\sin\alpha_1l_1-B_2\alpha_2=0 \quad\rightarrow\quad B_2=v_C\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\sin\alpha_1l_1$

となる．条件(C)から得られる式にA_2，B_2の値を代入し，$v_C\neq0$を考慮すると，α_1とα_2が満足しなければならない方程式として

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-\tan\alpha_1l_1\cdot\tan\alpha_2l_2=0$$

が得られる．この式から固有値を求めることができる．固有値が求められれば，系の座屈荷重は，固有値としてα_1を用いるなら

$$P_{cr}=\alpha_1^2 EI_1$$

から定まる．■

解説1：α_1とα_2は独立ではない．ヤング率が等しいなら，α_1とα_2の定義から$\alpha_1\sqrt{I_1}=\alpha_2\sqrt{I_2}$である．それゆえ，

$\alpha_2=\alpha_1\sqrt{\dfrac{I_1}{I_2}}$と標記することができるので，固有値を求める方程式は

$$\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}-\tan\alpha_1 l_1\cdot\tan\alpha_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}l_2=0$$

と書き直すことができる．さらに，$k=\sqrt{\dfrac{I_1}{I_2}}\dfrac{l_2}{l_1}$とすると

$$\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}-\tan\alpha_1 l_1\cdot\tan k\alpha_1 l_1=0$$

となる．kの値は，それぞれの長さと断面二次モーメントがわかっていれば定数なので，$\alpha_1 l_1$を求めればよいことになる．

解説2：固有関数は，固有値方程式を満たすα_1，α_2をα_{1cr}，α_{2cr}で表すと，

$$\frac{v_{AB}}{v_C}=1-\cos\alpha_{1cr}x$$

$$\frac{v_{BC}}{v_C}=1-\cos\alpha_{1cr}l_1\cdot\cos\alpha_{2cr}(x-l_1)+\frac{\alpha_{1cr}}{\alpha_{2cr}}\sin\alpha_{1cr}l_1\cdot\sin\alpha_{2cr}(x-l_1)$$

である．

発展例題7.19　初期たわみが$v_0=c\sin\pi\dfrac{x}{l}$で表されるS/S柱に軸圧縮荷重Pが作用する．このときのたわみ関数を求めよ．ただし，cは小さいものとする．

解答　曲げモーメントは

$$M=P(v+v_0)$$

であるので，たわみ方程式は，$\alpha^2=P/EI$として，

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=-\alpha^2 c\sin\pi\frac{x}{l}$$

である．この方程式の解は$\alpha\neq\dfrac{\pi}{l}$として

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\frac{c}{(\pi/\alpha l)^2-1}\sin\pi\frac{x}{l}$$

である．$x=0$ で $v=0$ から $A=0$．$x=l$ で $v=0$ から $B=0$ であるから，

$$v=\frac{c}{(\pi/\alpha l)^2-1}\sin\pi\frac{x}{l}$$

最終的なたわみ関数は初期たわみを加えればよいから，

$$v+v_0=\frac{c}{1-Pl^2/\pi^2 EI}\sin\pi\frac{x}{l}$$

である．■

発展例題7.20　発展例題7.19の柱に発生する最大応力の式を求めよ．

解答　発生する応力は軸圧縮荷重による軸応力と曲げ応力である．最大曲げモーメントは $x=\frac{l}{2}$ で生ずるから，最大応力 $\sigma_{x\max}$ は，$\sigma_x=\frac{P}{A}$ として

$$\sigma_{x\max}=\frac{P}{A}+\frac{M_{\max}}{Z}$$

から

$$\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}c\frac{1}{1-\sigma_x l^2/\pi^2 k^2 E}\right)$$

である．■

解説1：実は，この答えは少し面白い．いま，$\sigma_Y=\sigma_{x\max}$ となるとき柱は降伏すると考えると，降伏条件は

$$\sigma_Y=\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}c\frac{1}{1-\sigma_x l^2/\pi^2 k^2 E}\right) \qquad \text{(A)}$$

である．さて，**発展例題7.07**では偏心量 e がある場合で，その降伏条件は

$$\sigma_Y=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)$$

である．さて，三角関数の級数展開から x が小さいとして

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}\approx\frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2}$$

と近似すると，

$$\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\approx\frac{1}{1-\sigma_x l^2/8k^2 E}$$

となるから，

$$\sigma_Y=\sigma_{x\max}\approx\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\frac{1}{1-\sigma_x l^2/8k^2 E}\right)$$

この式は上に挙げた式(A)とよく似ていることに気付く．つまり，軸圧縮荷重をうける柱に与える初期たわみの効果と偏心の効果はよく似ている．

応用例題7.21　**発展例題7.06**の解説5に挙げた降伏条件式$\sigma_Y=\sigma_{xmax}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)$と**発展例題7.20**の解説1に挙げた降伏条件式$\sigma_Y=\sigma_{xmax}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}c\frac{1}{1-\sigma_x l^2/\pi^2k^2E}\right)$とを種々の$\sigma_x$について比較せよ．柱の寸法や物性値などは**応用例題7.07**と同じであるが，$e=c=0.5$ mmとする．

解答　$l=200$ mm,

$$I=\frac{1}{12}15\times10^{-3}\times(10\times10^{-3})^3=1.25\times10^{-9}\ m^4,$$

$$A=0.01\times0.015=150\times10^{-6}\ m^2$$

であるので，

$$\frac{l}{k}=l\sqrt{\frac{A}{I}}=0.2\times\sqrt{\frac{150\times10^{-6}}{1.25\times10^{-9}}}=69.28.$$

$$Z=\frac{1}{6}\times0.015\times0.01^2=250\times10^{-9}\ m^3$$

であるので，

$$\frac{A}{Z}e=\frac{A}{Z}c=\frac{150\times10^{-6}}{250\times10^{-9}}\times0.5\times10^{-3}=0.3.$$

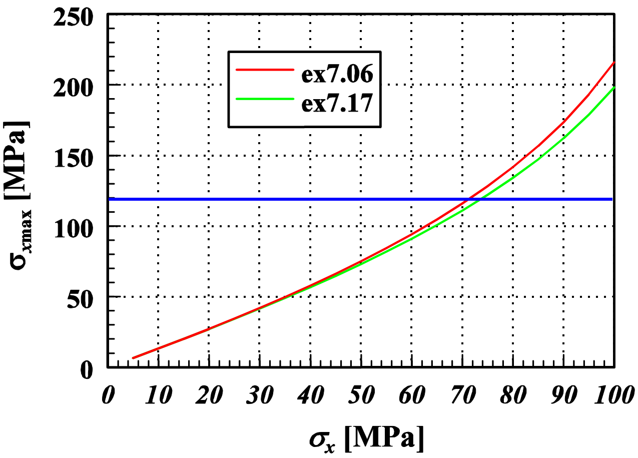


図7.18

以上の数値を使って種々のσ_xに対してσ_{xmax}を計算した結果は図7.18のようである．ここでex7.06は**発展例題7.06**の式，ex7.17は**発展例題7.17**の式を使って計算したグラフである．この図で青い横線は降伏応力σ_Yを表している．■

解説1：$e=c$のとき，偏心のある柱のほうが初期たわみのある場合よりわずかに低い軸応力σ_xで降伏応力σ_Yに達することがわかる．

発展例題7.22　図7.19のような三支点はりの両端に軸圧縮荷重Pが作用するときの座屈荷重を決めるための固有値方程式を導け．曲げ剛性をEIとする．

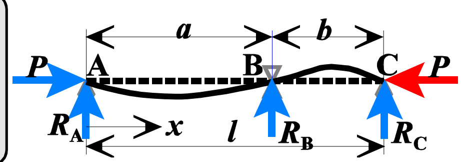


図7.19

解答　支点A, B, Cでの反力をR_A，R_B，R_Cで表す．たわみをvとすると，曲げモーメントの式は

AB間：　$M_{AC}=Pv+R_Ax$

BC間：　$M_{AC}=Pv+R_Ax+R_B(x-a)$

であるから，たわみの方程式は$\alpha^2=\frac{P}{EI}$として

AB間：　$$\frac{d^2v_{AB}}{dx^2}+\alpha^2v_{AB}=-\frac{1}{EI}R_Ax$$

BC間：　$$\frac{d^2v_{BC}}{dx^2}+\alpha^2v_{BC}=-\frac{1}{EI}R_Ax-\frac{1}{EI}R_B(x-a)$$

となる．これらの方程式を解くと各区間でのたわみ関数は

AB間：　$v_{AB}=A_1\cos\alpha x+B_1\sin\alpha x-\dfrac{R_A}{P}x$

BC間：　$v_{BC}=A_2\cos\alpha(x-a)+B_2\sin\alpha(x-a)-\dfrac{R_A}{P}x-\dfrac{R_B}{P}(x-a)$

境界条件は次のとおりである．

$x=0$ で	$v_{AB}=0$	(A)
$x=a$ で	$v_{AB}=0$，$v_{BC}=0$，$\theta_{AB}=\theta_{BC}$	(B)
$x=l=a+b$ で	$v_{BC}=0$	(C)

条件(A)から　$A_1=0$

条件(B)から　$B_1=\dfrac{R_A}{P}\dfrac{a}{\sin\alpha a}$，$A_2=\dfrac{R_A}{P}a$，$B_2=\dfrac{R_A}{P}a\dfrac{\cos\alpha a}{\sin\alpha a}+\dfrac{R_B}{P}\dfrac{1}{\alpha}$

さらに，モーメントのつりあい $R_Al+R_Bb=0$ から $R_B=-\dfrac{l}{b}R_A$ を用いると，B_2 は

$$B_2=\frac{R_A}{P}a\frac{\cos\alpha a}{\sin\alpha a}-\frac{R_A}{P}\frac{l}{b}\frac{1}{\alpha}.$$

条件(C)から

$$A_2\cos\alpha b+B_2\sin\alpha b-\frac{1}{P}(R_Al+R_Bb)=0$$

となるが，モーメントのつりあいから

$$A_2\cos\alpha b+B_2\sin\alpha b=0$$

となる．以上から，固有値方程式は

$$\boxed{\alpha ab\sin\alpha(a+b)-(a+b)\sin\alpha a\cdot\sin\alpha b=0}$$

である．■

解説1：$a=b=\dfrac{l}{2}$のとき，座屈の固有値方程式は

$$\left(\frac{1}{2}\alpha l\cos\frac{1}{2}\alpha l-\sin\frac{1}{2}\alpha l\right)\sin\frac{1}{2}\alpha l=0$$

となる．この方程式は

$$\frac{1}{2}\alpha l\cos\frac{1}{2}\alpha l-\sin\frac{1}{2}\alpha l=0 \qquad \text{または} \qquad \sin\frac{1}{2}\alpha l=0$$

のいずれかを満たせばよい．前者は**発展例題7.05**の固有値方程式と同じであり，**後者は基本例題7.03**の場合と同じであるから，固有値は

$$\frac{1}{2}\alpha l=4.4934,\ \frac{1}{2}\alpha l=\pi$$

である．$\pi<4.4934$であるから$\dfrac{1}{2}\alpha_{cr}l=\pi$が解である．この固有値に対する座屈荷重は

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

である．この場合，座屈荷重は長さlのC/C柱または長さ$\dfrac{1}{2}l$のS/S柱の座屈荷重に等しい．

解説2：$a\neq b$のとき，座屈の固有値は$\pi<\alpha l<2\pi$である．

発展例題7.23　図7.20のようなC/F柱において，自由端の端面に常に垂直に外力が作用する柱の座屈荷重は，静力学的つり合い条件からは定まらないことを示せ．

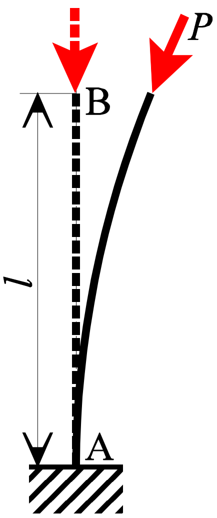


図7.20

解答　フリーボディダイヤグラムは図7.21のように描くことができる．

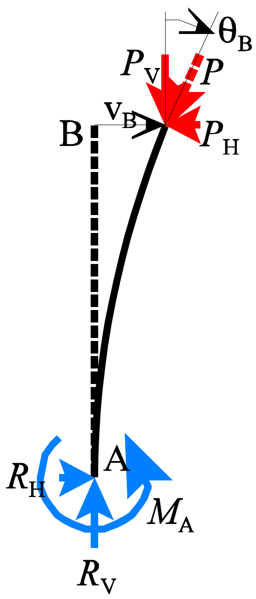


図7.21

自由端に作用する力Pはその水平成分$P_H=P\sin\theta_B$と垂直成分$P_V=P\cos\theta_B$とに分解でき，固定端ではそれらに対する反力が発生すると同時に，固定モーメントも生ずる．

曲げモーメントは，Aから上向きにx軸を取ると，

$$M=-M_A+R_V v-R_H x$$

である．ここで$M_A=P_V v_B-P_H l$，$R_H=P_H=P\sin\theta_B$，$R_V=P_V=P\cos\theta_B$であるので，曲げモーメントの式は

$$M=-P(v_B-v)\cos\theta_B+P(l-x)\sin\theta_B$$

となる．さらに，たわみ角が小さいとすると，$\cos\theta_B\approx 1$，$\sin\theta_B\approx\theta_B$と近似できるので，

$$M=-P(v_B-v)+P(l-x)\theta_B$$

で表される．

たわみの方程式の解は，$\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$として

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+v_B-(l-x)\theta_B$$

であり，境界条件は次のとおりである．

$$x=0\text{で} \qquad v=0,\ \frac{dv}{dx}=0 \qquad \text{(A), (B)}$$

$x=l$で　　$v=v_B$, $\dfrac{dv}{dx}=\theta_B$　　(C), (D)

条件式(A)から　　$A=-v_B+l\theta_B$

条件式(B)から　　$B=-\dfrac{\theta_B}{\alpha}$

条件式(C)から　　$(-v_B+l\theta_B)\cos\alpha l-\dfrac{\theta_B}{\alpha}\sin\alpha l=0$

条件式(D)から　　$\alpha(-v_B+l\theta_B)\sin\alpha l+\theta_B\cos\alpha l=0$

が得られる. 最後の二つの式がv_Bとθ_Bについて非自明解を持つためには

$$\sin^2\alpha l+\cos^2\alpha l=0$$

となるが, この条件は成立しない. ゆえに, $v_B=0$かつ$\theta_B=0$以外に解はないことがわかる. 一方, $v_B=0$かつ$\theta_B=0$は自由端Bにたわみもたわみ角を生じないということになり, 条件に矛盾する. ゆえに, この系の座屈荷重は静力学的に定まらない. ■

解説1:このような荷重条件は実際に起こる可能性がある. しかし, ここでみたように, オイラー座屈の手法を適用することが不適切な系になっている. このような, 荷重方向が自由端でのたわみ角に依存するような力を「従動力(follower force)」という. 従動力をうける柱や棒は非保存系(nonconservative system)と呼ばれる. 非保存系では, 外荷重のなす仕事は変形中の外荷重の経路に依存する.

解説2:この例題で考えた系の座屈荷重を求めるためには, 動的解析をする必要があることが知られている. 興味があれば調べてみてほしい.

基本例題7.24 長さl, 曲げ剛性EIのS/S柱全体にΔTの温度上昇を生じた. 座屈しない限界の温度変化ΔTを求める式を導け. 線膨張係数をα_tとする.

解答　温度上昇によって発生する内力は**基本例題2.12**から$N=-AE\alpha_t\Delta T$であり, 軸圧縮力の大きさは$AE\alpha_t\Delta T$である. この内力がS/S柱の座屈荷重に等しいとき座屈する. このときのΔTをΔT_{cr}とする.

S/S柱のオイラー座屈荷重は

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

であり, 温度上昇によって発生する内力がP_{cr}に等しいとすると,

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2}=AE\alpha_t\Delta T_{cr}$$

とおけるから, ΔT_{cr}は

$$\Delta T_{cr}=\frac{\pi^2 I}{\alpha_t l^2 A}=\frac{\pi^2}{\alpha_t}\left(\frac{k}{l}\right)^2. \text{ ここで, } k^2=\frac{I}{A}$$

となる. 柱全体の温度変化がこの式が表すΔT_{cr}に達するとオイラー座屈が生ずるので, 座屈しない限界の温度変化はこの式が表すΔT_{cr}未満でなければならない. ■

応用例題7.25　S/S柱の横断面の寸法が図7.2のようである．柱の長さl= 0.5 mのとき，座屈しない限界の温度変化ΔT_{cr}を求めよ．柱の材料のヤング率と降伏応力は70 GPaと120 MPa とし，線膨張係数はα_t=20×10^{-6} K^{-1}とする．**基本例題7.24**の答えの式を用いよ．

解答　S/S柱に対するオイラーの座屈荷重の公式は

$$\frac{l}{k}>\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}}=\pi\times\sqrt{\frac{70\times10^9}{120\times10^6}}=75.8$$

の条件を満たす柱に対して適用できる．この柱の場合，最小の断面二次モーメントは

$$I=\frac{1}{12}\times15\times10^3=1250\ mm^4=1.25\times10^{-9}\ m^4$$

であり，柱の横断面積は$A=10\times15=150\ mm^2=150\times10^{-6}\ m^2$である．これから，

$$\frac{l}{k}=l\sqrt{\frac{A}{I}}=0.5\times\sqrt{\frac{150\times10^{-6}}{1.25\times10^{-9}}}=173.2>75.8$$

であるから，オイラーの座屈荷重の公式が適用できるので，**基本例題7.24**の答えの式を適用すると，座屈しない限界の温度変化量は

$$\Delta T_{cr}=\frac{\pi^2}{\alpha_t}\left(\frac{k}{l}\right)^2=\frac{\pi^2}{20\times10^{-6}}\times\left(\frac{1}{173.2}\right)^2=16.4\ \mathrm{K}$$

である．■

基本例題7.26　図7.22に示す両端がバネ支持された軸圧縮荷重を受ける長柱の座屈荷重を求めよ．バネ定数をK_s，柱の曲げ剛性をEIとする．

指針　二つの不安定状態が考えられる．一つは左端が上方にδ移動し，右端が下方にδ移動する状態で，もう一つは柱自体が長柱の座屈状態になることである．

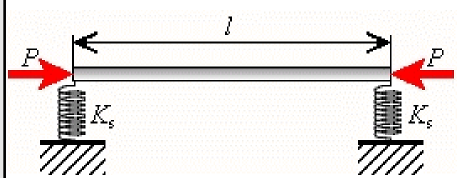


図7.22

解答　1．左端が上方にδ移動し，右端が下方にδ移動する状態を考える．このとき，フリーボディダイヤグラムは図7.23のような状態になっている．モーメントのつりあいは

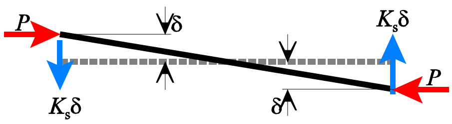


図7.23

$$2P\delta=K_s\delta l$$

が成り立つ．ゆえに，

$$P_{cr}=\frac{1}{2}K_s l$$

となる．

2．もう一つの状態はバネ定数K_sが非常に大きいときに生ずる．柱の両端は移動しないので，柱自体はS/S柱であるので，座屈荷重は

$$P_{cr}=\pi^2\frac{EI}{l^2}$$

である．

以上から，$K_s>2\pi^2\dfrac{EI}{l^3}$なら2．の座屈が生じ，$K_s<2\pi^2\dfrac{EI}{l^3}$なら1．の座屈が生ずる．■

解説：この例題の1．のように，柱自体は剛体のように傾斜するだけの座屈状態は「横倒れ座屈」と呼ばれる．

発展例題7.27　図7.24に示す両端がバネ支持された軸圧縮荷重を受ける長柱の座屈荷重を求めよ．バネ定数をK_s，柱の曲げ剛性をEIとする．

指針　三通りの不安定状態が考えられる．一つは横倒れ座屈であり，残りの二つは対称座屈（柱中央について変形状態が対称）と逆対称座屈（柱中央について変形状態が逆対称）である．

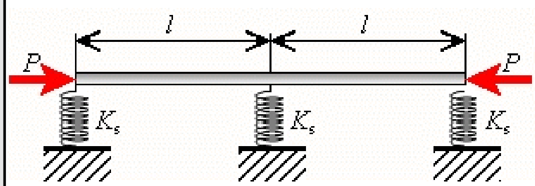


図7.24

解答　[**横倒れ座屈**]左端が上方にδ移動し，右端が下方にδ移動する状態である．フリーボディダイヤグラムは図7.23のようになるので，モーメントのつりあいは

$$2P\delta-2K_s\delta l=0$$

が成り立つ．ゆえに，

$$P_{cr}=K_s l$$

となる．

［**対称座屈**」左右両端がδ_1だけ同じ向きに移動し，中央が逆向きにδ_2だけ移動するものとする．このとき，フリーボディダイヤグラムは図7.25のようである．力のつりあいは

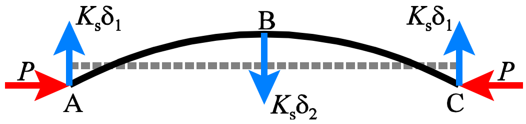


図7.25

$$2K_2\delta_1-K_s\delta_2=0$$

であるから，

$$\delta_2=2\delta_1.$$

左端から右にx軸をとると，曲げモーメントは

$$M_{AB}=-P(\delta_1-v)+K_s\delta_1 x$$

たわみの方程式は，$\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$として

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2v=\alpha^2\delta_1-\frac{K_s\delta_1}{EI}x$$

たわみ関数は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\delta_1-\frac{K_s\delta_1}{\alpha^2EI}x$$

境界条件は

$x=0$で　　$v=\delta_1$

$x=l$で　　$v=-\delta_2=-2\delta_1$，　　$\dfrac{dv}{dx}=0$

であるから，これらの条件をたわみ関数に適用すると，固有値方程式は

$$\tan\alpha l-\alpha l+3(\alpha l)^3\frac{EI}{K_s l^3}=0$$

となる．固有値方程式を満足する最小のαをα_{cr}とすると，座屈荷重は次式から計算できる．

$$P_{cr}=\alpha_{cr}^2 EI$$

[逆対称座屈]図7.26のような変形状態になる．この場合，長さlのS/S柱のオイラー座屈と同じであるので，座屈荷重は

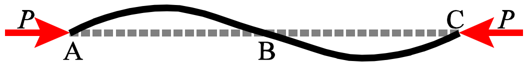


図7.26

$$P_{cr}=\pi^2\frac{EI}{l^2}$$

である．■

解説：$K_s l$，$\alpha_{cr}^2 EI$，$\pi^2\frac{EI}{l^2}$の大小関係によってどの形式の座屈が生ずるかが決まる．

発展問題7.28　発展問題7.27の逆対称座屈において，図7.27のフリーボディダイヤグラムに示すような座屈は生ずるか．

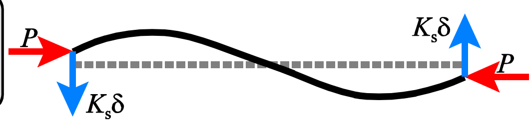


図7.27

解答　モーメントのつりあいは

$$2\delta P-2K_s\delta l=0$$

である．このつりあい条件は横倒れ座屈の場合の条件と同じなので，図7.27のような座屈は生じない．■

発展例題7.29　図7.28のような長柱の座屈の固有値方程式を求めよ．ただし，$a>b$である．

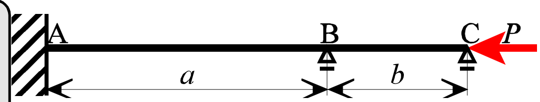


図7.28

解答　フリーボディダイヤグラムは図7.29のようになる．

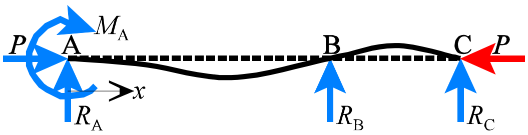


図7.29

曲げモーメントは

AB間：　$M_{AB}=M_A+Pv+R_A x$

BC間：　$M_{BC}=M_A+Pv+R_A x+R_B(x-a)$

である．たわみ方程式は$\alpha^2=\frac{P}{EI}$として

AB間：　$$\frac{d^2v_{AB}}{dx^2}+\alpha^2 v_{AB}=-\frac{1}{EI}M_A-\frac{1}{EI}R_A x$$

BC間：　$$\frac{d^2v_{BC}}{dx^2}+\alpha^2 v_{BC}=-\frac{1}{EI}M_A-\frac{1}{EI}R_A x-\frac{1}{EI}R_B(x-a)$$

となり，たわみ関数は

$$v_{AB}=A_1\cos\alpha x+B_1\sin\alpha x-\frac{1}{\alpha^2 EI}M_A-\frac{1}{\alpha^2 EI}R_A x$$

$$v_{BC}=A_2\cos\alpha(x-a)+B_2\sin\alpha(x-a)-\frac{1}{\alpha^2 EI}M_A-\frac{1}{\alpha^2 EI}R_A x-\frac{1}{\alpha^2 EI}R_B(x-a)$$

境界条件は

$x=0$ で　　$v_{AB}=0$, $\dfrac{dv_{AB}}{dx}=0$　　(A), (B)

$x=a$ で　　$v_{AB}=0$, $v_{BC}=0$, $\dfrac{dv_{AB}}{dx}=\dfrac{dv_{BC}}{dx}$　　(C), (D), (E)

$x=a+b$ で　　$v_{BC}=0$　　(F)

である. 条件(A), (B), (D)から

$$A_1=\frac{M_A}{\alpha^2 EI},\ B_1=\frac{R_A}{\alpha^3 EI},\ A_2=\frac{M_A}{\alpha^2 EI}+\frac{R_A}{\alpha^2 EI}a$$

条件(C), (E), (F)から,

$$\alpha M_A(\cos\alpha a-1)+R_A(\sin\alpha a-\alpha a)=0 \qquad \text{(a)}$$

$$\alpha M_A\sin\alpha a-R_A\cos\alpha a-R_B+\alpha^3 EIB_2=0 \qquad \text{(b)}$$

$$M_A\cos\alpha b+R_A a\cos\alpha b+\alpha^2 EIB_2\sin\alpha b=0 \qquad \text{(c)}$$

が得られ, これらの条件に加えて系のモーメントのつりあい

$$M_A+R_A(a+b)+R_B b=0 \qquad \text{(d)}$$

を含めた式(a)から(d)の四元連立線形同次方程式が非自明解を持つ条件から

$$\begin{vmatrix} \alpha(\cos\alpha a-1) & \sin\alpha a-\alpha a & 0 & 0 \\ \alpha\sin\alpha a & -\cos\alpha a & -1 & \alpha \\ \cos\alpha b & a\cos\alpha b & 0 & \sin\alpha b \\ 1 & a+b & b & 0 \end{vmatrix}=0$$

が得られる. この行列式を満たす最小のαを求めれば座屈荷重が求められる. ■

発展例題7.30 図7.30のように, 端Aが固定支持され, 端Bがばね定数kのばねで支持された長さl, 曲げ剛性EIの長柱に軸圧縮荷重Pが作用する. この長柱の座屈荷重を求めるための式を求めよ.

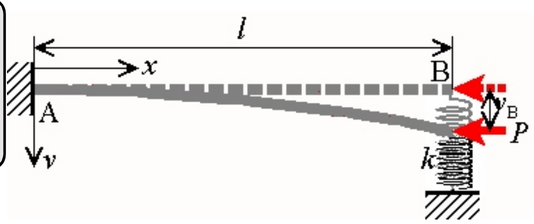


図7.30

解答　Aから右へx座標をとり, たわみを$v(x)$, 点Bでのたわみをv_Bで表すと, 曲げモーメントの式は, 長柱が下にたわむと仮定し, 固定支持での固定モーメントをM_Aとして,

$$M=M_A+Pv-kv_B x$$

であるから, たわみの微分方程式は

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M}{EI}=\frac{-1}{EI}(Pv-M_A-kv_B x)$$

この式で $\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$ とすると

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=-\frac{1}{EI}(M_A-kv_B x)$$

これより, たわみ関数は

$$v(x)=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x-\frac{M_A}{EI\alpha^2}+\frac{kv_B}{EI\alpha^2}x$$

である.

$x=0$ で $v(0)=0$，$\dfrac{d^2v(0)}{dx^2}=0$ であるから，

$$A=\frac{M_A}{EI\alpha^2},\qquad B=-\frac{kv_B}{EI\alpha^3}$$

となるので，たわみ関数は

$$v(x)=\frac{M_A}{EI\alpha^2}(\cos x-1)-\frac{kv_B}{EI\alpha^3}(\sin\alpha x-\alpha x)$$

となる．さらに，$x=l$ で $v(l)=v_B$，$\dfrac{d^2v(l)}{dx^2}=0$ であるから，

$$\alpha(\cos\alpha l-1)M_A-(k\sin\alpha l-k\alpha l+EI\alpha^3)v_B=0 \quad \text{(A)}$$

$$\alpha\cos\alpha l\cdot M_A-k\sin\alpha l\cdot v_B=0 \quad \text{(B)}$$

が得られ，この連立方程式が非自明解を持つ条件から固有値方程式として次式が得られる．

$$\tan\alpha l=\alpha l-\frac{EI}{kl^3}(\alpha l)^3$$

この式を満足する最小の α を α_{cr} として，座屈荷重は $P_{cr}=\alpha_{cr}^2EI$ から計算することができる．■

解説1：もし，$k=\infty$ なら固有値 α を決めるための方程式は

$$\tan\alpha l=\alpha l$$

となり，**発展例題7.05**で調べたC/S柱の場合の式と一致する．また，$k=0$ ならC/F柱の場合と一致する．

解説2：$\dfrac{EI}{kl^3}$ をパラメータとして，横軸に αl，縦軸に固有値方程式の両辺の値をそれぞれプロットしたものを図7.31に示す．赤い線は $\tan\alpha l$，黒い線は $\alpha l-\dfrac{EI}{kl^3}(\alpha l)^3$ の値を αl の関数としてそれぞれ表している．固有値 $\alpha_{cr}l$ は赤い線で表したtan_x(上の式の左辺 $\tan\alpha l$ のこと)と黒い曲線の交点の横座標の値として得られる．この系の座屈荷重は，C/F柱とC/S柱の間の値をとることがわかる．

解説3：式(B)を用いてたわみ関数から M_A を消去すると，座屈モード関数は

$$\frac{v(x)}{v(l)}=\frac{kl^3}{EI(\alpha l)^3}(\tan\alpha l\cdot\cos\alpha x-\sin\alpha x+\alpha x-\tan\alpha l)$$

となる．ここでは $v(l)=v_B$ である．$\dfrac{EI}{kl^3}$ をパラメータとして $\alpha=2.5$ の場合の上式から計算されるたわみ形状は図7.32のようである．ただし，このたわみ形状は式(A)を満たしていない．つまり，座屈モードを表していないことになる．

特に，$\tan\alpha l=\alpha l-\dfrac{EI}{kl^3}(\alpha l)^3$ を満たすときの α を α_{cr} で表すと，

$$\frac{v(x)}{v(l)}=\frac{\tan\alpha_{cr}l\cdot\cos\alpha_{cr}x-\sin\alpha_{cr}x+\alpha_{cr}x-\tan\alpha_{cr}l}{\alpha_{cr}l-\tan\alpha_{cr}l}$$

と表される．α_{cr} をパラメータとして上式から計算されるたわみ形状は図7.33のようである．この場合は座屈モードを表している．

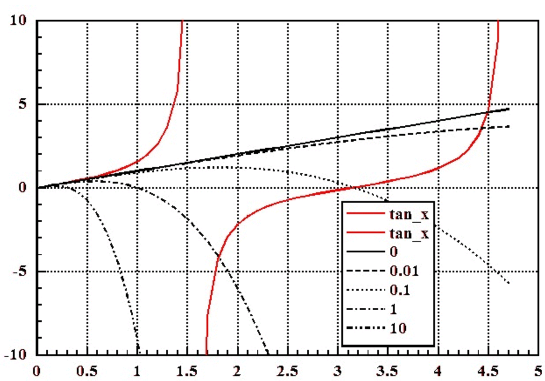


図7.31

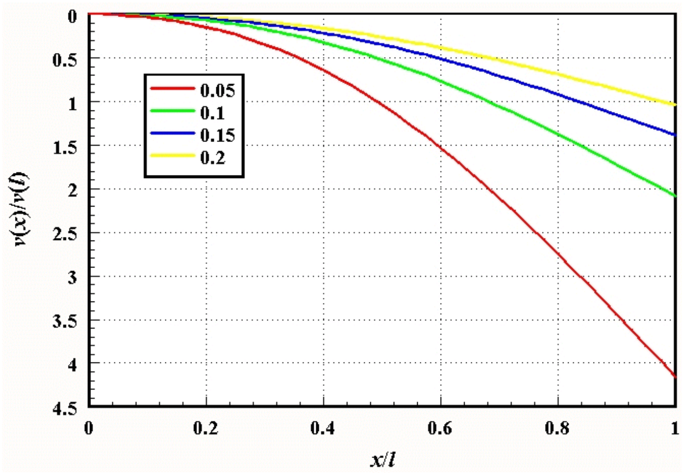


図7.32

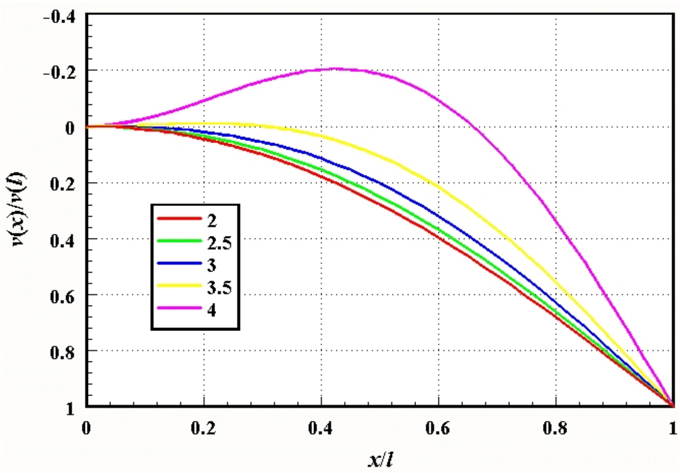


図7.33

発展例題7.31　前の例題で$\alpha_{cr}l=\pi$となるときのばね定数kの値と，そのとき端Aに生じている固定モーメントの値を求めよ．

解答　α_{cr}を決める式

$$\tan\alpha l=\alpha l-\frac{EI}{kl^3}(\alpha l)^3$$

で，$\alpha l=\alpha_{cr}l=\pi$を代入すると$\tan\alpha_{cr}l=\tan\pi=0$なので

$$1-\frac{EI}{kl^3}\pi^2=0$$

となり，これからばね定数は

$$k=\pi^2\frac{EI}{l^3}$$

である．このときの固定モーメントM_Aの値は，前の例題の式(B)で$\alpha l=\alpha_{cr}l=\pi$を代入すると

$$M_A=0$$

となる．すなわち，固定モーメントはゼロである．■

解説：$\alpha_{cr}l=\pi$のときに限り固定モーメントがゼロになる．ゆえに**基本例題7.26**の条件とよく似ているが，固定端ではたわみ角がゼロであることには変わりないので，横倒れ座屈は生じない．誤解のないように．

ちなみに，このときの座屈荷重は

$$P_{cr}=\pi^2\frac{EI}{l^2}$$

である．座屈形状を表す関数は

$$\frac{v(x)}{v_B}=\frac{1}{\pi}\left(-\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{\pi x}{l}\right)$$

となり，すべての境界条件を満たす．特に，$x=l$でのたわみ角は

$$\theta_B=\frac{dv(l)}{dx}=2\frac{v_B}{l}$$

である．

基本事項3（フレームの座屈）

フレームの座屈は，第6章の後半で述べたようなフレーム構造の解析と，変形を考えること以外，基本的には同じである．つまり，構造を構成する部材ごとにフリーボディダイヤグラムを描き，部材ごとの静力学的なつりあいを考えればよい．以下，具体的な例題でその解法を見ていこう．

発展例題7.32　図7.34のようなフレーム構造の座屈荷重を決めるための固有値方程式を導け．縦部材の曲げ剛性をEI_1，横部材の曲げ剛性をEI_2とする．

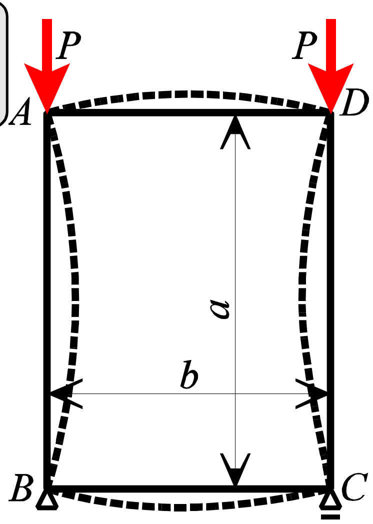


図7.34

解答　対応するフリーボディダイヤグラムは図7.35のようになる．

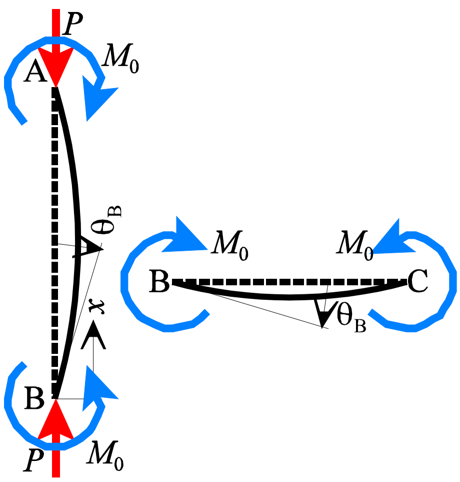


図7.35

まず，横部材について，点Bでのたわみ角は，**基本例題6.04**から

$$\theta_B=\frac{M_0}{2EI_2}b$$

である．

縦部材について，曲げモーメントは

$$M=Pv-M_0$$

であるから，たわみ方程式は$\alpha^2=\dfrac{P}{EI_1}$として

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2v=\frac{M_0}{EI_1}$$

となり，この方程式の解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+\frac{M_0}{\alpha^2EI_1}$$

境界条件は，$x=0$で$v=0$および$\dfrac{dv}{dx}=\theta_B$，$x=a$で$v=0$であるから，

$$A=-\frac{M_0}{\alpha^2EI_1},\quad B=\frac{M_0b}{2\alpha EI_2}$$

が得られるので，たわみ関数は

$$v=\frac{M_0}{\alpha^2 EI_1}(1-\cos\alpha x)+\frac{M_0 b}{2\alpha EI_2}\sin\alpha x$$

となる．さて，残りの境界条件，$x=a$ で $v=0$ から固有値 α を求めるための方程式として

$$2I_2(1-\cos\alpha a)+\alpha bI_1\sin\alpha a=0$$

が得られる．■

解説1：この問題の構造には対称性があるので，縦部材と横部材それぞれ一本ずつ考えればよい．また，図7.30の部材系のフリーボディダイヤグラムで両端に負荷したモーメント M_0 は支点に反力を生じない(**基本例題4.22**において，$M_A=M_B=M_0$ と置いて確かめてみよう)．

解説2：固有値を求めるための方程式

$$2I_2(1-\cos\alpha a)+\alpha bI_1\sin\alpha a=0$$

は，$\beta=\frac{1}{2}\alpha a$ とおくと，

$$\tan\beta+\frac{b}{a}\frac{I_1}{I_2}\beta=0$$

となる．$I_2=\infty$ なら $\beta_{cr}=\pi$，すなわち $\alpha_{cr}=2\frac{\pi}{a}$ となり，座屈荷重は $\frac{4\pi^2 EI_1}{a^2}$ となってC/C柱のオイラー座屈荷重に一致し，$I_2=0$ なら $\alpha_{cr}=\frac{\pi}{a}$ であるから座屈荷重は $\frac{\pi^2 EI_1}{a^2}$ となってS/S柱のオイラー座屈荷重に一致する．有限な I_2 に対しては，$\frac{\pi}{2}<\beta_{cr}<\pi$ であるから $\frac{\pi}{a}<\alpha_{cr}<2\frac{\pi}{a}$．ゆえに，座屈荷重 P_{cr} は $\frac{\pi^2 EI_1}{a^2}<P_{cr}<\frac{4\pi^2 EI_1}{a^2}$ であることがわかる．

発展例題7.33　図7.36のようなフレーム構造の座屈荷重を決めるための固有値方程式を導け．縦部材の曲げ剛性を EI_1，横部材の曲げ剛性を EI_2 とする．

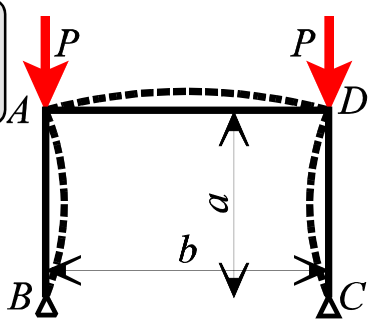


図7.36

解答　対応するフリーボディダイヤグラムは図7.37のようになる．

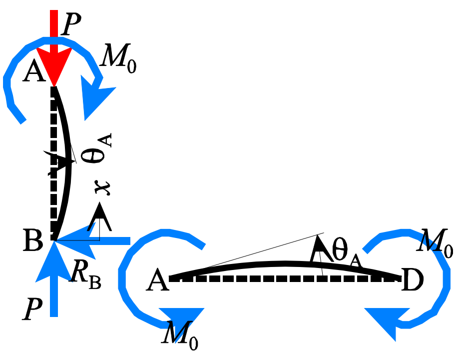


図7.37

まず，横部材ADについて，たわみを下向きに正とすると，点Aでのたわみ角は，**基本例題6.04**から

$$\theta_A=-\frac{M_0}{2EI_2}b$$

である．

縦部材について，曲げモーメントは

$$M=Pv+R_B x$$

であるから，たわみ方程式は $\alpha^2=\frac{P}{EI_1}$ として

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2 v=-\frac{R_B}{EI_1}x$$

となり，この方程式の解は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x-\frac{R_B}{\alpha^2 EI_1}x$$

境界条件は，$x=0$で$v=0$，$x=a$で$v=0$および$\dfrac{dv}{dx}=\theta_A$であるから，固有値方程式は

$$\left(1+\alpha^2 ab\frac{1}{2}\frac{I_1}{I_2}\right)\tan\alpha a-\alpha a=0$$

である．■

解説：もし，$I_2=\infty$なら，固有値方程式は$\tan\alpha a-\alpha a=0$となる．この固有値方程式は**発展例題7.07**のC/S柱の固有値方程式と同じなので，この系の座屈荷重はC/S柱の座屈荷重に一致する．

発展例題7.34　図7.38のようなフレーム構造の座屈荷重を決めるための固有値方程式を導け．縦部材の曲げ剛性をEI_1，横部材の曲げ剛性をEI_2とする．

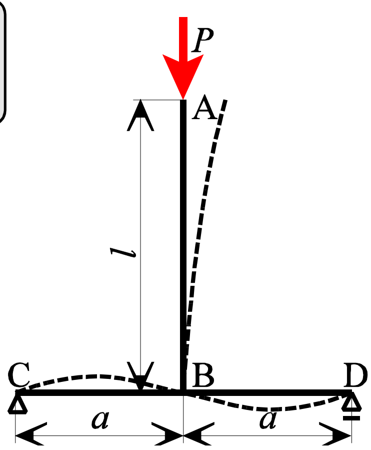


図7.38

解答　対応するフリーボディダイヤグラムは図7.39のようになる．

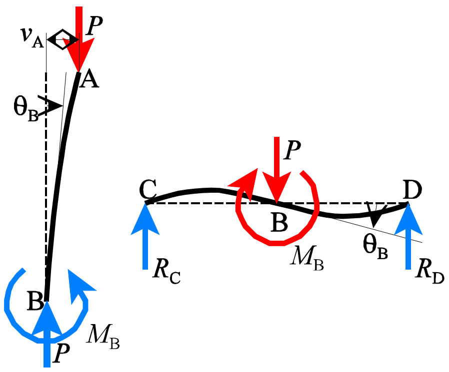


図7.39

横部材の点Bでのたわみ角θ_Bを求める．$M_B=Pv_A$であるから，

$$\theta_B=\frac{1}{6}\frac{M_B a}{EI_2}=\frac{1}{6}\frac{Pv_A a}{EI_2}$$

である．縦部材について，曲げモーメントは，Bから上向きにx軸をとると，

$$M=Pv-M_B=Pv-Pv_A$$

となるから，たわみ関数は$\alpha^2=\dfrac{P}{EI_1}$として

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+v_A$$

となり，境界条件$x=0$で$v=0$と$x=l$で$v=v_A$より，たわみ関数は

$$v=\frac{\sin\alpha l-\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}v_A$$

となり，固有値方程式は境界条件$x=0$で$\dfrac{dv}{dx}=\theta_B$を使って

$$\boxed{\frac{1}{6}\frac{I_1}{I_2}\alpha a\sin\alpha l-\cos\alpha l=0}\quad \text{または}\quad \boxed{\tan\alpha l-6\frac{I_2}{I_1}\frac{1}{\alpha a}=0}$$

である．■

解説1：もし，$I_2=\infty$なら，直ちに$\cos\alpha l=0$，すなわち，$\alpha l=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$（ただし，$n=1,2,\cdots$）が得られ，$\alpha_{cr}=\dfrac{\pi}{2}$であるからこの系の座屈荷重はC/F柱の座屈荷重の式に一致することがわかる．

解説2：横部材の点Bでのたわみ角θ_Bは第6章の結果を使えば得られるが，念のため導いてみよう．図7.39右の横部材に関するフリーボディダイヤグラムから，反力は$R_C=\dfrac{P}{2}-\dfrac{M_B}{2a}$，$R_D=\dfrac{P}{2}+\dfrac{M_B}{2a}$である．曲げモーメントは

$$M_{CB}=R_Cx,\ M_{BD}=R_Cx-P(x-a)+M_B$$

たわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_{CB}=-\frac{1}{EI_2}\frac{1}{2}R_Cx^2+\theta_C,\qquad \theta_{BD}=\frac{1}{EI_2}\left[-\frac{1}{2}R_Cx^2+\frac{1}{2}P(x-a)^2-M_B(x-a)\right]+\theta_C,$$

$$v_{CB}=-\frac{1}{EI_2}\frac{1}{6}R_Cx^3+\theta_Cx,\qquad v_{BD}=\frac{1}{EI_2}\left[-\frac{1}{6}R_Cx^3+\frac{1}{6}P(x-a)^3-\frac{1}{2}M_B(x-a)^2\right]+\theta_Cx$$

である．ここでは，点Cでたわみがゼロである条件を使っている．θ_Cは点Dでたわみがゼロの条件から

$$\theta_C=\frac{1}{EI_2}\left(\frac{1}{4}Pa^2-\frac{1}{12}M_Ba\right)$$

となり，点Bでのたわみ角θ_Bは

$$\theta_{CB}\big|_{x=a}=\frac{1}{6}\frac{M_Ba}{EI_2}=\frac{1}{6}\frac{Pv_Aa}{EI_2}$$

となる．この式の中には横部材にはたらく横荷重Pの影響がない．これは当然で，横荷重の作用点が横部材の中央点であり，この点では横荷重のたわみ角への寄与はゼロである．そのため，解答に示した最初の式で横荷重によるたわみ角が出ていない．

解説3：もし，垂直部材ABが紙面に垂直な面内でたわむなら，境界条件$x=0$で$\dfrac{dv}{dx}=\theta_B$のθ_BはBのCに対するねじれ角になる．今の問題の場合，**基本例題3.07**から$\theta_B=\varphi_B-\varphi_C=\dfrac{Pv_Aa}{2GI_p}$とすればよい．

発展例題7.35　図7.40のようなフレーム構造の座屈荷重を決めるための固有値方程式を導け．縦部材の曲げ剛性をEI_1，横部材の曲げ剛性をEI_2とする．

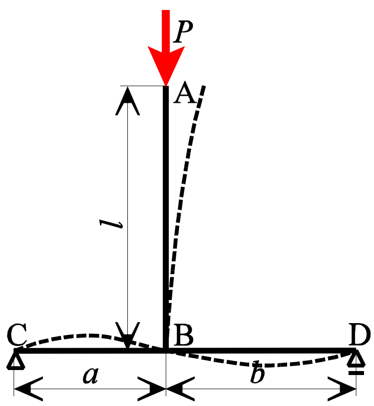


図7.40

解答　点Bのたわみ角は，横荷重PによるものとモーメントPvによるものの二つがある．横荷重Pによるたわみ角をθ_{B1}とすると，

$$\theta_{B1}=-\frac{1}{3}\frac{P}{EI_2}\frac{ab(a-b)}{a+b}$$

モーメントPvによるたわみ角をθ_{B2}とすると，

$$\theta_{B2}=\frac{Pv_A}{3EI_2}\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}$$

である．縦部材のたわみ関数は$\alpha^2=\dfrac{P}{EI_1}$として

$$v = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + v_A$$

となり，$x=0$ で $v=0$ と $\dfrac{dv}{dx}=\theta_B$，$x=l$ で $v=v_A$ より，たわみ関数は

$$v = \frac{ab(a-b)I_1\alpha[\sin\alpha l - \sin\alpha(l-x)]}{-3(a+b)I_2\cos\alpha l + (a^2-ab+b^2)I_1\alpha\sin\alpha l}$$

となる．ここで，**たわみが無限大になって構造部材として機能しなくなる**状態を座屈として定義すると，

$$\boxed{\tan\alpha l - 3\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}\frac{I_2}{I_1}\frac{1}{\alpha} = 0}$$

を満足する最小固有値 α_{cr} を求めることになる．■

解説1：$a=b$ のとき，固有値方程式は**発展例題7.34**の固有値方程式に一致することがわかる．また，$a=0$ のとき，固有値方程式は

$$\tan\alpha l - 3\frac{I_2}{I_1}\frac{1}{\alpha b} = 0$$

となる．ここで**発展例題7.34**の固有値方程式と比較するために $b=2a$ と置きなおすと，

$$\tan\alpha l - \frac{3}{2}\frac{I_2}{I_1}\frac{1}{\alpha a} = 0$$

となる．この方程式は，図7.40の左端の点Cに縦部材が垂直に接合された場合の固有値方程式になり，この方程式を満たす固有値は**発展例題7.34**の固有値より小さいことがわかる．

解説2：特に，$I_2=\infty$ なら，固有値方程式は

$$\cos\alpha l = 0$$

を満たし，最小値は $\alpha_{cr} l = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，座屈荷重はC/F柱のオイラー座屈荷重に等しい．

解説3：図7.41に，$\beta=\alpha l$ とおいて $\tan\beta = 3\dfrac{(a+b)l}{a^2-ab+b^2}\dfrac{I_2}{I_1}\dfrac{1}{\beta}$ の左辺と右辺を計算したものを示す．ここでは，$I_1=I_2$，$l=a+b$ としている．$a/(a+b)=0.5$ は**発展例題7.32**の場合，$a/(a+b)=0.25$ は縦部材がスパンの1/4の点にある場合，$a/(a+b)=0$ は縦部材が点Cにある場合である．右辺の値と左辺の値が等しくなる点(二つの曲線が交差する点)の β 座標が β_{cr} を表している．

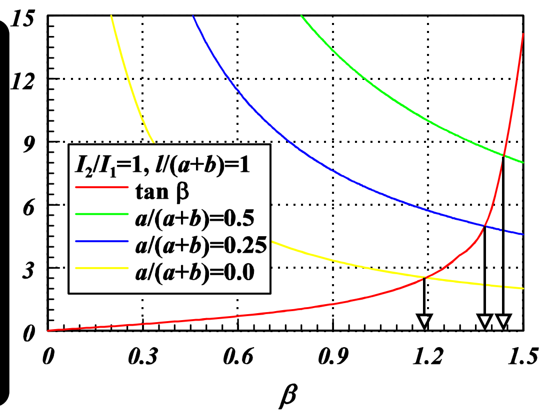


図7.41

発展例題7.36　図7.42のような長さlで単位長さあたりの重量がwの柱がある．この柱のたわみの微分方程式を求めよ．

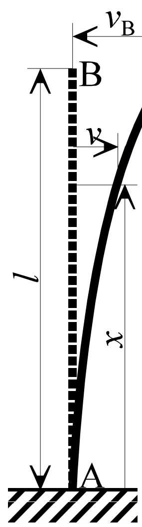


図7.42

解答　まず，固定端での固定モーメントを求める．図7.43(A)のフリーボディダイヤグラムを参照すると，固定端での反力は上向きにwlであるから，座屈変形後の点Bまわりのモーメントのつりあいは，たわみ関数を$v(x)$，固定モーメントをM_Aとおくと，

$$M_A - wlv_B + w\int_0^l (v_B - v(x))dx = 0$$

であるから，固定モーメントM_Aは

$$M_A = wlv_B - w\int_0^l (v_B - v(x))dx$$

である．ここで

$$\int_0^l (v_B - v(x))dx = v_B l - \int_0^l v(x)dx$$

であるから

$$M_A = w\int_0^l v(x)dx$$

となる．

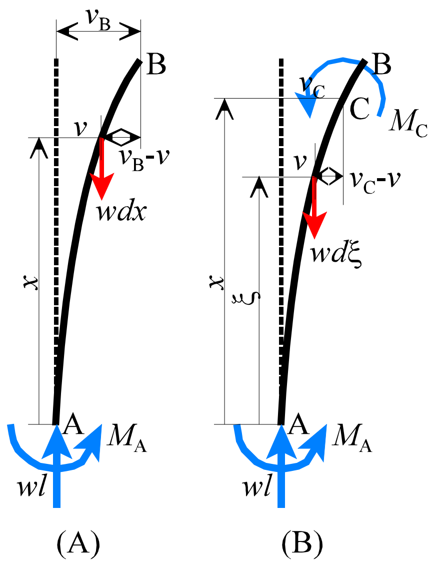


図7.43

次に任意点xでの曲げモーメントを求める．図7.43(B)のフリーボディダイヤグラムを参照して，固定端からxでのたわみを$v_C(x)$，曲げモーメントをM_Cとおき，固定端からξでのたわみを$v(\xi)$とおくと，フリーボディダイヤグラムからモーメントのつりあいは

$$M_A - wlv_C(x) + w\int_0^x (v_C(x) - v(\xi))d\xi + M_C = 0$$

となるから，これより曲げモーメントは

$$M_C = w(l-x)v_C(x) - w\int_x^l v(\xi)d\xi$$

と書くことができる．

たわみの微分方程式は，曲げ剛性をEIとすると

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M(x)$$

であり，右辺にM_Cを代入し，点Cが任意点であるので$v_C(x)$を$v(x)$で表すとたわみの微分方程式は

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -w(l-x)v(x) + w\int_x^l v(\xi)d\xi$$

である．この式をxで微分すると，わたみの微分方程式は

$$\boxed{EI\frac{d^3v}{dx^3} + w(l-x)\frac{dv}{dx} = 0}$$

となる．■

解説：得られたたわみの微分方程式の解はかなり面倒である．Timoshenko,S.P. and Gere,J.M., Theory of Elastic Stability, pp.100-103によると座屈荷重は

$$(wl)_{cr}=7.837\frac{EI}{l^2}$$

である．

発展例題7.37　図7.44左のように，左右がばね(ばね定数K)で支えられた剛体の台車に長さlの柱AB(曲げ剛性EI)が垂直に取り付けられている．柱の先端Bは上下に移動可能な回転支点である．この構造システムにおいて，柱の先端Bに軸圧縮荷重Pが作用する．この系の座屈荷重を求めるための固有値方程式を求めよ．なお，台車は水平方向にのみ移動可能で，摩擦はない．

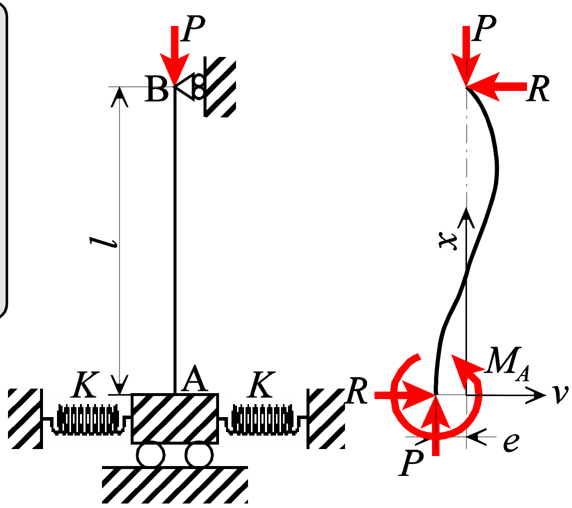


図7.44

解答　柱のフリーボディダイヤグラムは図7.44右のようである．

まず，水平方向反力Rは，

$$R=2Ke$$

であり，図12.16右の系全体のモーメントのつりあい$M_A+Rl-Pe=0$から

$$M_A=Pe-2Kel$$

である．曲げモーメントの式は，モーメントのつりあい$M+M_A-P(v+e)+Rx=0$から

$$M=Pv+2Ke(l-x)$$

この式と$\dfrac{d^2v}{dx^2}=-\dfrac{M}{EI}$から，$\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$として，

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\alpha^2v=-\frac{2Ke}{EI}(l-x)$$

この式を解くと，たわみ関数は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x-\frac{2Ke}{EI\alpha^2}(l-x)$$

として得られる．境界条件は，

$x=0$で　　$v=-e$，$\dfrac{dv}{dx}=0$

$x=l$で　　$v=0$

である．$x=0$での境界条件とたわみ関数から

$$A=-e+\frac{2Ke}{EI\alpha^2}l,\qquad B=-\frac{2Ke}{EI\alpha^3}$$

$x=l$での条件とたわみ関数から

$$A\cos\alpha l+B\sin\alpha l=0$$

この式にAとBの値を代入すると

$$\tan\alpha l-\alpha l+\frac{EI}{2K}\alpha^3=0$$

が得られる. この式から, 固有値α_{cr}を定めることができる. ■

座屈問題のややこしいとこ

座屈の場合，この章の頭でも書いたが，座屈後の変形状態を考えた上で曲げモーメントの式を立てなければならない．ここで得られる曲げモーメントの式は必ずたわみ関数を含んでいるので，要注意である．得られるたわみの微分方程式は偶数次の微分係数を持つので解自体は難しくない．コツをつかめば書き下せる．あとは境界条件を使って未定係数を決めればたわみ関数を求めることができる．たわみ関数が決まれば，たわみが無限大になる条件を使って座屈の固有値が満足しなければならない超越方程式を求めることができ，固有値のうちのゼロでない最小値を使って座屈荷重を求めることができる．

座屈荷重が求められたからオッケーというわけにはいかない．実は，設計の観点から言えばここからが地獄のはずである．座屈荷重の得られた構造物が座屈によって壊れるか軸圧縮によって壊れるかを調べるのはここからである．そのためには，座屈応力と降伏応力の大小関係が重要になる．もし，座屈応力が降伏応力より大きいという結果が出れば，その構造物は座屈する前に降伏応力に達することになるので座屈することなく軸圧縮応力によって降伏にいたる．逆であれば，座屈が先に生ずることになるので，力が作用し続ければ弾性破損する．

では，この限界はどこにあるのか．座屈応力が降伏応力を超える限界は**基本例題7.01**で述べたように決めることができる．一般的な場合として考えるために，座屈のゼロでない最小固有値をα_{cr}で表すと，座屈荷重は$P_{cr}=\alpha_{cr}^2 EI$で表現される．ここでα_{cr}は長さの逆次元を持つため都合が悪いので，柱の長さをlとして$\beta_{cr}=\alpha_{cr} l$と表すとβ_{cr}は無次元量なので，座屈荷重は$P_{cr}=\beta_{cr}^2\dfrac{EI}{l^2}$で表され，座屈応力は座屈荷重を横断面積$A$で除して$\sigma_{cr}=\dfrac{P_{cr}}{A}=\beta_{cr}^2\dfrac{EI}{Al^2}$で表される．**基本例題7.01**で導入した$k^2=\dfrac{I}{A}$を使うと$\sigma_{cr}=\beta_{cr}^2 E\left(\dfrac{k}{l}\right)^2=\beta_{cr}^2 E\left(\dfrac{l}{k}\right)^{-2}$となる．ここで，座屈応力と降伏応力$\sigma_Y$が等しい条件から

$$\frac{l}{k}=\beta_{cr}\sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}}$$

という式が得られる．左辺は柱の長さと横断面形状とから定まる幾何学的量である．この式自体は$\dfrac{l}{k}$の限界値を表していると考えればよい．なぜなら，右辺は定数だからだ．つまり，構造システムが決まり，材料も決まっていれば右辺の値を計算して求めることができるので，実際の柱の$\dfrac{l}{k}$が値$\beta_{cr}\sqrt{\dfrac{E}{\sigma_Y}}$より大きいか小さいかが重要なのだと考えればよい．ただ，よほどきちんと理解しなければ誤解しやすいので，上式を満たす$\dfrac{l}{k}$を，たとえば，$\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}$と表して

$$\left(\frac{l}{k}\right)_{cr}=\beta_{cr}\sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}}$$

と表現してしまえば定数らしくて，変数として扱う$\dfrac{l}{k}$と区別とすれば誤解が少なくなるかもしれない．ただし，$\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}$には二つのパラメータが含まれているため，こちらのほうが面倒かもしれないが，以下，この表記を使って考えてみよう．

実際の部材の$\dfrac{l}{k}$が$\dfrac{l}{k}<\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}$を満たすとする．簡単のために横断面形状が変わらず，長さだけの変化に着目して$\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}=\dfrac{l_{cr}}{k}$と表す．$\dfrac{l}{k}<\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}$を満たす柱の長さを，$\delta>0$として，$l=l_{cr}-\delta\ (<l_{cr})$で表す．まず，限界値から$\beta_{cr}^2 k^2 E=l_{cr}^2\sigma_Y$であるから，実際の柱の$\sigma_{cr}$は

$$\sigma_{cr}=\beta_{cr}^2E\left(\frac{k}{l}\right)^2=\beta_{cr}^2E\left(\frac{k}{l_{cr}-\delta}\right)^2=\left(\frac{l_{cr}}{l_{cr}-\delta}\right)^2\sigma_Y$$

となり，$\dfrac{l_{cr}}{l_{cr}-\delta}>1$なので$\sigma_{cr}>\sigma_Y$となる．つまり，長さ$l=l_{cr}-\delta$ ($<l_{cr}$)の柱の座屈応力は降伏応力より大きい．しかし，材料内に発生する応力はσ_Yを超えると塑性変形を生ずるので，$\sigma_{cr}>\sigma_Y$は座屈する前に降伏することを表す．つまり，l_{cr}より短い柱は降伏応力が上限になる．逆に，$\dfrac{l}{k}>\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}$なら，同じように考えて$\sigma_{cr}=\beta_{cr}^2E\left(\dfrac{k}{l_{cr}+\delta}\right)^2=\left(\dfrac{l_{cr}}{l_{cr}+\delta}\right)^2\sigma_Y$となり，$\sigma_{cr}<\sigma_Y$となる．つまり，この場合は座屈によって構造物は破損することになる．

さて，オジサンは再三にわたって構造部材に発生する応力は降伏応力を超えてはいけないと述べてきた．一方，$\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}$より大きな$\dfrac{l}{k}$の値を持つ柱に対して，降伏応力より低い座屈応力で構造物は弾性破損する(塑性変形が生ずる)と言った．つまり，$\sigma_{cr}<\sigma_Y$で塑性変形が生ずるといっているのだ．

「あれ？構造部材に発生する応力は降伏応力を超えると塑性変形するのはわかっているが，座屈では降伏応力より低い応力で塑性変形するの？降伏応力に達していないのに？れれ？オジサン，うそ言っちゃだめ」

ここで**発展例題7.06**を思い出してみよう．この例題では，僅かな偏りeがある場合について考えている．この例題の解説4では，座屈時の柱に生ずる軸方向応力の最大値は柱表面に生じ，その値は軸圧縮応力と最大曲げ応力の和であると言っている．つまり，最大応力$\sigma_{x\max}$は

$$\sigma_{x\max}=\frac{P}{A}+\frac{P}{Z}e\sec\frac{1}{2}\alpha l=\frac{P}{A}+\frac{P}{Z}e\sec\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}$$

から計算される．この式の導出過程から，第一項目が軸圧縮応力，第二項目が軸荷重Pを使って表現した最大曲げ応力であることがわかる．この式をさらに書き直すと，解説5から

$$\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)$$

である．$\sigma_{x\max}=\sigma_Y$を満たせばこの柱は降伏し，この条件を満たすσ_xがσ_{cr}ということになり，明らかに$\sigma_{cr}<\sigma_Y$になっているが，ほら降伏するでしょ．妙な言い方をすると，座屈応力とは，軸圧縮応力と最大曲げ応力の和で与えられる軸方向応力の最大値のうちの一様軸圧縮応力に着目していることになる．ここではeがゼロでないとして議論しているが，図7.44のように，eがゼロに近づくとオイラー座屈応力を表す赤い線に近づきそうである．なお，図7.37は**応用例題7.07**と**7.08**で使ったパラメータを使っているのであわせて参照しておいてほしい．また，$\left(\dfrac{l}{k}\right)_{cr}$が横軸のどこにあたるかも示してある．

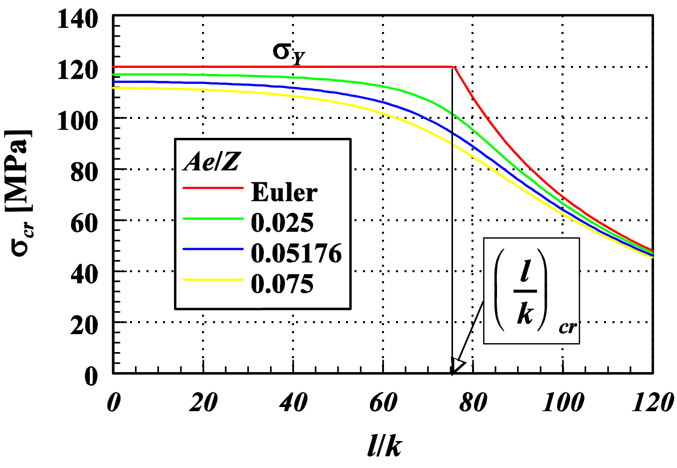


図7.45

応用例題7.08の場合の最大たわみを調べてみよう．この例題の場合σ_x=100 MPaであるので，荷重はP=15 kNとなる．αlは

$$\alpha l=\sqrt{\frac{P}{EI}}l=2.619$$

となるから，最大たわみ $v_{\max}$ は，**応用例題7.06**の解説3に挙げた式を使って

$$v_{\max}=0.0862\times10^{-3}\times\left(\sec\left(\frac{2.619}{2}\right)-1\right)=0.247\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

となる．つまり，**応用例題7.08**の場合，柱中央部のたわみ量は0.247 mmということになる．ちなみに，$e=0$ の場合の最大たわみは定まらない．

はり理論から得られる最大たわみと比較してみよう．はり理論からは，**基本例題6.04**で $M_A=M_B=Pe$ と置いて計算すると

$$v_{\max}=\frac{Pel^2}{8EI_z}=\frac{15\times10^3\times0.0862\times10^{-3}\times(0.2)^2}{8\times70\times10^9\times1.29\times10^{-9}}=71.6\times10^{-6}\ \mathrm{m}$$

となる．このことから，座屈理論から導かれる最大たわみ 0.247×10^{-3} mははり理論の3.5倍になる．この違いは，どちらかが間違っているから生じたわけではない．さあ，考えてみよう．

ついでに，$\sigma_Y=\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\dfrac{A}{Z}e\sec\dfrac{l}{2k}\sqrt{\dfrac{\sigma_x}{E}}\right)$ を満たすとき，降伏は柱の表面で発生している．これより大きな軸圧縮荷重が作用すると，降伏領域は柱の内部へと拡大する．このような状態になると材料力学では扱うことができないが，強度設計は材料が弾性的性質を示す範囲で行われるので問題はないだろう．

発展例題7.23の続編

発展例題7.23の解説2で，「興味があれば調べてみてほしい」とくくった．オジサンも興味があるので調べてみたので，ここで書いておくことにする．

動的解析のために，慣性力を導入する．いま，柱の質量を m として点Bに集中質量として負荷する．このとき，たわみの微分方程式は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{M}{EI}=\alpha^2(v_B-v)-\alpha^2(l-x)\theta_B-\frac{m}{EI}\frac{\partial^2 v_B}{\partial t^2}(l-x)$$

となる．ここで t は時間である．いま，$i=\sqrt{-1}$ として $v=Ve^{i\omega t}$，$v_B=V_Be^{i\omega t}$，$\theta_B=\Theta_Be^{i\omega t}$ とおいてたわみの微分方程式に代入すると

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\alpha^2(V_B-V)-\alpha^2(l-x)\Theta_B+\frac{m\omega^2}{EI}V_B(l-x)$$

となる．この式の解は

$$V=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+V_B-(l-x)\Theta_B+\frac{m\omega^2}{\alpha^2EI}V_B(l-x)$$

である．境界条件は小文字の変数が大文字の変数に代わるだけである．途中の計算は省略するが，境界条件を適用して得られる方程式から ω は

$$\omega=\pm\sqrt{\frac{P}{ml}\frac{1}{\cos\alpha l-\dfrac{\sin\alpha l}{\alpha l}}}$$

となる．さて，$\omega\to\infty$ で座屈と考えると，上式の分母がゼロになるときで，α が次式を満たすときであるから次式が得られる．

$$\alpha l-\tan\alpha l=0$$

さて，この式は**発展例題7.05**に述べたC/S柱の座屈の固有値方程式と同じである．すなわち，**発展例題7.23**の座屈荷重はC/S柱の座屈荷重に等しいということになる．

ω は系の固有円振動数であるが，ここで得られている固有円振動数は作用する力 P によって変わることになる．

$P<P_{cr}$なら$\alpha l-\tan\alpha l>0$であるからωは実数であるが，$P>P_{cr}$になると$\alpha l-\tan\alpha l<0$になるのでωは純虚数になる．つまり，

$$\omega=\pm i\sqrt{\frac{P}{ml}\frac{1}{\dfrac{\sin\alpha l}{\alpha l}-\cos\alpha l}}$$

となるから，$v=Ve^{i\omega t}$，$v_B=V_Be^{i\omega t}$，$\theta_B=\Theta_Be^{i\omega t}$とおいた解はすべて発散する．いま考えている系では，力PはC/S柱の座屈荷重未満でなければならないことになる．

連立方程式と座屈の固有値方程式

この解説は余計なお世話に違いない．実は，学生さんに三元とか四元の連立方程式を解いてもらうと，大体代入法か消去法で解いてくれる．オジサンは少し違う．この程度の連立方程式より元数が多くなるとコンピュータ君にお任せだが，座屈問題で出てくる程度はクラメールの公式で解く．この理由は，案外間違いにくいことだが，その一方で四元より大規模になると計算量が急激に増える(**発展例題7.29**で行列式で表したのは，一つは計算が面倒くさかっただけです．展開して間違えるより展開せずに合っていることが大切．いい訳ですが・・・)ことが欠点だ．とはいえ，クラメールの公式は座屈の問題で便利なのだ．例えば，**発展例題7.35**を考えてみよう．

たわみ関数は

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+v_A$$

なので，境界条件から得られる連立一次方程式は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2-ab+b^2}{a+b}\dfrac{I_1}{I_2}\alpha \\ \cos\alpha l & \sin\alpha l & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A \\ B \\ v_A \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{3}\dfrac{ab(a-b)}{a+b}\dfrac{I_1}{I_2}\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

である．この方程式を解くためには代入法が便利だが，クラメールの公式がもっとありがたい．クラメールの公式では，連立方程式の左辺の係数行列式を計算するとその値は必ずA，B，v_Aの分母に現れる．いま考えている例題では，分母に現れる係数行列式の値は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{3}\dfrac{a^2-ab+b^2}{a+b}\dfrac{I_1}{I_2}\alpha \\ \cos\alpha l & \sin\alpha l & 0 \end{vmatrix}=-\cos\alpha l+\frac{1}{3}\alpha\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}\frac{I_1}{I_2}\sin\alpha l$$

一方，**たわみが無限大になって構造部材として機能しなくなる**状態を座屈として定義するので，分母に現れるこの値がゼロになればよい．つまり，座屈の固有値方程式はこの式をゼロにする$\alpha=0$以外の根である．一見**発展例題7.33**の答えと違うように見えるが，同じであることがすぐわかるはずである．

つまり，固有値を求めるための方程式は勝手に出てくるのである．**発展例題7.29**でみたように，同次の連立方程式では非自明解をもつ条件は係数行列の行列式の値がゼロになることを思い出すと，同次，非同次に関わらず<u>係数行列の行列式の値をゼロに置けば座屈の固有値方程式が得られる．</u>

第7章　演習問題

問題1．**応用例題7.07**の最大応力$\sigma_{x\max}$が降伏応力σ_Y以内になるように，横断面を設計せよ．ただし，長方形横断面の縦横の寸法比率を保つものとし，e=1 mmである．

ヒント:**応用例題7.07**の縦横の寸法をそれぞれn倍すると，σ_xの式は

$$\sigma_{x\max}=\frac{100}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\times 0.6\times\sec\left(\frac{1}{n^2}\times 1.306\right)\right)\ \mathrm{MPa}$$

と書ける．この式を$n>1$の範囲で計算してグラフを作り，$\sigma_Y\geq\sigma_{x\max}$を満たす最大の$n$を求める．

Ans.　$n>1.22$．

問題2．**応用例題7.07**の式

$$\sigma_Y\geq\sigma_{x\max}=\sigma_x\left(1+\frac{A}{Z}e\sec\frac{l}{2k}\sqrt{\frac{\sigma_x}{E}}\right)$$

において，$\dfrac{l}{2k}\sqrt{\dfrac{\sigma_x}{E}}<\dfrac{\pi}{2}$を示せ．

Ans.　$\dfrac{l}{2k}\sqrt{\dfrac{\sigma_x}{E}}=\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EI}}$である．S/S柱のオイラー座屈荷重は$P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$．これより，$\dfrac{l}{\sqrt{EI}}=\dfrac{\pi}{P_{cr}}$であるから，

$\dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EI}}=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{P}{P_{cr}}}$となる．一方，$P<P_{cr}$であるから，常に$\dfrac{l}{2k}\sqrt{\dfrac{\sigma_x}{E}}<\dfrac{\pi}{2}$である．

問題3．S/S柱の支持位置がeだけずれている．この柱全体に温度変化ΔTが生ずるとき，柱が降伏しないための温度変化の条件式を作れ．**発展例題7.06**の解説5を参考にせよ．柱の降伏応力に対応する温度変化量をΔT_Yとする．

Ans.　$\Delta T_Y\geq\Delta T\left(1+\dfrac{A}{Z}e\sec\dfrac{l}{2k}\sqrt{\alpha_t\Delta T}\right)$を満たす$\Delta T$．

問題4．**応用例題7.22**のシステムにおいて，支持位置が図7.11のようにe=1 mmずれた．柱が降伏しないための温度変化の限界を求めよ．

ヒント：前問の答えの式に数値を代入して計算する．

Ans.　$120\times10^6=20\times10^{-6}\times70\times10^9\times\Delta T_Y$から$\Delta T_Y$=85.7 K.

$\Delta T_Y \geq \Delta T\left(1+\dfrac{A}{Z}e\sec\dfrac{l}{2k}\sqrt{\alpha_t \Delta T}\right)$の右辺の値をプロットしたグラフは図1のようになる．この図の青い線はΔT_Y=85.7 Kを示している．右辺の値がΔT_Y=85.7 K以内であればよいので，青い線との交点の横軸の値を読むと，ΔT=約15 K以内であれば柱は降伏しないことになる．

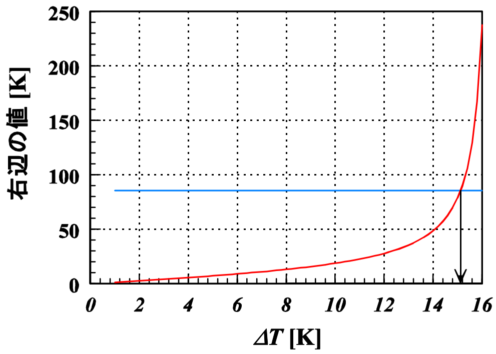


図1

問題5．図2のようなバネ支持を持つS/S柱の座屈荷重を求めるための固有値方程式を求めよ．バネ定数をK_s，柱の曲げ剛性をEIとする．また，バネ定数$K_s=\infty$のとき，**発展例題7.19**の固有値方程式に一致することを示せ．

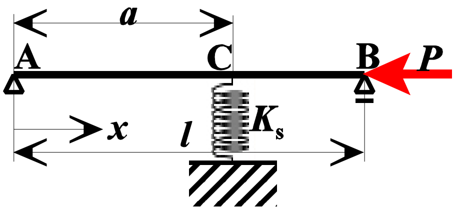


図2

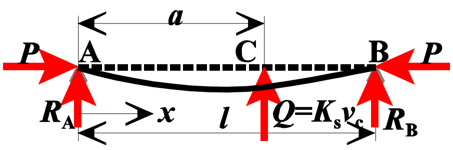


図3

ヒント：フリーボディダイヤグラムは図3である．これは**発展例題7.11**に似ているので，**発展例題7.11**で$Q=-K_s v_C$とするとたわみ関数が得られる．さて，固有値方程式を得るための条件は？．

Ans.　$\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$として，$\sin\alpha(l-a)\cdot\sin\alpha a-\dfrac{l-a}{l}\alpha a\sin\alpha l+\alpha^3\dfrac{EI}{K_s}\sin\alpha l=0$

$K_s=\infty$とし，$b=l-a$とすると，**発展例題7.19**の固有値方程式に一致する．

問題6．**発展例題7.13**において点Bで$M_B=K_\theta\theta_B$のモーメントが発生するときの固有値方程式を求めよ．ただし，M_A=0，曲げ剛性をEIとする．また，$K_\theta=\infty$のとき，C/S柱の固有値方程式(**発展例題7.05**参照)に一致することを示せ．

Ans.　$\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$として，$\alpha l\cos\alpha l-\sin\alpha l-(\alpha l)^2\dfrac{EI}{K_\theta l}\sin\alpha l=\alpha l\cos\alpha l-\left(1+(\alpha l)^2\dfrac{EI}{K_\theta l}\right)\sin\alpha l=0$

$K_\theta=\infty$とすると，$\alpha l-\tan\alpha l=0$となり，C/S柱の座屈荷重を決めるための固有値方程式に一致する．

補足：K_θ=0ならαは$\sin\alpha l=0$を満たし，S/S柱に対する固有値方程式に一致する．有限なK_θについては，

$1+(\alpha l)^2\dfrac{EI}{K_\theta l}>1$なので，つねに$\pi<\alpha_{cr}l<4.4934$である．ついでに，たわみ関数は下向きに正としているので，点Bで$\theta_B<0$である．したがってモーメント$M_B=K_\theta\theta_B<0$であることに注意．回転バネについては，**発展例題6.34**の解説1，2も参照のこと．

問題7．図4の系の座屈荷重を求めるための固有値方程式を求めよ．曲げ剛性をEIとする．また，バネ定数$K_s=\infty$のとき，**発展例題7.05**の系の固有値方程式に一致することを示せ．

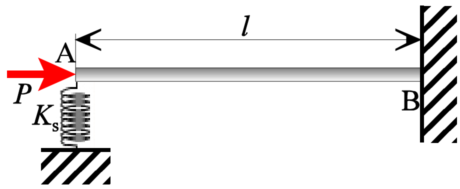


図4

Ans.　$\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$として，$\tan\alpha l-\alpha l+\dfrac{\alpha^3 EI}{K_s}=0$

$K_s=\infty$のとき，$\tan\alpha l-\alpha l=0$となり，**発展例題7.05**の系の固有値方程式に一致する．

問題8．図5の系では，端Bは上下方向に動く剛体に固定されており，その剛体自体は上下に移動可能であり，剛体はバネ定数K_sのバネで支持されている．この柱の座屈荷重は問題7の柱の座屈荷重に等しいことを示せ．曲げ剛性をEIとする．

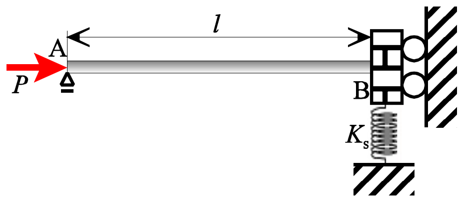


図5

Ans.　省略します．簡単です．

問題9．図→のようなフレーム構造の座屈荷重を求めるための固有値方程式を求めよ．また，横部材の断面二次モーメントが無限大のとき，この構造の座屈荷重がC/S柱の座屈荷重に一致することを示せ．縦部材の曲げ剛性をEI_1，横部材の曲げ剛性をEI_2とする．

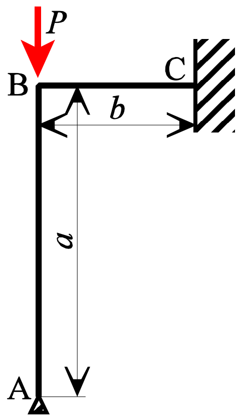


図6

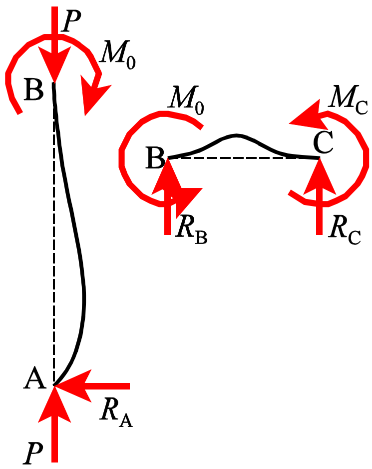


図7

ヒント：フリーボディダイヤグラムは図←のようになる．横部材については，Bではたわみがゼロ，Cではたわみとたわみ角がゼロである．横部材は不静定はりになるが，ほしい量は点Bでのたわみ角だけである．ちなみに，たわみ角は

$$\theta_B=-\frac{1}{4}\frac{M_0}{EI_2}b$$

である．

Ans.　$\left(1+\dfrac{1}{4}\dfrac{I_1}{I_2}\alpha^2 ab\right)\sin\alpha a-\alpha a\cos\alpha a=0$

問題　．うーーー．あと一問くらいはほしい！ねた切れゴメン．乗せてほしい問題求む！

第8章　ひずみエネルギとそれを使った材料力学

ここでは，ひずみエネルギに関する例題を考える．ひずみエネルギを用いると簡単に解ける問題も多いので，ぜひ理解してほしい．なお，ひずみエネルギの定義や概念などは手持ちの教科書を参照してほしい．

基本事項1（種々の負荷形態下でのひずみエネルギ）

1．ひずみエネルギ密度とは，単位体積あたりのひずみエネルギ[1]のことで，物体に生じている応力がなした内部仕事のこと．二通りの表し方があり，ひずみエネルギ密度の変化量は

応力×ひずみの変化量　または　　　ひずみ×応力の変化量

である．線形弾性体ではこの二つは同じである．ひずみエネルギ密度は，教科書の式(9.9)のように三通りの表現がある．

2．材料力学の範囲で知っておく必要のあるひずみエネルギの式は，軸力系，ねじり系，曲げ系の三種類の負荷形態のものであり，p.122のPOINTにまとめて挙げてある．

基本例題8.01　軸方向荷重Pを受ける長さl，断面積A，ヤング率Eの棒のひずみエネルギを求めよ．

解答　軸方向荷重が引張側であるとき$N=P$であり，圧縮側のとき$N=-P$である．軸力系のひずみエネルギの式は，

$$U=\int_0^l \frac{N^2}{2AE}dx$$

であるから，これに$N=P$，$N=-P$を代入して，

$$U=\int_0^l \frac{P^2}{2AE}dx=\frac{P^2 l}{2AE}$$

である．■

解説：ひずみエネルギは内力のなす仕事なので，本来はp.122のPOINTのように内力で表現されなければならないが，内力と外力がつりあっているので外力でも表現することができる．これは重要なので，気をつけておこう．

基本例題8.02　教科書の例題3.1の系の棒のひずみエネルギを，外力P_BとP_Cを用いて表せ．

解答　内力で表現したひずみエネルギは，二つの区間に分けてひずみエネルギを求め，それらを加えればよいので，

$$U=\int_0^{l/2} \frac{N_{AB}^2}{2AE}dx+\int_{l/2}^l \frac{N_{BC}^2}{2AE}dx$$

である．ここで，$N_{AB}=-(P_B-P_C)$，$N_{BC}=P_C$を代入すると，

$$U=\int_0^{l/2} \frac{(P_B-P_C)^2}{2AE}dx+\int_{l/2}^l \frac{P_C^2}{2AE}dx$$

軸剛性AEが一定なら，

[1]ひずみエネルギを含めてエネルギの単位はN･m なので，ひずみエネルギ密度はN/m^2 になるが，これだと物理的意味が不明確なので，N･m/m^3 と表記するのがよい．

$$U=\frac{(P_B-P_C)^2}{2AE}\frac{l}{2}+\frac{P_C^2}{2AE}\frac{l}{2}$$

である. ■

基本例題8.03　教科書の例題5.2の系のはりのひずみエネルギを，外力Pを用いて表せ.

解答　**基本例題8.01**と同じように，はりをAC間とCB間に分けてそれぞれの区間でのひずみエネルギを加えると，

$$U=\int_0^a\frac{M_{AC}^2}{2EI_z}dx+\int_a^l\frac{M_{CB}^2}{2EI_z}dx$$

曲げモーメントは

$$M_{AC}=R_Ax=\frac{b}{l}Px,\ M_{CB}=\frac{b}{l}Px-P(x-a)$$

であるから，これらを代入して

$$\begin{aligned}U&=\int_0^a\frac{1}{2EI_z}\left(\frac{b}{l}Px\right)^2dx+\int_a^l\frac{1}{2EI_z}\left[\frac{b}{l}Px-P(x-a)\right]^2dx\\&=\frac{P^2}{l^2}\int_0^a\frac{b^2}{2EI_z}x^2dx+\frac{P^2}{l^2}\int_a^l\frac{a^2}{2EI_z}(l-x)^2dx\end{aligned}$$

曲げ剛性EI_zがはり全体にわたって一定なら積分の外に出して

$$U=\frac{P^2a^2b^2}{6EI_zl}$$

となる. ■

基本例題8.04　教科書の例題7.1の系の棒の固定支持Bをフリーにし，T_Cと同じ向きの外力のねじりモーメントT_Bを加えた. このときのひずみエネルギを，外力のねじりモーメントT_BとT_Cを用いて表せ.

解答　Aの反モーメントはT_B+T_CであるからAC間の内力のねじりモーメントは$T_{AC}=T_B+T_C$. CB間では$T_{CB}=T_{AC}-T_C=T_B$である. 基本例題8.03のように，AC間，CB間のひずみエネルギの和

$$U=\int_0^{l_1}\frac{T_{AC}^2}{2GI_p}dx+\int_{l_1}^{l_1+l_2}\frac{T_{CB}^2}{2GI_p}dx$$

に各区間のねじりモーメントの式を代入して

$$U=\int_0^{l_1}\frac{(T_C+T_B)^2}{2GI_p}dx+\int_{l_1}^{l_1+l_2}\frac{T_B^2}{2GI_p}dx.$$

丸棒のねじり剛性GI_pが一定なら

$$U=\frac{(T_C+T_B)^2}{2GI_p}l_1+\frac{T_B^2}{2GI_p}l_2$$

である. ■

基本例題8.05 長さl，曲げ剛性EI_z，軸剛性A_0Eのはりの軸線上の任意点における横断面に曲げ応力と軸応力が同時に発生している．このはりのひずみエネルギは，

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^l M^2dx+\frac{1}{2A_0E}\int_0^l N^2dx$$

であることを示せ．ここで，Mは曲げモーメント，Nは軸荷重によって生じている内力である．

解答 いま考えている断面において発生している応力は，

$$\sigma_x=\frac{M}{I_z}y+\frac{N}{A_0}$$

である．ひずみエネルギ密度は$u=\frac{1}{2E}\sigma_x^2$であるから，

$$u=\frac{1}{2E}\sigma_x^2=\frac{1}{2E}\left(\frac{M}{I_z}y+\frac{N}{A_0}\right)^2.$$

系全体のひずみエネルギはひずみエネルギ密度を全体積にわたって積分したものである．横断面の微小面積をdAとし，軸線方向の微小長さをdxで表すと，微小体積$dV=dAdx$であるから，系全体のひずみエネルギは

$$U=\int_V udV=\int_0^l\int_{A_0}\frac{1}{2E}\left(\frac{M}{I_z}y+\frac{N}{A_0}\right)^2dAdx$$

となる．ヤング率が横断面内で変わらないとすると，

$$U=\int_0^l\frac{1}{2E}\left[\frac{M^2}{I_z^2}\int_{A_0}y^2dA+2\frac{MN}{A_0I_z}\int_{A_0}ydA+\frac{N^2}{A^2}\int_{A_0}dA\right]dx$$

となり，$\int_{A_0}y^2dA=I_z$，$\int_{A_0}ydA=0$，$\int_{A_0}dA=A_0$であるから，問題の式

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^l M^2dx+\frac{1}{2A_0E}\int_0^l N^2dx$$

が出てくる．■

解説1：関係式$\int_{A_0}y^2dA=I_z$と$\int_{A_0}ydA=0$については，教科書の4.1節で復習のこと．

解説2：この例題の結果は，曲げの系のひずみエネルギと軸力系のそれを個別に評価してそれらを加えれば曲げと軸力が同時に作用する系のひずみエネルギになると言っている．

基本例題8.06 教科書の例題3.2の系の棒のひずみエネルギの値を求めよ．

解答 棒の横断面積の変化は$A(x)=\frac{\pi}{4}\left(D_1+\frac{D_2-D_1}{l}x\right)^2$であるから，系のひずみエネルギは

$$U=\int_0^l\frac{N^2}{2AE}dx=\frac{P^2}{2E}\frac{4}{\pi}\int_0^l\frac{1}{\left(D_1+\frac{D_2-D_1}{l}x\right)^2}dx$$

より，

$$U=\frac{2P^2 l}{\pi E D_1 D_2}$$

である．■

基本例題8.07　教科書の例題3.3の系の棒のひずみエネルギの値を求めよ．また，断面積がxの関数であるときの値はどうなるか．

解答　ひずみエネルギ密度は$u=\frac{1}{2E}\sigma_x^2$であり，$\sigma_x=\varrho g x$であるから，

$$u=\frac{(\varrho g)^2}{2E}x^2$$

となり，系全体のひずみエネルギは

$$U=\frac{(\varrho g)^2}{6E}l^3 A$$

である．もし，断面積がxの関数なら，

$$U=\frac{(\varrho g)^2}{2E}\int_0^l x^2 A dx$$

である．■

基本例題8.08　教科書の例題7.2の系の棒のひずみエネルギの値を求めよ．

解答　棒の断面二次極モーメントの変化は$I_p(x)=\frac{\pi}{32}\left(D_A+\frac{D_B-D_A}{L}x\right)^4$であるから，系のひずみエネルギは

$$U=\int_0^L \frac{T^2}{2GI_p}dx=\frac{T^2}{2G}\frac{32}{\pi}\int_0^L \frac{1}{\left(D_A+\frac{D_B-D_A}{l}x\right)^4}dx$$

より，

$$U=\frac{32T^2 L}{6\pi G}\frac{D_A^2+D_A D_B+D_B^2}{D_A^3 D_B^3}$$

である．■

基本事項2（カスティリアノの定理の応用1）

1．カスティリアノの定理は，弾性体が外力を受けて変形したときの弾性体内のひずみエネルギと弾性体に作用した外力のなす仕事との関係から出てくる．導出については，教科書あるいは参考書を参照してもらうとして，大事な式は

$$u_i=\frac{\partial U}{\partial P_i}$$

である．ここで，P_iは一般化力であり，u_iは一般化変位である．一般化力とは，力やモーメントであり，一般化変位とは，伸縮量・たわみや角度変化量である．力に対しては伸縮量・たわみが対応し，モーメントに対しては角度変化量が対応する．一般化力と一般化変位の積は常に仕事の単位N・mである．

2．u_iはP_iの作用点におけるP_iの向きの一般化変位であることに注意する．

3. ひずみエネルギは内力のエネルギである. カスティリアノの定理では, 外力で微分するので, ひずみエネルギは外力を使って表されていなければならない.

注意:2. で述べた点は特に重要である. もし, 一般化力の作用点でその向き以外の一般化変位を求めたいならば, 何らかの工夫が必要になる.

基本例題8.10　基本例題8.01において, 荷重点での伸縮量δを求めよ.

解答　カスティリアノの定理から,

$$\delta=\frac{dU}{dP}=\frac{d}{dP}\left(\frac{P^2 l}{2AE}\right)=\frac{Pl}{AE}$$

である. ■

解説1:**基本例題8.01**でみたように, ひずみエネルギは内力Nの正負に関わらず$\frac{P^2 l}{2AE}$である. これを外力Pで微分すると答えの値になるが, 作用する力が正であるか負であるかの情報はどこにもない.
解説2:もし外力が圧縮力なら答えの式でPの代わりに$-P$としてもよさそうだが, これは間違いである. その理由は, **基本例題8.01**で内力を求める段階で正負の情報(+または-)を使っているので, ここでのPは絶対値に過ぎない.
解説3:では, 外力の正負の情報を如何にして答えに反映させるか. **基本事項2**の2を思い出す. これは, この問題なら, 圧縮力なら圧縮力の向きに, 引張力なら引張力の向きに$\frac{Pl}{AE}$変位するということである. つまり, 一般化力の向きに常に注意を払う必要がある.

基本例題8.11　基本例題8.02において, 荷重点BとCでの伸縮量δ_Bとδ_Cを求めよ.

解答　カスティリアノの定理から,

$$\delta_B=\frac{\partial U}{\partial P_B}=\frac{\partial}{\partial P_B}\left[\frac{(P_B-P_C)^2}{2AE}\frac{l}{2}+\frac{P_C^2}{2AE}\frac{l}{2}\right]=\frac{(P_B-P_C)l}{2AE}$$

$$\delta_C=\frac{\partial U}{\partial P_C}=\frac{\partial}{\partial P_C}\left[\frac{(P_B-P_C)^2}{2AE}\frac{l}{2}+\frac{P_C^2}{2AE}\frac{l}{2}\right]=-\frac{(P_B-P_C)l}{2AE}+\frac{P_C l}{2AE}=\frac{(2P_C-P_B)l}{2AE}$$

である. ■

解説:δ_Bは例題3.1の解答の$\lambda_{AB}=-\frac{(P_B-P_C)l}{2AE}$に対応するが, 符合が逆になっていることに気付く. これは, **基本事項2**の2で述べたことに関連する. この例題のδ_Bの意味は,「力P_Bは左向きの力なので, 点Bの変位は左向きに$\delta_B=\frac{(P_B-P_C)l}{2AE}$である」と言うことである. 右向きの変位を正にとると, 左向きの変位は負なので, 例題3.1のλ_{AB}と同じことを言っていることになる. なお, δ_Cは例題3.1の解答の$\lambda=\lambda_{AB}+\lambda_{BC}$の値である.

基本例題8.12　基本例題8.03(教科書の例題5.2のはり)の荷重点でのたわみδを求めよ.

解答　基本例題8.03からひずみエネルギは

$$U=\frac{P^2a^2b^2}{6EI_zl}$$

であるから, カスティリアノの定理から

$$\delta=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{Pa^2b^2}{3EI_zl}$$

である.

■

解説:この例題の答えは教科書の例題6.3の v_C の式

$$v_C=v_A+\theta_A a-\frac{Pb}{6EI_zl}a^3$$

に $v_A=0$, $\theta_A=\dfrac{Pb}{6EI_{zl}}(l^2-b^2)$ を代入すればよいので, 確認してほしい.

基本例題8.13　基本例題8.04において, T_C と T_B の作用位置での固定端Aに対するねじり角 $\varphi_C-\varphi_A$ と $\varphi_B-\varphi_A$ を求めよ. また, T_B の作用位置で $\varphi_B-\varphi_A=0$ の条件になるとき(教科書の例題7.1, 図7.5参照)の T_B を求めよ. 丸棒のねじり剛性は一定である.

解答　丸棒のねじり剛性 GI_p が一定ならひずみエネルギは

$$U=\frac{(T_C+T_B)^2}{2GI_p}l_1+\frac{T_B^2}{2GI_p}l_2$$

であるから, 固定端Aに対するCのねじり角 $\varphi_C-\varphi_A$ は

$$\varphi_C-\varphi_A=\frac{\partial U}{\partial T_C}=\frac{T_C+T_B}{GI_p}l_1$$

固定端Aに対するBのねじり角 $\varphi_B-\varphi_A$ は

$$\varphi_B-\varphi_A=\frac{\partial U}{\partial T_B}=\frac{T_C+T_B}{GI_p}l_1+\frac{T_B}{GI_p}l_2$$

である.

T_B の作用位置で $\varphi_B-\varphi_A=0$ の条件になるとき,

$$T_Cl_1+T_B(l_1+l_2)=0$$

となり,

$$T_B=-\frac{l_1}{l_1+l_2}T_C$$

である．■

解説：最後の答え $T_B=-\dfrac{l_1}{l_1+l_2}T_C$ は教科書の例題7.1の内力のねじりモーメント T_{CB} である．教科書では，外力のように表現されている．

基本例題8.14 教科書の例題6.5の支持点の反力と固定モーメントを求めよ．

解答 曲げモーメントの式は例題6.5の解答から

$$M=M_A+R_Ax-\frac{q}{2}x^2$$

である．系全体のモーメントのつりあいから，$M_A+R_Al-\dfrac{1}{2}ql^2=0$ であるから，$M_A=-R_Al+\dfrac{1}{2}ql^2$．これを用いて曲げモーメントの式を書き直すと，

$$M=R_A(x-l)-\frac{q}{2}(x^2-l^2)$$

系のひずみエネルギは

$$U=\int_0^l\frac{M^2}{2EI_z}dx=\int_0^l\frac{1}{2EI_z}\left[R_A(x-l)-\frac{q}{2}(x^2-l^2)\right]^2dx$$

となり，カスティリアノの定理から R_A の作用点におけるたわみは

$$v_A=\frac{\partial U}{\partial R_A}=\int_0^l\frac{1}{EI_z}\left[R_A(x-l)-\frac{q}{2}(x^2-l^2)\right](x-l)dx$$

$v_A=0$ でなければならないので，

$$\frac{1}{3}R_Al^3-\frac{5}{24}ql^4=0$$

これより，

$$R_A=\frac{5}{8}ql$$

が得られる．これを使うと，他の反力と固定モーメント

$$M_A=-\frac{1}{8}ql^2,\ R_B=\frac{3}{8}ql$$

である．■

解説：$M=M_A+R_Ax-\dfrac{q}{2}x^2$ をそのまま使うと，系のひずみエネルギは

$$U=\int_0^l\frac{M^2}{2EI_z}dx=\int_0^l\frac{1}{2EI_z}\left[M_A+R_Ax-\frac{q}{2}x^2\right]^2dx$$

これと固定端の条件 $v_A=\dfrac{\partial U}{\partial R_A}=0$，$\theta_A=\dfrac{\partial U}{\partial M_A}=0$ の条件を使えば求められそうである．ところが，・・・．なぜだろう．

基本例題8.15　教科書の例題6.6の支持点の反力と固定モーメントを求めよ. (その1 : R_BとM_Bを未知量として)

解答　ここでは, R_BとM_Bを求めてみる. 曲げモーメントの式は例題6.6の解答から

$$M=M_A+R_Ax$$

である. 系の力のつりあいから$R_A=-R_B$, モーメントのつりあいから$M_A=M_B+R_Bl$となるので, これを用いて曲げモーメントの式を書き直すと,

$$M=M_B+R_B(l-x)$$

ひずみエネルギは

$$U=\int_0^l \frac{1}{2EI_z}[M_B+R_B(l-x)]^2dx$$

端Bの条件は$v_B=\dfrac{\partial U}{\partial R_B}=\delta_B$, $\theta_B=\dfrac{\partial U}{\partial M_B}=0$であるから, これらより

$$M_Bl+\frac{1}{2}R_Bl^2=0$$

$$\frac{1}{2}M_Bl^2+\frac{1}{3}R_Bl^3=\delta_BEI_z$$

となり,

$$R_B=\frac{12EI_z}{l^3}\delta_B,\quad M_B=-\frac{6EI_z}{l^2}\delta_B$$

が得られる. これらを使うと, 他の反力と固定モーメントは

$$R_A=-\frac{12EI_z}{l^3}\delta_B,\quad M_A=\frac{6EI_z}{l^2}\delta_B$$

である. ■

解説1 : この例題の答えから, $R_A=-R_B=-\dfrac{12EI_z}{l^3}\delta_B$であり, M_Aはモーメントのつりあいから$M_A=M_B+R_Bl=\dfrac{6EI_z}{l^2}\delta_B$となる.

解説2 : さて, この例題では, 端Bの条件は$v_B=\dfrac{\partial U}{\partial R_B}=\delta_B$と置いている. 例題6.6では$v(x=l)=v_B=-\delta_B$としている. これはなぜだろうか(気付いていないだろうなぁ). この例題ではカスティリアノの定理を用いていることを思い出そう. この定理では, **基本事項2**の2を思い出すと, 反力R_Bは図6.13のように上向きで, 点Bのδ_Bも上向きで同じ向きなのでマイナス符合は不要である. 例題6.6ではたわみは下向きに正, 点Bのδ_Bは上向きなので, たわみとしては負になるので, $v(x=l)=v_B=-\delta_B$となっている. カスティリアノの定理では一般化力の向きと一般化変位の向きの関係に注意しなければならない.

基本例題8.16　教科書の例題6.6の支持点の反力と固定モーメントを求めよ. (その2 : R_AとM_Aを未知量として)

解答　ここでは，R_AとM_Aを求める．曲げモーメントの式は同例題の解答から

$$M=M_A+R_Ax$$

であるので，ひずみエネルギは

$$U=\int_0^l \frac{1}{2EI_z}[M_A+R_Ax]^2dx$$

端Aの条件は$v_A=\dfrac{\partial U}{\partial R_A}=-\delta_B$，$\theta_A=\dfrac{\partial U}{\partial M_A}=0$であるから，これらより

$$M_Al+\frac{1}{2}R_Al^2=0$$

$$\frac{1}{2}M_Al^2+\frac{1}{3}R_Al^3=-\delta_BEI_z$$

となり，

$$R_A=-\frac{12EI_z}{l^3}\delta_B,\ M_A=\frac{6EI_z}{l^2}\delta_B$$

が得られる．■

解説:この例題では，端Aの条件は$v_A=\dfrac{\partial U}{\partial R_A}=-\delta_B$と置いている．理由はもうわかったはずである．つまり，反力R_Aは図6.13のように上向きで，一方点Aの変位は点Bを基準に考えるとδ_Bだけ下方に移動していることになる．つまり，R_Aの向きとδ_Bの向きは逆！ゆえにマイナス符合が必要になるのである．

基本例題8.17　教科書の演習問題7.4の荷重点の変位をカスティリアノの定理を用いて求めよ．

解答　部材ABについて，曲げモーメントは$M_{AB}=-Pl_1+Px_1$，ねじりモーメントは$T_{AB}=Pl_2$であるから，ひずみエネルギは

$$U_{AB}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^{l_1}[-Pl_1+Px_1]^2dx_1+\frac{(Pl_2)^2l_1}{2GI_p}$$

ここで，x_1はAを基準にBに向かって取っている．

部材BCについて，曲げモーメントは$M_{BC}=-Pl_2+Px_2$，$T_{BC}=0$であるから，ひずみエネルギは

$$U_{BC}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^{l_2}[-Pl_2+Px_2]^2dx_2$$

である．全ひずみエネルギは$U=U_{AB}+U_{BC}$であるから，カスティリアノの定理から

$$\delta_C=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{Pl_1^3}{3EI_z}+\frac{Pl_1l_2^2}{GI_p}+\frac{Pl_2^3}{3EI_z}$$

である．■

基本例題8.18　図8.1の構造の荷重点の変位をカスティリアノの定理を用いて求めよ．曲げ剛性をEI_z，ねじり剛性をGI_pとする．すべての部材はx-z平面内にあり，荷重Pはx-z平面に垂直である．

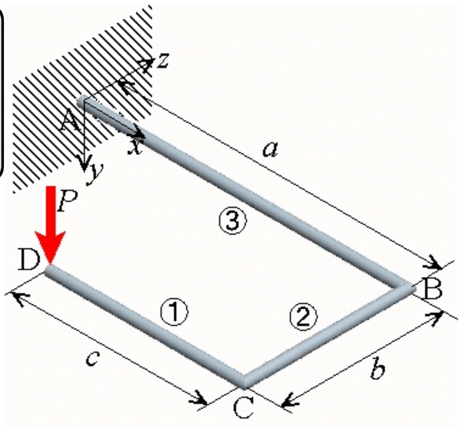


図8.1

解答　この系のフリーボディダイヤグラムは図8.2のようになる．

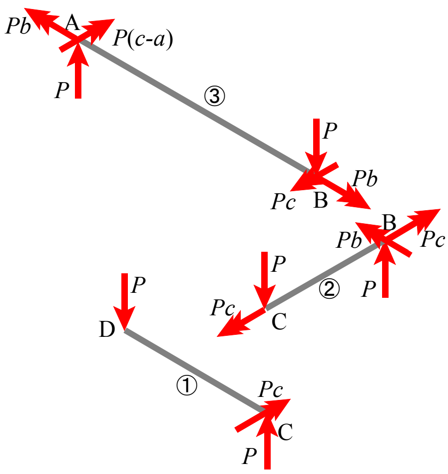


図8.2

部材①について，点DからCに向かってx_1軸をとると，この部材のひずみエネルギは

$$U_{DC}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^c (Px_1)^2dx_1$$

部材②について，点CからBに向かってx_2軸をとると，

$$U_{CB}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^b (Px_2)^2dx_2+\frac{1}{2GI_p}\int_0^b (Pc)^2dx_2$$

部材③について，点AからBに向かってx_3軸をとると，

$$U_{AB}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a [P(c-a)+Px_3]^2dx_3+\frac{1}{2GI_p}\int_0^a (Pb)^2dx_3$$

となり，全ひずみエネルギは

$$U=U_{DC}+U_{CB}+U_{AB}$$

である．荷重点の変位(δ_Dとする)は，全ひずみエネルギをPで偏微分して，

$$\delta_D=\frac{P}{EI_z}\int_0^c x_1^2dx_1+\frac{P}{EI_z}\int_0^b x_2^2dx_2+\frac{Pc^2}{GI_p}\int_0^b dx_2+\frac{P}{EI_z}\int_0^a (c-a+x_3)^2dx_3+\frac{Pb^2}{GI_p}\int_0^a dx_3.$$

から計算することができ，積分を実行すると，δ_Dは

$$\delta_D=\frac{Pc^3}{3EI_z}+\frac{Pb^3}{3EI_z}+\frac{P}{3EI_z}[(a-c)^3+c^3]+\frac{Pbc^2}{GI_p}+\frac{Pab^2}{GI_p}$$

である．(章末に数値計算の例題があります．)■

解説1：部材③では，AからBに向かってx_3軸を取ったが，逆にBからAに向かってとってもかまわない．このときの曲げモーメントの式は$M=Pc-Px_3$となり，ひずみエネルギは

$$U_{AB}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a (Pc-Px_3)^2dx_3+\frac{1}{2GI_p}\int_0^a (Pb)^2dx_3$$

という式で表されるが，結果は同じである．

解説2：点Bのたわみ角は，$M_B=Pc$で表し，x_3軸をAからBに向かってとると曲げモーメントの式は$M=M_B-Pa+Px_3$と表されるから，

$$\theta_B=\frac{1}{2EI_z}\frac{\partial}{\partial M_B}\int_0^a (M_B-Pa+Px_3)^2dx_3=\frac{P}{2EI_z}(2ca-a^2)$$

x_3軸を逆に取ると曲げモーメントの式は$M=M_B-Px_3$となるが，次のように同じ結果が得られる．

$$\theta_B=\frac{1}{2EI_z}\frac{\partial}{\partial M_B}\int_0^a (M_B-Px_3)^2dx_3=\frac{P}{2EI_z}(2ca-a^2)$$

解説3:この解説は少し余計なお世話かもしれないが，御用とお急ぎでなければ付き合ってください．

点Bのたわみ角を普通に求めてみよう．x_3軸をAからBに向かってとると曲げモーメントの式は$M=Pc-Pa+Px_3$であるから，たわみの微分方程式は

$$\frac{d^2v_{AB}}{dx_3^2}=\frac{-1}{EI_z}(Pc-Pa+Px_3)$$

となり，たわみ角の式は，

$$\theta_{AB}=\frac{dv_{AB}}{dx_3}=-\frac{P}{EI_z}\left(cx_3-ax_3+\frac{1}{2}x_3^2\right)+\theta_A$$

となる．$x_3=0$，すなわち固定支持点Aでたわみ角がゼロでなければならない条件から$\theta_A=0$となり，点Bのたわみ角は

$$\theta_B=\frac{-P}{2EI_z}(2ca-a^2)$$

となる．あれ？解説2のたわみ角と比べると正負が逆になっている．これはどうしてでしょうか？(いくら間違いの多いオジサンとはいえ，ここの計算は間違っていないし，解説2の計算も間違っていませんぜ．へっへっへ．)

ここで質問:x_3軸をBからAに向かってとると曲げモーメントの式は$M=Pc-Px_3$であるから，たわみの微分方程式は

$$\frac{d^2v_{AB}}{dx_3^2}=\frac{-1}{EI_z}(Pc-Px_3)$$

となり，たわみ角の式は

$$\theta_{AB}=\frac{dv_{AB}}{dx_3}=-\frac{P}{EI_z}\left(cx_3-\frac{1}{2}x_3^2\right)+C$$

となる．ここでCは積分定数である．この定数は$x_3=a$，すなわち固定支持点Aでたわみ角がゼロでなければならない条件から，$C=\frac{P}{2EI_z}(2ca-a^2)$となる．点Bでのたわみ角は$x_3=0$を代入すると

$$\theta_B=\frac{P}{2EI_z}(2ca-a^2)$$

となる．おお！．解説2の答えと同じになった！やったぁ！ところが，こちらは間違い(は言い過ぎであるが)である．なにがどう間違っているのでしょうか？(さあ，普段使わない，というか，使わなくなって久しいさびついた頭を使って考えてみよう．ほーっ，ほっほっほ．)

もう一つ質問:点Bのたわみは，x_3軸をAからBに向かってとる座標系では$v_B=\frac{Pa^2}{6EI_z}(2a-3c)$となり，$x_3$軸をBからAに向かってとる座標系でも同じ値になる．さて，これもなーんでか？

また一つ質問:U_{AB}の曲げに関する項だけをPで微分して得られる値はv_Bを表さない．なーんでか？では，正しくv_Bを表すようにするにはどうしたらいいか？また，$\frac{\partial U_{AB}}{\partial P}-v_B$は何を表すか？

基本例題8.19 教科書の演習問題7.5の荷重点の変位をカスティリアノの定理を用いて求めよ．

解答　教科書のp.97の図7.15のフリーボディダイヤグラム(図8.3)のモーメントの定義に合わせると，**基本例題6.29**の答えで固定モーメントの正負を逆にして

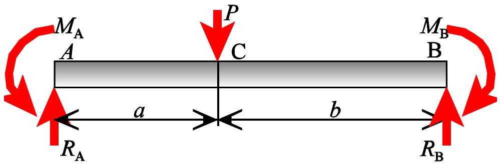


図8.3

$$M_A=\frac{ab^2}{l^2}P,\ M_B=\frac{a^2b}{l^2}P,\ R_A=\frac{(3a+b)b^2}{l^3}P,\ R_B=\frac{(a+3b)a^2}{l^3}P$$

である．ただし，$l=a+b$である．曲げモーメントはx_1をAを基準にBに向かって取ると，

$$M_{AC}=-M_A+R_Ax_1$$

$$M_{CB}=-M_A+R_Ax_1-P(x_1-a)=-M_B+R_B(l-x_1)$$

ねじりモーメントは$T_{AC}=\frac{b}{l}Pc$，$T_{CB}=\frac{a}{l}Pc$であるから，部材ACBのひずみエネルギは

$$U_{ACB}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a[-M_A+R_Ax_1]^2dx_1+\frac{1}{2EI_z}\int_a^l[-M_B+R_B(l-x_1)]^2dx_1+\frac{(Pc)^2}{2GI_pl^2}(b^2a+a^2b).$$

これから，

$$U_{ACB}=\frac{a}{6EI_z}\frac{P^2}{l^6}a^2b^4(3a^2+b^2)+\frac{b}{6EI_z}\frac{P^2}{l^6}a^4b^2(a^2+3b^2)+\frac{(Pc)^2ab}{2GI_pl}$$
$$=\frac{P^2}{6EI_z}\frac{(ab)^3}{l^3}+\frac{(Pc)^2ab}{2GI_pl}$$

となる．部材CDのひずみエネルギは**基本例題8.17**のl_2をcに置き換えればよいので，系全体のひずみエネルギは

$$U=\frac{P^2}{6EI_z}\frac{(ab)^3}{l^3}+\frac{(Pc)^2ab}{2GI_pl}+\frac{P^2c^3}{6EI_z}$$

となるから，荷重点Dでの変位は

$$\delta_D=\frac{P}{3EI_z}\frac{(ab)^3}{l^3}+\frac{Pabc^2}{GI_pl}+\frac{Pc^3}{3EI_z}$$

である．■

解説1:この例題のひずみエネルギを計算する場合，M_AやM_Bなどの値を代入してから計算するとかなり面倒なので，たとえば，$\int_0^a[-M_A+R_Ax_1]^2dx_1$の計算で$-M_A+R_Ax_1$をまとめて一つの変数において計算すると，直ちに

$$U_{ACB}=\frac{a}{6EI_z}[R_A^2a^2-3R_AaM_A+3M_A^2]+\frac{b}{6EI_z}[R_B^2b^2-3R_BbM_B+3M_B^2]+\frac{(Pc)^2ab}{2GI_pl}$$

のように計算できる．また，

$$R_A^2a^2-3R_AaM_A+3M_A^2=R_A^2a^2-3M_A(R_Aa-M_A)$$

と変形すると，$R_Aa-M_A=2\frac{(ab)^2}{l^3}P$となるから計算しやすい．

解説2:もっとずぼらをかますなら，**解答**の最初に挙げたM_AやM_Bなどの値にある規則を見つけると，

$$\int_0^a[-M_A+R_Ax_1]^2dx_1=\frac{1}{3R_A}[-M_A+R_Ax_1]^3\Big|_0^a$$

の値を計算しておいて，もう一つの積分はこの値でaとbを入れ換えるだけでいいだろうということがなんとなく予想がつくだろう．

基本例題8.20　基本例題8.19のM_AとR_Aをカスティリアノの定理を用いて求めよ.

解答　点Aからx軸をとると，曲げモーメントの式は

$$M_{AC}=-M_A+R_Ax,\ M_{CB}=-M_A+R_Ax-P(x-a)$$

であるから，ひずみエネルギの式は

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a(-M_A+R_Ax)^2dx+\frac{1}{2EI_z}\int_a^{a+b}[-M_A+R_Ax-P(x-a)]^2dx$$

である．点Aでたわみ角がゼロである条件から

$$\frac{\partial U}{\partial M_A}=\int_0^a(-M_A+R_Ax)dx+\int_a^{a+b}[-M_A+R_Ax-P(x-a)]dx=0$$

これより，

$$\int_0^{a+b}(-M_A+R_Ax)dx+P\int_a^{a+b}(x-a)dx=0 \quad\to\quad 2(a+b)M_A-(a+b)^2R_A=-Pb^2 \qquad \text{(A)}$$

点Aでたわみがゼロである条件から

$$\frac{\partial U}{\partial R_A}=\int_0^a(-M_A+R_Ax)xdx+\int_a^{a+b}[-M_A+R_Ax-P(x-a)]xdx=0$$

これより，

$$\int_0^{a+b}(-M_A+R_Ax)xdx+P\int_a^{a+b}(x-a)xdx=0 \quad\to\quad 3(a+b)^2M_A-2(a+b)^3R_A=-Pb^2(3a+2b) \qquad \text{(B)}$$

式(A)と(B)からM_AとR_Aが得られる．■

基本例題8.21　発展例題6.23をカスティリアノの定理を用いて解け.

解答　点DからEに向かってx_1座標をとると，③部材の曲げモーメントは$M_{DE}=-Pc+Px_1$であるので，ひずみエネルギは

$$U_{DE}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^c(-Pc+Px_1)^2dx_1$$

点DからBに向かってx_2座標をとると，②部材の曲げモーメントは$M_{DB}=-Px_2$，ねじりモーメントは$T_{DB}=Pc$であるから，ひずみエネルギは

$$U_{DB}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^b(-Px_2)^2dx_2+\frac{1}{2GI_p}\int_0^b(Pc)^2dx_2$$

点AからCに向かってx_3座標をとると，①部材の曲げモーメントは$M_{AB}=R_Ax_3=\frac{l-a-c}{l}Px_3$，$M_{BC}=\frac{a+c}{l}P(l-x_3)$，ねじりモーメントは$T_{AB}=\frac{l-a}{l}Pb$，$T_{BC}=-\frac{a}{l}Pb$であるから，ひずみエネルギは

$$U_{AC}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a\left(\frac{l-a-c}{l}Px_3\right)^2dx_3+\frac{1}{2EI_z}\int_a^l\left(\frac{a+c}{l}P(l-x_3)\right)^2dx_3+\frac{1}{2GI_p}\int_0^a\left(\frac{l-a}{l}Pb\right)^2dx_3+\frac{1}{2GI_p}\int_a^l\left(-\frac{a}{l}Pb\right)^2dx_3$$

荷重点Eでの荷重方向の変位δ_Eは全ひずみエネルギをPで微分して，

$$\delta_E=\frac{Pc^3}{3EI_z}+\frac{Pb^3}{3EI_z}+\frac{Pbc^2}{GI_p}+\frac{Pab^2(l-a)}{GI_pl}+\frac{P}{3EI_z}\left(\frac{l-a-c}{l}\right)^2a^3+\frac{P}{3EI_z}\left(\frac{a+c}{l}\right)^2(l-a)^3$$

である．■

解説1:①部材のBC間の曲げモーメントは,

$$M_{BC}=\frac{l-a-c}{l}Px_3-P(x_3-a)+Pc$$

となるが, これを整理すると$M_{BC}=\dfrac{a+c}{l}P(l-x_3)$が得られる. この表記のほうが積分計算が楽である.

解説2:この例題の答えであるδ_Eの式は**発展例題6.23**の結果と一見違うように見える. だが, 計算してみると同じ結果であることがわかる. ぜひ, 確認してみてくださいね. (このオジサンの答えはときどき間違えていることがあるので)

解説3:**発展例題6.40**の場合, 点AとCが曲げに対しても固定支持になるので, ①部材の曲げモーメントは, 点Aの固定モーメントをM_A(反時計回り), 反力をR_A(上向き)とすると

$$M_{AB}=M_A+R_Ax_3\text{,}\quad M_{BC}=M_A+R_Ax_3-P(x_3-a)+Pc$$

で表現される. ここでM_AとR_Aがわかっているなら, あとは計算するだけであるが, これらも求める必要があれば, ①部材に関するひずみエネルギのうち曲げに関わる項だけを取り出して, 条件からM_AとR_Aを決める. すなわち, 曲げに関わる項を$U_{AC曲げ}$で表すと,

$$\theta_A=\frac{\partial U_{AC曲げ}}{\partial M_A}=0\text{,}\quad v_A=\frac{\partial U_{AC曲げ}}{\partial R_A}=0$$

から得られる二つの式から決めることになる. まあ, 式がゴチャゴチャしないようにしましょう. ゴチャゴチャすると間違いのもとになりますよ. 詳細は**基本例題8.20**を参照.

基本例題8.22 教科書の演習問題6.5をカスティリアノの定理を用いて解け.

解答 曲げモーメントは$0\leq x\leq L$で

$$M=q_0Lx-\frac{1}{2}q_0x^2-\frac{1}{2}Px$$

ひずみエネルギは

$$U=2\times\frac{1}{2EI_z}\int_0^L\left[q_0Lx-\frac{1}{2}q_0x^2-\frac{1}{2}Px\right]^2dx.$$

点Bのたわみがゼロであるから,

$$\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{4}{2EI_z}\int_0^L\left[q_0Lx-\frac{1}{2}q_0x^2-\frac{1}{2}Px\right]\left(-\frac{1}{2}x\right)dx=0$$

となり, これより

$$P=\frac{5}{4}q_0L$$

である. ■

解説1：ひずみエネルギの式の最初の「2×」はBについて左右対称であるため，AB間の曲げモーメントによるひずみエネルギだけを使ってそれを二倍にしているが，少し説明を加えておく．区間BCでの曲げモーメントの式は

$$M_{BC}=q_0Lx-\frac{1}{2}q_0x^2-\frac{1}{2}Px+P(x-L)=q_0Lx+\frac{1}{2}q_0x^2+\frac{1}{2}P(x-2L)$$

である．ここで$x_1=2L-x$とおくと

$$M_{BC}=q_0Lx_1-\frac{1}{2}q_0x_1^2-\frac{1}{2}Px_1$$

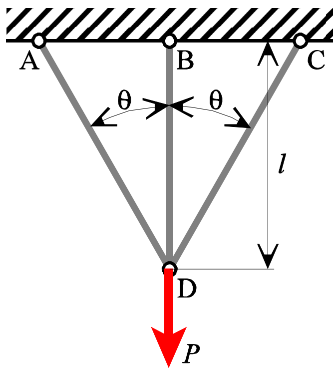
となり，これによるひずみエネルギは

$$U_{BC}=\frac{-1}{2EI_z}\int_L^0\left[q_0Lx_1-\frac{1}{2}q_0x_1^2-\frac{1}{2}Px_1\right]^2dx_1=\frac{1}{2EI_z}\int_0^L\left[q_0Lx_1-\frac{1}{2}q_0x_1^2-\frac{1}{2}Px_1\right]^2dx_1$$

になり，AB間の曲げモーメントによるひずみエネルギと同じ形をしている．

解説2：この例題の答えは，教科書の例題6.5の固定支持点Aでの反力の二倍になっている．図6.11の固定支持点Aに鏡を置いてみるとそのわけがわかる．

基本例題8.23　図8.4の構造の部材に生ずる内力を求めよ．



解答　部材AD，CDの内力をN_{AD}，N_{CD}とすると，構造の対称性から$N_{AD}=N_{CD}$．部材BDの内力をN_{BD}で表すと，力のつりあいは

$$2N_{AD}\cos\theta+N_{BD}-P=0$$

であるから，

$$N_{BD}=\frac{P-N_{AD}}{2\cos\theta}$$

と表される．部材ADとCDからなる系のひずみエネルギは

$$U_1=2\times\frac{1}{2AE}N_{AD}^2\frac{l}{\cos\theta}=\frac{l}{2AE}\frac{(P-N_{BD})^2}{2\cos^3\theta}$$

部材ADとCDからなる系の点Dの垂直方向変位は，この系の外力が$P-N_{BD}$であるので$Q=P-N_{BD}$として

$$\delta_D=\frac{\partial U_1}{\partial Q}=\frac{l}{AE}\frac{P-N_{BD}}{2\cos^3}$$

である．部材BDの系のひずみエネルギは

$$U_2=\frac{l}{2AE}N_{BD}^2$$

であるから，部材BDの長さの変化量λ_{BD}は

$$\lambda_{BD}=\frac{\partial U_2}{\partial N_{BD}}=\frac{N_{BD}l}{AE}$$

である．点Dの垂直方向変位と部材BDの長さの変化量が等しくなければならない，すなわち，$\delta_D=\lambda_{BD}$でなければならないので，

$$N_{BD}=\frac{P}{1+2\cos^3\theta}.$$

これと力のつりあいから

$$N_{AD}=N_{CD}=\frac{P\cos^2\theta}{1+2\cos^3\theta}$$

が得られる. ■

解説:さて, この例題を少し考え直してみよう. 部材BDの内力N_{BD}は部材ADとCDからなる系にとっては外力なので,

$$\frac{\partial U_1}{\partial N_{BD}}=-\frac{l}{AE}\frac{P-N_{BD}}{2\cos^3\theta}$$

は部材ADとCDからなる系における点Dの上向きの変位量である. 一方, 部材BDの長さの変化量との間には

$$\lambda_{BD}-\frac{l}{AE}\frac{P-N_{BD}}{2\cos^3\theta}=0$$

が成り立つ必要があるから, 結局

$$\frac{\partial U_2}{\partial N_{BD}}+\frac{\partial U_1}{\partial N_{BD}}=\frac{\partial(U_1+U_2)}{\partial N_{BD}}=0$$

と書き直すことができる. ここでU_1+U_2は系全体のひずみエネルギを表している. つまり, 系全体のひずみエネルギを不静定量(今の場合, N_{BD})で微分してゼロにおくと, 不静定量を求めることができるようである. ほんまやろか.

発展例題8.24　基本例題6.28を**基本例題8.23**の解説で述べた(系全体のひずみエネルギを不静定量で微分してゼロにおくと, 不静定量を求めることができる)ことを用いて解け.

解答　この例題では点Bのたわみv_Bを求めるので, 不静定量として$R_B=kv_B$を用いる. 系のひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a M_{AC}^2dx+\frac{1}{2EI_z}\int_a^{a+b}M_{CB}^2dx+\frac{1}{2k}R_B^2$$

不静定量R_Bで偏微分して

$$\frac{\partial U}{\partial R_B}=\frac{1}{EI_z}\int_0^a[kv_B(l-x)+P(x-a)](l-x)dx+\frac{1}{EI_z}\int_a^{a+b}kv_B(l-x)^2dx+v_B=0$$

から,

$$\frac{1}{3EI_z}kv_Bl^3-\frac{1}{6EI_z}a^2(3l-a)P+v_B=0$$

が得られ, これより,

$$v_B=\frac{(3l-a)a^2}{6EI_z+2kl^3}P$$

■

解説：答えは一致していることがわかるだろう．これを最小仕事の定理という．このまま覚えてしまってもよいが，一応考えておくことにする．**基本例題8.23**では，不静定量N_{BD}は部材ADとCDからなる系に対して上向きの力，BDの系に対しては下向きの力である．これらの力による変位の向きも互いに逆であり，点Dは離れないので変位の和がゼロでなければならない．ゆえに，系全体のひずみエネルギをN_{BD}で偏微分したときにゼロにならなければならないと考えることができる．**発展例題8.24**では，不静定量R_Bははりの系の点Bに対して上向きのたわみを生じ，バネの系に対してはバネを縮めるはたらきをするので，系全体のひずみエネルギをR_Bで偏微分したときにゼロにならなければならないと考えることができる．N_{BD}も$R_B=kv_B$も系全体でみたときには作用反作用の関係で見えなくなる．

基本事項3（カスティリアノの定理の応用2-仮想荷重と単位荷重法-）

基本事項2の注意で述べたように，ここでは一般化力の作用点以外の点での一般化変位の求め方について述べる．カスティリアノの定理は一般化力の作用点での一般化力の向きの一般化変位しか求められない．ということは，実際の一般化力の作用点以外の任意の点での一般化変位を求めるためには

ステップ1)　求めたい一般化変位の方向に一般化力を負荷する．－この一般化力は実際には作用していない．

ステップ2)　この一般化力を含めて系のひずみエネルギを求める．

ステップ3)　ひずみエネルギを一般化力で偏微分する．－実際には作用していない点での一般化変位が求められる．

ステップ4)　実際には作用していない一般化力をゼロにする．

というプロセスになる．このような，実際には作用していない一般化力を仮想荷重とよぶ．

基本例題8.25　教科書の例題9.4において，点Cの垂直方向変位δ_{CV}と水平方向変位δ_{CH}をカスティリアノの定理を用いて求めよ．

解答　点Cには垂直方向の荷重Pのみが作用しているから，[ステップ1)]水平右向きに仮想荷重Qを負荷すると，力のつりあいは

$$\text{水平方向：}\quad N_{AC}\cos\frac{\pi}{4}+N_{BC}-Q=0$$

$$\text{垂直方向：}\quad N_{AC}\sin\frac{\pi}{4}-P=0$$

これらより，

$$N_{AC}=\sqrt{2}P,\quad N_{BC}=Q-P$$

が得られ，[ステップ2)]これらを用いるとひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2AE}N_{AC}^2\sqrt{2}l+\frac{1}{2AE}N_{BC}^2l=\frac{2\sqrt{2}l}{2AE}P^2+\frac{l}{2AE}(Q-P)^2$$

[ステップ3)]カスティリアノの定理から，

$$\delta_{CV}=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{2\sqrt{2}lP}{AE}-\frac{l}{AE}(Q-P),\qquad \delta_{CH}=\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{l}{AE}(Q-P)$$

[ステップ4)]仮想荷重Qは実際には作用していないので，$Q=0$とすると，

$$\delta_{CV}=\frac{Pl}{AE}(2\sqrt{2}+1),\quad \delta_{CH}=-\frac{Pl}{AE}$$

である．■

解説：答えで$\delta_{CH}=-\dfrac{Pl}{AE}$のようにマイナスが付いているのは，仮想荷重$Q$を右向きにとっているのに対して，実際の水平方向変位は左向きに$\dfrac{Pl}{AE}$だといっている．もし，Qを左向きによると，系のひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2AE}N_{AC}^2\sqrt{2}l+\frac{1}{2AE}N_{BC}^2 l=\frac{2\sqrt{2}l}{2AE}P^2+\frac{l}{2AE}(Q+P)^2$$

となるから，

$$\delta_{CH}=\frac{Pl}{AE}$$

となって仮想荷重の向きと水平方向変位と同じになる．

基本例題8.26　教科書の例題9.5において，点Bのたわみ角θ_Bと点Cのたわみv_Cをカスティリアノの定理を用いて求めよ．

解答　点Bに反時計回りに仮想モーメントM_Bを，点Cに下向きに仮想横荷重P_Cを負荷すると，曲げモーメントの式は$l=a+b$として

$$M_{AB}=(M_B-Pa-P_C l)+(P+P_C)x\,,$$

$$M_{BC}=(M_B-Pa-P_C l)+(P+P_C)x-P(x-a)-M_B=-P_C l+P_C x$$

であるから，ひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a M_{AB}^2 dx+\frac{1}{2EI_z}\int_a^l M_{BC}^2 dx$$

点Bのたわみ角θ_Bは

$$\theta_B=\frac{\partial U}{\partial M_B}=\frac{1}{EI_z}\int_0^a[M_B-Pa-P_C l+(P+P_C)x]dx$$

ここで$M_B=0$，$P_C=0$として積分すると，

$$\theta_B=-\frac{Pa^2}{2EI_z}$$

となり，点Cのたわみv_Cは

$$v_C=\frac{\partial U}{\partial P_C}=\frac{1}{EI_z}\int_0^a[M_B-Pa-P_c l+(P+P_C)x](-l+x)dx+\frac{1}{EI_z}\int_a^l(-P_C l+P_C x)(-l+x)dx$$

ここで$M_B=0$，$P_C=0$として積分すると，

$$v_C=\frac{Pa^3}{3EI_z}+\frac{Pa^2 b}{2EI_z}$$

である．■

解説：$\theta_B=-\dfrac{Pa^2}{2EI_z}$となってマイナスが付いているのは，仮想モーメント$M_B$を反時計回りにとっているのに対して，実際のたわみ角は時計回りに$\dfrac{Pa^2}{2EI_z}$だといっていることになる．つまり，たわみが増加する方向に$\dfrac{Pa^2}{2EI_z}$である．

基本例題8.27　教科書の図5.15のはりの任意点のたわみをカスティリアノの定理を用いて求めよ．

解答　点AからXの点に仮想横荷重Pを下向きに負荷すると，曲げモーメントの式は

$$M_{AX}=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{l-X}{l}Px$$

$$M_{XB}=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{l-X}{l}Px-P(x-X)=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{X}{l}P(l-x)$$

であるから，ひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^X\left[\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{l-X}{l}Px\right]^2dx+\frac{1}{2EI_z}\int_X^l\left[\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{X}{l}P(l-x)\right]^2dx$$

仮想横荷重Pで偏微分した後，$P=0$とおくと

$$\delta_X=\frac{1}{EI_z}\int_0^X\left[\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right]\frac{l-X}{l}xdx+\frac{1}{EI_z}\int_X^l\left[\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right]\frac{X}{l}(l-x)dx$$

となり，これから

$$\begin{aligned}\delta_X&=\frac{q}{24EI_zl}X^3(4l-3X)(l-X)+\frac{q}{24EI_zl}X(l-X)^3(l+3X)\\&=\frac{qX(l-X)}{24EI_z}(l^2+Xl-X^2)\end{aligned}$$

となる．■

解説1：Xは任意点なので，δ_Xの値ははりのたわみ関数そのものになっている．つまり，たわみ関数は

$$v=\frac{qx(l-x)}{24EI_z}(l^2+xl-x^2)$$

である．

さて，仮想荷重を使うときは，仮想荷重の二次の項は最終的には消えるし，実荷重の二次の項は仮想荷重に無関係であることに気付いた人もいるだろう．**基本例題8.27**のひずみエネルギで確かめてみると，第一の積分の被積分関数は

$$\left[\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2+\frac{l-X}{l}Px\right]^2=\left(\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right)^2+2\left(\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right)\frac{l-X}{l}Px+\left(\frac{l-X}{l}Px\right)^2$$

であり，仮想荷重Pで偏微分したときに残る項は第二，三項目だけであり，偏微分した後に$P=0$としたときに残る項は第二項目だけである．すなわち，項

$$2\left(\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right)\frac{l-X}{l}Px$$

だけが残っていれば用は足りる．この項を偏微分するとPが消えて

$$2\left(\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2\right)\frac{l-X}{l}x$$

となる．この項についてもう少し考えてみると，()内は実荷重のみによる曲げモーメントの項で，$\frac{l-X}{l}x$はAからXの点に下向きの単位荷重(大きさが1)のみが作用したときの曲げモーメントになっていることがわかる．いま，実荷重のみによる曲げモーメントをシンボルMで表し，単位荷重が作用したときの曲げモーメントをシンボルmで表すと，

$$\delta_X=\frac{1}{EI_z}\int_0^X M(x)m_{AX}(x)dx+\frac{1}{EI_z}\int_X^l M(x)m_{XB}(x)dx$$

ここで，$M(x)=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2$，$m_{AX}(x)=\frac{l-X}{l}x$，$m_{XB}(x)=\frac{X}{l}(l-x)$である．

実は，この関係は軸力系でもねじりモーメントが作用する場合でも成り立つ．たとえば，**基本例題8.25**の場合，実荷重系を大文字で，単位荷重系を小文字で表すと，

$$N_{AC}=\sqrt{2}P,\ N_{BC}=-P,\ n_{AC}=0,\ n_{BC}=1$$

であるから，単位荷重の向き(右向き)の変位量は次式のように得られる．

$$\delta_{CH}=\frac{1}{AE}\int_0^{\sqrt{2}l}N_{AC}n_{AC}dx+\frac{1}{AE}\int_0^l N_{BC}n_{BC}dx=-\frac{Pl}{AE}$$

このような方法を**単位荷重法**という．

基本例題8.28　図8.5のようなトラスの荷重点Cの垂直方向変位δ_{CV}と水平方向変位δ_{CH}を求めよ．

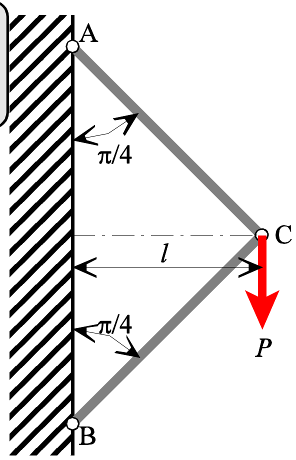


図8.5

解答　力のつりあいから$N_{AC}=\frac{P}{\sqrt{2}}$，$N_{BC}=-\frac{P}{\sqrt{2}}$であるので，ひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2AE}N_{AC}^2\sqrt{2}l+\frac{1}{2AE}N_{BC}^2\sqrt{2}l=\frac{1}{2AE}P^2\sqrt{2}l$$

垂直方向変位δ_{CV}は

$$\delta_{CV}=\frac{dU}{dP}=\sqrt{2}\frac{Pl}{AE}$$

である．

点Cに右向きの単位荷重だけを加えたときの内力は$n_{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$n_{BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$であるから，水平方向変位$\delta_{CH}$は

$$\delta_{CH}=\frac{1}{AE}N_{AC}n_{AC}\sqrt{2}l+\frac{1}{AE}N_{BC}n_{BC}\sqrt{2}l=0$$

である．■

解説：ここでは，垂直方向変位δ_{CV}を求めるためにひずみエネルギを微分して求めたが，単位荷重法を使うと

$n_{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$n_{BC}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$であるので，

$$\delta_{CV}=\frac{1}{AE}N_{AC}n_{AC}\sqrt{2}l+\frac{1}{AE}N_{BC}n_{BC}\sqrt{2}l=\sqrt{2}\frac{Pl}{AE}$$

が直ちに求められる．

基本例題8.29　図8.6のようなトラスの荷重点Cの垂直方向変位δ_{CV}と水平方向変位δ_{CH}を求めよ．

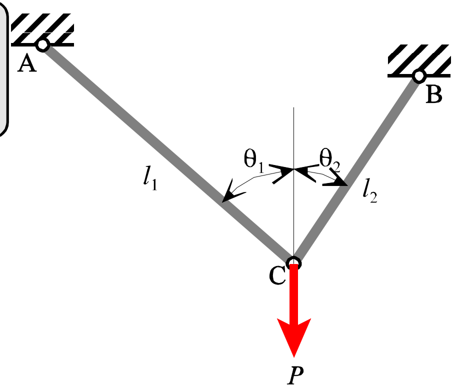


図8.6

解答　力のつりあいは

水平方向：　$N_{AC}\sin\theta_1 - N_{BC}\sin\theta_2 = 0$

垂直方向：　$N_{AC}\cos\theta_1 + N_{BC}\cos\theta_2 - P = 0$

これより，

$$N_{AC} = \frac{P\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)},\quad N_{BC} = \frac{P\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

単位荷重による部材力は$n_{AC} = \dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$，$n_{BC} = \dfrac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$であるから，垂直方向変位$\delta_{CV}$は

$$\delta_{CV} = \frac{1}{AE}N_{AC}n_{AC}l_1 + \frac{1}{AE}N_{BC}n_{BC}l_2 = \frac{P}{AE}\frac{l_1\sin^2\theta_2 + l_2\sin^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

である．

点Cに右向きの単位荷重だけを加えたときの力のつりあいは

水平方向：　$n_{AC}\sin\theta_1 - n_{BC}\sin\theta_2 - 1 = 0$

垂直方向：　$n_{AC}\cos\theta_1 + n_{BC}\cos\theta_2 = 0$

これより，$n_{AC} = \dfrac{\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$，$n_{BC} = \dfrac{-\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$であるから，水平方向変位$\delta_{CH}$は

$$\delta_{CH} = \frac{1}{AE}N_{AC}n_{AC}l_1 + \frac{1}{AE}N_{BC}n_{BC}l_2 = \frac{P}{AE}\frac{l_1\sin\theta_2\cos\theta_2 - l_2\sin\theta_1\cos\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

である．■

基本例題8.30　教科書の例題3.3の下端の変位量を求めよ．

解答　自重による内力は$N(x) = \varrho gAx$，単位荷重による内力は$n(x) = 1$であるから，下端の変位量は

$$\delta = \frac{1}{AE}\int_0^l N(x)n(x)dx = \frac{1}{AE}\int_0^l \varrho gAx\cdot 1dx = \frac{1}{2E}\varrho gl^2$$

である．■

基本例題8.31　図8.7のようなトラスの荷重点Dの垂直方向変位δ_{DV}と水平方向変位δ_{DH}を求めよ．$\overline{AB} = l$とする．

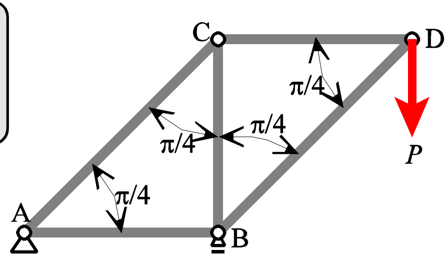


図8.7

解答　部材力は

$N_{AB} = -P$，$N_{AC} = \sqrt{2}P$，$N_{BD} = -\sqrt{2}P$，$N_{BC} = -P$，$N_{CD} = P$

であり，単位荷重による部材力は

$n_{AB} = -1$，$n_{AC} = \sqrt{2}$，$n_{BD} = -\sqrt{2}$，$n_{BC} = -1$，$n_{CD} = 1$

であるから，垂直方向変位δ_{DV}は

$$\delta_{DV}=\frac{1}{AE}(N_{AB}n_{AB}l+N_{AC}n_{AC}\sqrt{2}l+N_{BC}n_{BC}l+N_{BD}n_{BD}\sqrt{2}l+N_{CD}n_{CD}l)$$
$$=(3+4\sqrt{2})\frac{Pl}{AE}$$

である．

水平方向変位を求めるために点Dに右向きに単位荷重を加える．単位荷重による部材力は

$$n_{AB}=0,\ n_{AC}=\sqrt{2},\ n_{BD}=0,\ n_{BC}=-1,\ n_{CD}=1$$

であるから，水平方向変位δ_{DH}は

$$\delta_{DH}=\frac{1}{AE}(N_{AB}n_{AB}l+N_{AC}n_{AC}\sqrt{2}l+N_{BC}n_{BC}l+N_{BD}n_{BD}\sqrt{2}l+N_{CD}n_{CD}l)$$
$$=2(1+\sqrt{2})\frac{Pl}{AE}$$

である．■

基本例題8.32　図8.8の構造の点Cの水平および垂直変位を求めよ．

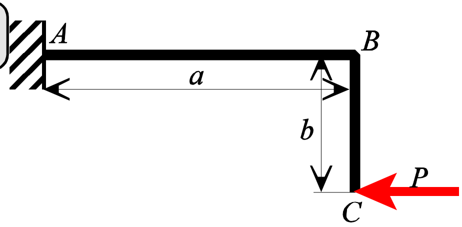


図8.8

解答　フリーボディダイヤグラムは図8.9のようである．

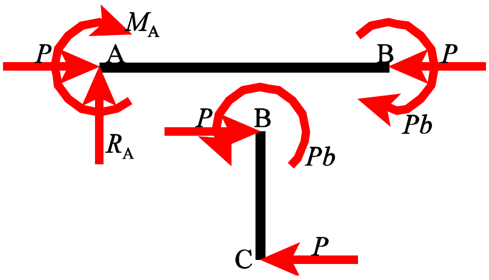


図8.9

図8.9から$M_A=-Pb$，$R_A=0$であるから，AB間の曲げモーメントは

$$M_{AB}=-Pb$$

である．BC間ではBから下向きにx_2軸をとると，曲げモーメントは

$$M_{BC}=-Pb+Px_2$$

である．軸力による内力は$N_{AB}=-P$，$N_{BC}=0$である．

以上から，系のひずみエネルギは，AからBに向かってx_1軸をとると，

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a(-Pb)^2dx_1+\frac{1}{2AE}\int_0^a(-P)^2dx_1+\frac{1}{2EI_z}\int_0^b(-Pb+Px_2)^2dx_2$$

となり，点Cの水平方向変位δ_{CH}は荷重Pの向きに

$$\delta_{CH}=\frac{dU}{dP}=\frac{Pab^2}{EI_z}+\frac{Pa}{AE}+\frac{Pb^3}{3EI_z}$$

点Cに下向きの単位荷重を加えると，これによる曲げモーメントは

$$m_{AB}=-a+x_1,\ m_{BC}=0$$

であり，軸力は$n_{AB}=0$，$n_{BC}=1$である．これより，垂直方向変位δ_{CV}は単位荷重の向きに

$$\delta_{CV}=\frac{1}{EI_z}\int_0^a(-Pb)(-a+x_1)dx_1=\frac{Pa^2b}{2EI_z}$$

である．■

解説：この例題では，実荷重系ではひずみエネルギを求めた後で実荷重で微分したが，実荷重系でも単位荷重法を使えることは当然である．単位荷重法では

$$m_{AB}=-b,\ m_{BC}=-b+x_2,\ n_{AB}=-1,\ n_{BC}=0$$

である．

基本例題8.33　図8.10の構造の点B，Cの垂直変位を求めよ．

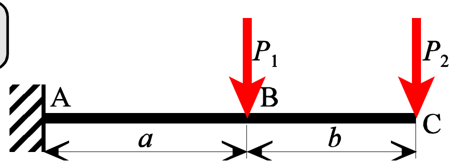


図8.10

解答　曲げモーメントの式は

$$M_{AB}=-aP_1-(a+b)P_2+(P_1+P_2)x$$
$$=-(a-x)P_1-[(a+b)-x]P_2$$

$$M_{BC}=-aP_1-(a+b)P_2+(P_1+P_2)x-P_1(x-a)$$
$$=-(a+b)P_2+P_2x$$

である．点Bの垂直変位を求めるときは，P_1とP_2の代わりに1と0を代入すると単位荷重系での曲げモーメントは

AB間　$m_{AB}=-a+x$

BC間　$m_{BC}=0$

となり，

$$\delta_B=\frac{1}{EI_z}\int_0^a\{-(a-x)P_1-[(a+b)-x]P_2\}(-a+x)dx$$

から求めることができる．

点Cの垂直変位を求めるときは，P_1とP_2の代わりに0と1を代入して

AB間　$m_{AB}=-(a+b)+x$

BC間　$m_{BC}=-(a+b)+x$

となるから，

$$\delta_C=\frac{1}{EI_z}\int_0^a\{-(a-x)P_1-[(a+b)-x]P_2\}[-(a+b)+x]dx+\frac{P_2}{EI_z}\int_a^{a+b}[-(a+b)+x]^2dx$$

から求めることができる．■

基本例題8.34　基本例題8.18の点Bのy方向変位を求めよ．

解答　ここでは，単位荷重法をつかう．点Bに単位荷重を負荷した場合の曲げモーメントは

$$m_{AB}=-a+x_3$$

であるから，δ_Bは

$$\delta_B=\frac{P}{EI_z}\int_0^a(c-a+x_3)(-a+x_3)dx_3$$

から求められるので，積分を実行すると

$$\delta_B=\frac{Pa^2}{6EI_z}(2a-3c)$$

となる．■

解説：**基本例題8.18**の解説3のv_Bの値に一致する．

いずれにしても，慣れが大切？？？

基本事項4（レーリー・リッツの近似解法）

カスティリアノの定理ではひずみエネルギを求め，荷重で微分すると荷重点の荷重方向の変形量を求めることができた．実は，この定理は外力がなした仕事とその外力によって生ずる内力によるひずみエネルギが等しいことから導き出されている．つまり，内力によるひずみエネルギは外力によって表現されていなければならない．

ここで述べるレーリー・リッツ(Rayleigh-Ritz)の解法も基本的に同じように考えてもよいが，少し違う点は「δ」を変化量を表すシンボルとして

つりあい状態にある弾性体に仮想的な微小変位を与えれば，それらの力がなす仕事の変化量δWはひずみエネルギの変化量δUに等しい

ことから導かれる．このことを弾性体の**仮想仕事の原理**という．仮想仕事の原理を式で書くと，$\Pi = U - W$という量を考えて，

$$\delta\Pi = \delta(U - W) = 0$$

と書く．ここで$\Pi = U - W$をポテンシャルエネルギという．言い換えれば，$\delta\Pi = 0$という式はポテンシャルエネルギが極値をとる条件を表すことになるが，弾性体では一般に最小値であるので「つりあい状態においては，弾性体が持つポテンシャルエネルギは極小になる」と言える．

レーリー・リッツの解法について以下の例題で理解しておこう．

基本例題8.35　長さL，曲げ剛性EI_zの片持ちはりの自由端に集中荷重Pが作用している．レーリー・リッツの解法を用いてたわみ関数を求めよ．

解答　たわみ関数をxのべき級数

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とおく．ここでa_nは仮想仕事の原理に基づいて決まる定数である．いま，固定支持点を$x = 0$におくと，固定支持点ではたわみとたわみ角がゼロであるので$a_0 = 0$，$a_1 = 0$でなければならないので，たわみ関数と荷重点のたわみは

$$v(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n,\quad v(L) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n L^n$$

で表される．たわみ関数と曲げモーメントの関係から

$$M = -EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -EI_z \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_x x^{n-2}$$

ひずみエネルギUと外力の仕事Wは

$$U = \frac{1}{2EI_z}\int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2} EI_z \int_0^L \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \right)^2 dx,\quad W = v(L)P = P\sum_{n=2}^{\infty} a_n L^n$$

である．仮想仕事の原理から

$$\frac{\partial(U-W)}{\partial a_m} = m(m-1) EI_z \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n \int_0^L x^{n+m-4} dx - PL^m = 0$$

積分を実行して

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n+m-3} a_n L^{n+m-3} = \frac{1}{m(m-1)} \frac{PL^m}{EI_z}$$

この式は，$m = 2,3,4,\cdots$について

$$\sum_{n=2}^{\infty} n a_n L^{n-1} = 2La_2 + 3L^2 a_3 + 4L^3 a_4 + \cdots = \frac{1}{2} \frac{PL^2}{EI_z}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_nL^n = L^2a_2 + 2L^3a_3 + 3L^2a_4 + \cdots = \frac{1}{6}\frac{PL^3}{EI_z}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n+1}a_nL^{n+1} = \frac{2}{3}L^3a_2 + \frac{3}{2}L^4a_3 + \frac{12}{5}L^5a_4 + \cdots = \frac{1}{12}\frac{PL^4}{EI_z}$$

....

となる. これらの式から

$$a_2 = \frac{PL}{2EI_z},\ a_3 = -\frac{P}{6EI_z},\ a_4 = a_5 = \cdots = 0$$

が得られる. ゆえに, たわみ関数は

$$v(x) = \frac{P}{6EI_z}(3Lx^2 - x^3)$$

である. ■

解説 : **解答**のプロセスを振り返ってみよう.

1. たわみ関数 $v(x)$ を仮定する.
   境界条件が満足されるように解の形を仮定する.
   たわみ関数には決めなければならない未定係数を含む.
2. ひずみエネルギ U の式と外力のなす仕事 W の式を求める.
3. 極値を持つ条件から未定係数を決める.
   このプロセスは最小自乗法に似ている.

基本例題8.36 教科書の例題6.3のたわみ関数を定めよ.

指針 : この問題の場合は少し厄介である. **基本例題8.35**のようにたわみ関数をべき級数で表現すると, 例題6.3のように荷重区間ごとにたわみ関数が異なるので, フーリエ級数解を仮定する.

解答 たわみ関数の形を, $x=0$ と $x=l$ でたわみがゼロである条件を満たすフーリエ級数表現を

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

と仮定する. 曲げモーメントの式は

$$M(x) = -EI_z\frac{d^2v(x)}{dx^2} = EI_z\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

であるから, ひずみエネルギと外力のなす仕事は

$$U = \frac{1}{2EI_z}\int_0^l M^2 dx = \frac{EI_z}{2}\int_0^l\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right]^2 dx = \frac{EI_z l}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 a_n^2,$$

$$W = Pv(a) = P\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi a}{l}$$

となり, 仮想仕事の原理から

$$\frac{\partial(U-W)}{\partial a_n} = \frac{EI_z l}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 a_n - P\sin\frac{n\pi a}{l} = 0 \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{2P}{EI_z l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^4 \sin\frac{n\pi a}{l}.$$

ゆえに，たわみ関数は

$$v(x)=\frac{2Pl^3}{\pi^4 EI_z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

である．■

解説1：ひずみエネルギの式の計算には三角関数の直交性が用いられていることはさすがにわかるだろう．

解説2：得られたたわみ関数を四回微分して曲げ剛性 EI_z を乗じると，

$$EI_z\frac{d^4v}{dx^4}=\frac{2}{l}P\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

となる．この式は，デルタ関数 $[-\delta(x+a)+\delta(x-a)]P$ の $-l\leq x\leq l$ でのフーリエ級数展開になっている．$\delta(\cdot)$ はDiracのデルタ関数．

＊＊＊まさか，こんなところでフーリエ級数やデルタ関数が出てくるとは思わなかったでしょう．ホッホッホ．

解説3：デルタ関数 $[-\delta(x+a)+\delta(x-a)]P$ の $-l\leq x\leq l$ でのフーリエ級数展開を考えよう．皆さんは，フーリエ係数の公式が思い浮かび，面倒くさい！と思うと思いますが，まず，$-l\leq x\leq l$ で正弦関数の和で表現できると仮定して，

$$[-\delta(x+a)+\delta(x-a)]P=P\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

とおいて，両辺に $\sin\frac{m\pi x}{l}$ 乗じて x について $-l\leq x\leq l$ で積分すると，左辺の積分は，デルタ関数の性質を用いて，

$$\int_{-l}^{l}[-\delta(x+a)+\delta(x-a)]\sin\frac{m\pi x}{l}dx=-\sin\frac{-m\pi a}{l}+\sin\frac{m\pi a}{l}=2\sin\frac{m\pi a}{l}$$

右辺の積分は

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=l\ \ (n=m),0\ \ (n\neq m)$$

となるから，

$$2P\sin\frac{m\pi a}{l}=PlA_m$$

となり，

$$A_m=\frac{2}{l}\sin\frac{m\pi a}{l}$$

が得られる．

基本例題8.37　基本例題8.36で $a=l/2$ のときの $x=a$ におけるたわみを求めよ．

解答　$a=\frac{l}{2}$，$x=a=\frac{l}{2}$ を代入すると

$$v\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{2Pl^3}{\pi^4 EI_z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin^2\frac{n\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

であるから，

$$v\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI_z}$$

である．■

解説：たわみの微分方程式からの解は**基本例題6.01**を参照．

基本例題8.38　図7.14の系について，たわみ関数と座屈荷重をもとめよ．

解答　横荷重Qと軸荷重Pが同時に作用している．その結果，支点Bはλだけ左へ移動する．たわみ関数は**基本例題8.36**から，$x=0$と$x=l$でたわみがゼロである条件を満たすフーリエ級数表現

$$v(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

を用いると，たわみ曲線の長さは

$$s=\int_0^l\sqrt{1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2}dx\approx\int_0^l\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]dx=l+\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx$$

である．$\lambda=s-l$とおくと，

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx$$

と表される．

曲げに伴うひずみエネルギUと横荷重Qのなす仕事W_Qは**基本例題8.36**から，

$$U=\frac{EI_zl}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4a_n^2,\quad W_Q=Q\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi a}{l}$$

軸荷重Pがなす仕事W_Pは

$$W_P=P\lambda=\frac{1}{2}P\int_0^l\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx=\frac{Pl}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a_n^2$$

となり，仮想仕事の原理

$$\frac{\partial(U-W_Q-W_P)}{\partial a_n}=\frac{EI_zl}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4a_n-Q\sin\frac{n\pi a}{l}-\frac{Pl}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2a_n=0$$

から係数a_nは

$$a_n=\frac{2}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[EI_z\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-P\right]}\frac{Q}{l}\sin\frac{n\pi a}{l}$$

となり，たわみ関数を定めることができる．

特に，座屈が生じたとすると，係数a_nを無限大にするPのうち$n=1$の場合をP_{cr}とおくと$EI_z\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-P_{cr}=0$から

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_z}{l^2}$$

となる. (この答えは**発展例題7.11**の答えに一致することがわかる.)■

解説1 : $Q=0$とすると, 仮想仕事の原理

$$\frac{\partial(U-W_P)}{\partial a_n}=\frac{EI_z l}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 a_n-\frac{Pl}{2}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a_n=0$$

から

$$\frac{l}{2}a_n\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\left[EI_z\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-P\right]=0.$$

この条件を満たすPのうち$n=1$の場合をP_{cr}とおくと$EI_z\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-P_{cr}=0$となるから同じ式が得られる.

解説2 : この場合, キーになる考え方は, 軸方向の変形量とたわみ関数との関係を与える式

$$\lambda=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

であることがわかる. 詳細は, Timoshenko,S.P. and Gere,J.M.,Theory of Elastic Stability,p.28を参照してほしい.

基本例題8.39　発展例題7.05のC/S柱の座屈荷重を求める式を導け.

指針 : たわみ関数を$v(x)=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$のように仮定する.

解答　たわみ関数$v(x)$が満足しなければならない境界条件は,

$x=0$で　　$v(0)=0$, $\dfrac{dv(0)}{dx}=0$

$x=l$で　　$v(l)=0$, $\dfrac{d^2v(l)}{dx^2}=0$

である. たわみ関数

$$v(x)=a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

は$x=0$での条件を満たす. $x=l$での条件からa_3とa_4をa_2で表すと, たわみ関数は

$$v(x)=\frac{a_2}{3l^2}(3l^2x^2-5lx^3+2x^4)$$

で表される. 以下では$\dfrac{a_2}{3l^2}$を改めてa_2で表す.

$$M=-EI_z\frac{d^2v}{dx^2}=-EI_z(6l^2-30lx+24x^2)a_2,\quad \frac{dv}{dx}=(6l^2x-15lx^2+8x^3)a_2$$

であるから,

$$U=\frac{18}{5}EI_z l^5 a_2^2,\quad W=\frac{6}{35}Pl^7 a_2^2$$

仮想仕事の原理から

$$a_2\left(\frac{36}{5}EI_z l^5-\frac{12}{35}Pl^7\right)=0$$

となり，$a_2\neq 0$であるから，()内をゼロにするPをP_{cr}とおくと

$$P_{cr}=21\frac{EI_z}{l^2}$$

となる．■

解説：**発展例題7.05**の解は

$$P_{cr}=2.045\frac{\pi^2 EI_z}{l^2}=20.18\frac{EI_z}{l^2}$$

であるから，近い値が得られていることがわかる．

基本例題8.40　発展例題7.04のC/F柱の座屈荷重を求める式を用いて導け．

指針：たわみ関数を$v(x)=a_2x^2+a_3x^3$のように仮定する．

解答　たわみ関数$v(x)$が満足しなければならない境界条件は，

$x=0$で　　$v(0)=0$，$\dfrac{dv(0)}{dx}=0$

$x=l$で　　$\dfrac{d^2v(l)}{dx^2}=0$

である．たわみ関数

$$v(x)=a_2x^2+a_3x^3$$

は$x=0$での条件を満たす．$x=l$での条件からa_3をa_2で表すと，たわみ関数は

$$v(x)=\frac{a_2}{3l}(3lx^2-x^3)$$

で表される．以下では$\dfrac{a_2}{3l}$を改めてa_2で表す．

$$M=-EI_z\frac{d^2v}{dx^2}=-6EI_z(l-x)a_2,\quad \frac{dv}{dx}=3(2lx-x^2)a_2$$

であるから，

$$U=6EI_z l^3a_2^2,\quad W=\frac{12}{5}Pl^5a_2^2$$

仮想仕事の原理から

$$a_2\left(12EI_z l^3-\frac{24}{5}Pl^5\right)=0$$

となり，$a_2\neq 0$であるから，()内をゼロにするPをP_{cr}とおくと

$$P_{cr}=\frac{5}{2}\frac{EI_z}{l^2}$$

となる．■

解説：**発展例題7.04**のC/F柱の場合の解は

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_z}{4l^2}=2.467\frac{EI_z}{l^2}$$

であるから，近い値が得られていることがわかる．

以下のいくつかの例題はレーリー・リッツの近似解法ではないが，仮想仕事の原理に関するものである．

発展例題8.41　図8.11の系の座屈の微分方程式と境界条件を仮想仕事の原理から規定し，座屈荷重を求めよ．

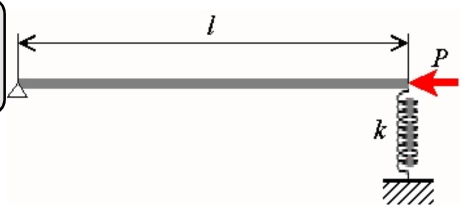


図8.11

解答　まず，柱の曲げに関するひずみエネルギは

$$U=\int_0^l\frac{M^2}{2EI}dx=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2dx$$

バネの弾性エネルギは

$$U_k=\frac{1}{2}kv^2(l)$$

外力のなす仕事は

$$W=\frac{1}{2}P\int_0^l\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx$$

仮想仕事の原理$\delta(U+U_k-W)=0$から

$$\int_0^l\delta\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx+\delta v(l)kv(l)-P\int_0^l\delta\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)dx=0$$

上式を積分して

$$\left[\delta\left(\frac{dv}{dx}\right)EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^l-\left[\delta v\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right]_0^l+\int_0^l\delta v\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx+\delta v(l)kv(l)-P\left[\delta v\frac{dv}{dx}\right]_0^l+P\int_0^l\delta v\frac{d^2v}{dx^2}dx=0$$

が得られる．この式が成立するためには$0<x<l$で座屈に関する次の微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)+P\frac{d^2v}{dx^2}=0$$

が成立し，境界条件として，

$$x=0\text{ において，}\ \delta\left(\frac{dv}{dx}\right)=0\text{ あるいは }EI\frac{d^2v}{dx^2}=0,\qquad \delta v=0\text{ あるいは }\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)+P\frac{dv}{dx}=0 \qquad \text{(A)}$$

$$x=l\text{ において，}\ \delta\left(\frac{dv}{dx}\right)=0\text{ あるいは }EI\frac{d^2v}{dx^2}=0,\qquad \delta v=0\text{ あるいは }\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)+P\frac{dv}{dx}-kv=0 \qquad \text{(B)}$$

が成立する必要がある．この問題の場合の境界条件は，

$$x=0\text{ において，}\ EI\frac{d^2v}{dx^2}=0,\ v=0 \qquad \text{(a), (b)}$$

$$x=l\text{ において，}\ EI\frac{d^2v}{dx^2}=0,\ \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)+P\frac{dv}{dx}-kv=0 \qquad \text{(c), (d)}$$

である．

さて，微分方程式の解は$\alpha^2=\dfrac{P}{EI}$として

$$v=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x+Cx+D$$

であり，条件式から

式(a) →　$-\alpha^2 A=0$

式(b) →　$A+D=0$

式(c) →　$-\alpha^2 A\cos\alpha l-\alpha^2 B\sin\alpha l=0$

式(d) →　$kA\cos\alpha l+kB\sin\alpha l+(kl-P)C+kD=0$

係数行列式がゼロになる条件

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2\cos\alpha l & \alpha^2\sin\alpha l & 0 & 0 \\ k\cos\alpha l & k\sin\alpha l & kl-P & k \end{bmatrix}=0$$

から

$$\alpha^2\sin\alpha l\cdot(kl-P)=0$$

この条件から，座屈荷重は

$$P_{cr}=\pi^2\frac{EI}{l^2}\quad \text{あるいは}\quad P_{cr}=kl$$

のいずれか小さいほうである．■

解説1：この問題の通常の解法は**基本例題7.26**です．$P_{cr}=kl$の場合は「横倒れ座屈」です．

解説2：式(d)に微分方程式の解を代入すると，

$$(-\alpha^2 EI+P)\frac{d}{dx}(A\cos\alpha l+B\sin\alpha l)-k(A\cos\alpha l+B\sin\alpha l)-(kl-P)C-kD=0$$

ここで$P=\alpha^2 EI$であるので上式の第1項はゼロになる．ゆえに，$kA\cos\alpha l+kB\sin\alpha l+(kl-P)C+kD=0$が得られる．

解説3：式(A)と(B)の中に出てくる$\delta\left(\dfrac{dv}{dx}\right)=0$と$\delta v=0$は，$\dfrac{dv}{dx}=0$と$v=0$を表しているわけではないことに注意してほしい．記号δは，ざっくり言って，差を表すと考えると，$\delta\left(\dfrac{dv}{dx}\right)=0$は差がゼロ，つまり，$\dfrac{dv}{dx}$は変化しないと言っている．つまり，$\delta\left(\dfrac{dv}{dx}\right)=0$は$\dfrac{dv}{dx}=$一定値，$\delta v=0$は$v=$一定値と言っていて，むろん$\dfrac{dv}{dx}=0$や$v=0$も含まれる．記号$\delta$を変分記号と言っている．興味のある人は，変分法の本を参考にしてほしい．

基本例題8.41+1 単位長さあたりqの下向き分布荷重と軸方向外力T_0を受けるはりのたわみの微分方程式を仮想仕事の原理を用いて導け．

解答　ひずみエネルギUは，たわみ関数をv，はりの長さをl，はりの曲げ剛性をEIとすると

$$U=\int_0^l\frac{M^2}{2EI}dx=\frac{1}{2}\int_0^l EI_z\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2dx$$

となる. 分布荷重のなす仕事W_1は

$$W_1=\int_0^l qvdx$$

軸方向外力T_0のなす仕事W_2は, **基本例題8.38**のW_Pと同じなので,

$$W_2=\frac{1}{2}T_0\int_0^l\left(\frac{dv}{dx}\right)^2dx$$

である.

仮想仕事の原理 $\delta(U-W_1-W_2)=0$から

$$\int_0^l\delta\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx-T_0\int_0^l\delta\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)dx-\int_0^l q\delta vdx=0$$

基本例題8.41のように上式を積分すると

$$\left[\delta\left(\frac{dv}{dx}\right)EI\frac{d^2v}{dx^2}\right]_0^l-\left[\delta v\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)\right]_0^l+\int_0^l\delta v\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx-T_0\left[\delta v\frac{dv}{dx}\right]_0^l+T_0\int_0^l\delta v\frac{d^2v}{dx^2}dx-\int_0^l q\delta vdx=0$$

が得られる. この式が成立するためには微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right)+T_0\frac{d^2v}{dx^2}-q=0$$

が成立しなければならない. なお, 境界条件として,

$x=0$, l において, $\delta\left(\dfrac{dv}{dx}\right)=0$ あるいは $EI\dfrac{d^2v}{dx^2}=0$,　　$\delta v=0$ あるいは $\dfrac{d}{dx}\left(EI\dfrac{d^2v}{dx^2}\right)+T_0\dfrac{dv}{dx}=0$

が考えられる. ■

解説1:はりの密度をϱ, 断面積をA, 時間変数をtとして$q=-\varrho A\dfrac{\partial^2v}{\partial t^2}$とおくと, 微分方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right)+T_0\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\varrho A\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=0$$

となる. この微分方程式は, 軸方向外力T_0をうけるはりの横振動を記述する方程式になる. ただし, 強制力の項がないので自由振動を記述する微分方程式で, はりの支持条件が決まれば対応する固有振動数が得られる.

解説2：さて，仕事W_1を

$$W_1=\frac{1}{2}\int_0^l \varrho A\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx$$

とおく．この項はたわみの時間微分，すなわち，たわみの速度を二乗して質量をかけたものなのではりの運動エネルギを表している．このとき，δW_1は

$$\delta W_1=\int_0^l \varrho A\delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx$$

と書けるから，仮想仕事の原理$\delta(U-W_1-W_2)=0$から

$$\int_0^l \delta\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)dx-T_0\int_0^l \delta\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)dx-\int_0^l \varrho A\delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx=0$$

となる．この式は時間依存なので時間変数tについてt_1からt_2まで積分すると，第三項は

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l \varrho A\delta\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx\right]dt=\left[\int_0^l \varrho A\delta v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l \varrho A\delta v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)dx\right]dt$$

となるから，全体として

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta(U-W_1-W_2)dt&=\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l \delta v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx+T_0\int_0^l \delta v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx+\int_0^l \delta v\varrho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dx\right]dt\\&\quad+\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\delta v\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-T_0\delta v\frac{\partial v}{\partial x}\right]_0^l dt-\left[\int_0^l \varrho A\delta v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)dx\right]_{t_1}^{t_2}=0\end{aligned}$$

と書ける．ここで第二項の積分は，$x=0$と$x=l$で上に述べた境界条件が満たされるならゼロである．時刻$t=t_1$と$t=t_2$で$\delta v=0$であれば第三項の積分はゼロになるから，いま考えている系においてたわみ関数vが満足しなければならない微分方程式は解説1で述べた

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+T_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varrho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0$$

である．

解説3：さて，上で「時刻$t=t_1$と$t=t_2$で$\delta v=0$であれば第三項の積分はゼロになる」とほざいた．ちょっと待て．ほんとに$\delta v=0$？つまり，たわみ関数vが上の方程式を満足するように決まっているならvの時間変化がわかっていることになるので，任意の時刻$t=t_1$と$t=t_2$でもわかっていることになる．ゆえに，$\delta v=0$が満たされる．納得した？

基本事項5（仮想仕事の原理と有限要素法）

まずは，最小仕事の定理の例題から．

発展例題8.42　図8.12の構造の部材力を求めよ．部材の引張剛性をAEとする．

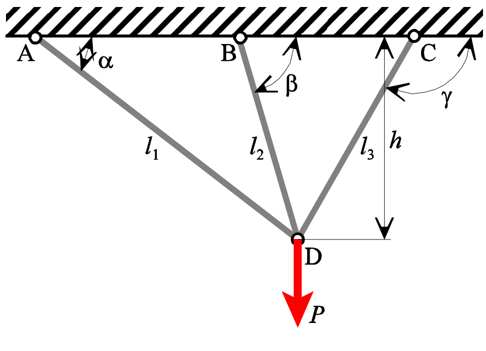


図8.12

解答　部材力をN_1，N_2，N_3とすると，力のつりあいは

$$N_1\sin\alpha+N_2\sin\beta+N_3\sin\gamma-P=0$$

$$N_1\cos\alpha+N_2\cos\beta+N_3\cos\gamma=0$$

いま，N_2を不静定量として選ぶと，この二つの式から

$$N_1=\frac{\cos\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}P-\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)}N_2,\ \ N_3=-\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)}P-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)}N_2. \ \text{(A)}$$

ひずみエネルギは

$$U=\frac{N_1^2l_1}{2AE}+\frac{N_2^2l_2}{2AE}+\frac{N_3^2l_3}{2AE}=\frac{l_1}{2AE}\left[\frac{\cos\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}P-\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)}N_2\right]^2+\frac{N_2^2l_2}{2AE}+\frac{l_3}{2AE}\left[\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\gamma)}P+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\gamma)}N_2\right]^2$$

であるから，最小仕事の定理

$$\frac{\partial U}{\partial N_2}=0$$

よりN_2は

$$N_2=\frac{\cos\gamma\cdot\sin(\beta-\gamma)l_1-\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)l_3}{\sin^2(\beta-\gamma)l_1+\sin^2(\alpha-\gamma)l_2+\sin^2(\alpha-\beta)l_3}P$$

となり，N_1，N_3は式(A)にN_2の値を代入すれば得られる．■

さて，この例題の難しさは半端ではない．ここでは垂直方向の荷重だけの場合でもこれだけ複雑な式になるので，図8.13のように水平方向の荷重が負荷されたら難しさは倍増する．図8.12の荷重条件のままでも，荷重点の垂直方向変位と水平方向変位を求めるとなると，水平方向の仮想荷重を負荷する必要があるので大変で，図8.13の系を解くこととなんら変わりない．以下では，少し考え方を変えてみることにする．

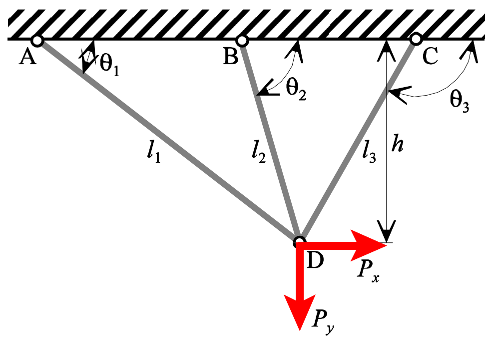


図8.13

部材力N_1，N_2，N_3は，トラス構造ではすべて部材軸方向の内力なので，各内力は各部材に軸方向の伸縮のみ生じさせる．各部材の伸縮量をΔl_iと表現すると，

$$\Delta l_i=\frac{N_il_i}{A_iE_i} \qquad \text{(A)}$$

である．以下では一般化して各部材の引張剛性をA_iE_iで表現し，角度を，図→のように，θ_iで表す．

さて，点Dの水平，垂直方向変位を，それぞれ，u_x，u_yで表すと，

$$\Delta l_i=u_x\cos\theta_i+u_y\sin\theta_i=\frac{N_il_i}{A_iE_i} \qquad \text{(B)}$$

が成立しなければならない(教科書の式(12.2)とその周囲の説明を参照)．式(A)と(B)から，各部材の内力は次式のように書き直すことができる．

$$N_i=\frac{u_x\cos\theta_i+u_y\sin\theta_i}{l_i}A_iE_i \qquad \text{(C)}$$

力のつりあいの式

$$\sum_{i=1}^{3}N_i\cos\theta_i=P_x,\ \ \sum_{i=1}^{3}N_i\sin\theta_i=P_y$$

に式(C)を代入すると，

$$u_x\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos^2\theta_i+u_y\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i=P_x, \qquad \text{(D1)}$$

$$u_x\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i+u_y\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\sin^2\theta_i=P_y \qquad \text{(D2)}$$

となる．この二つの式は，u_xとu_yを未知量とする連立一次方程式である．u_xとu_yがわかれば各部材の部材力が得られ

る．では，例題でござる．

発展例題8.43　基本例題8.23を，上記の方法で解け．

解答　すべての部材の引張剛性はAEであり，$P_x=0$である．この場合，$\theta_1=\frac{\pi}{2}-\theta$，$\theta_2=\frac{\pi}{2}$，$\theta_3=\frac{\pi}{2}+\theta$，$l_1=l_3=\frac{l}{\cos\theta}$，$l_2=l$であるから，式(D1)，(D2)から

$$\frac{2}{l}\cos\theta\sin^2\theta u_x=0,\quad \frac{1}{l}(1+2\cos^3\theta)u_y=\frac{P}{AE}.$$

これより，

$$u_x=0,\quad u_y=\frac{1}{1+2\cos^3\theta}\frac{Pl}{AE}$$

となり，中央部材の内力は式(C)を用いて

$$N_2=\frac{u_y}{l}AE=\frac{P}{1+2\cos^3\theta}$$

となる．このN_2は**基本例題8.23**のN_{BD}である．また，両側の斜め部材に発生する内力は，

$$N_1=N_3=\frac{P\cos^2\theta}{1+2\cos^3\theta}$$

である．■

解説：おお！なんか簡単そうやんか！と思うでしょう．ところが，図8.13の系に適用しようとするとこれも難しさ，というか，式変形の大変さは半端ではない．半端でない難しさは数式できれいに表そうとするからで，もし数値で求めようとするなら厄介ではない．コンピュータ君も力を貸してくれる．トラスの解析で大切なことは，

部材には部材軸方向の内力しか発生しないこと．

この事実と，部材の伸縮と系の変形量との関係が重要．もっとも，微小変形条件下で部材同士のなす角度の変化は小さく，無視できるとしている．

系の全ひずみエネルギは，式(C)を使うと

$$U=\sum_{i=1}^{3}\frac{N_i^2 l_i}{2A_iE_i}=\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{2l_i}(u_x\cos\theta_i+u_y\sin\theta_i)^2$$

と表現でき，カスティリアノの第一定理から

$$P_x=\frac{\partial U}{\partial u_x}=u_x\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos^2\theta_i+u_y\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i,$$

$$P_y=\frac{\partial U}{\partial u_y}=u_x\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i+u_y\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\sin^2\theta_i$$

となり，式(D1)と(D2)と同じ式が導かれる．

仮想仕事の原理からは，点Dの仮想変位をδu_x，δu_yで表すと，仮想外部仕事δWは

$$\delta W=P_x\delta u_x+P_y\delta u_y$$

であり，ひずみエネルギの変化量δUは

$$\delta U=\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}(u_x\cos\theta_i+u_y\sin\theta_i)\delta u_x\cos\theta_i+\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}(u_x\cos\theta_i+u_y\sin\theta_i)\delta u_y\sin\theta_i$$

であるので，

$$\delta\Pi=\delta(U-W)=0$$

から

$$\left[u_x\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos^2\theta_i+u_y\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i\right]\delta u_x+\left[u_x\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\cos\theta_i\sin\theta_i+u_y\sum_{i=1}^{3}\frac{A_iE_i}{l_i}\sin^2\theta_i\right]\delta u_y=0$$

この式がゼロでない任意のδu_x，δu_yに対して成立するための条件から式(D1)，(D2)が導かれる．さて，例題でござる．

発展例題8.44 教科書の例題3.6(p.44)を，角度$\pi/4$をθとして，仮想仕事の原理を用いて解け．

解答 荷重点の垂直および水平変位を，それぞれ，u_yおよびu_xで表し，u_yを下向き，u_xを右向きに仮定する．このとき，水平部材の長さの変化量は$\lambda_{BC}=u_x$，斜め部材の長さの変化量は$\lambda_{AC}=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta$であるから，系のひずみエネルギは

$$U=\frac{AE}{2l}u_x^2+\frac{AE\cos\theta}{2l}(u_x\cos\theta+u_y\sin\theta)^2$$

であるから，

$$\delta U=\frac{AE}{l}[(1+\cos^3\theta)u_x+\cos^2\theta\sin\theta\cdot u_y]\delta u_x+[\cos^2\sin\theta\cdot u_x+\cos\theta\sin^2\theta\cdot u_y]\delta u_y$$

δWは

$$\delta W=P\delta u_y$$

であるから，$\delta U-\delta W=0$より

$$(1+\cos^3\theta)u_x+\cos^2\theta\sin\theta\cdot u_y=0$$
$$\cos^2\sin\theta\cdot u_x+\cos\theta\sin^2\theta\cdot u_y=\frac{Pl}{AE}$$

となる．これより，

$$u_x=-\frac{1}{\tan\theta}\frac{Pl}{AE},\qquad u_y=\frac{1+\cos^3\theta}{\cos\theta\sin^2\theta}\frac{Pl}{AE}$$

である．

特に，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき，

$$u_x=-\frac{Pl}{AE},\qquad u_y=(1+2\sqrt{2})\frac{Pl}{AE}$$

である．■

解説：この例題は，多くの材料力学の教科書や参考書のごく最初に出てくる例題でありながら，初学者にとって荷重点の変位と部材の伸縮量との関係を理解することは非常に困難であり，また，他の構造や負荷条件への適用も難しい．そのため，われわれの教科書でも同じように載せているにもかかわらず荷重点変位の説明は，「ひずみエネルギのところで説明するネ」と言って避けている．本当はちゃんと説明する必要があるのだろうが，ごめんなさい．

発展例題8.45 教科書の演習問題12.1(p.165)を仮想仕事の原理を用いて解け．

解答　点2の変位をu_xとu_yとする．u_yは下向きとする．部材12の長さの変化量は$\Delta L_1 = u_x \sin\theta_1 + u_y \cos\theta_1$，部材32の長さの変化量は$\Delta L_2 = -u_x \sin\theta_2 + u_y \cos\theta_2$．ゆえに，系のひずみエネルギは

$$U = \frac{1}{2}AE\left[\frac{1}{L_1}(u_x \sin\theta_1 + u_y \cos\theta_1)^2 + \frac{1}{L_2}(-u_x \sin\theta_2 + u_y \cos\theta_2)^2\right].$$

δWは

$$\delta W = P\sin\beta \cdot \delta u_x + P\cos\beta \cdot \delta u_y .$$

δUは

$$\begin{aligned}\delta U =& AE\left[\left(\frac{1}{L_1}\sin^2\theta_1 + \frac{1}{L_2}\sin^2\theta_2\right)u_x + \left(\frac{1}{L_1}\cos\theta_1\sin\theta_1 - \frac{1}{L_2}\cos\theta_2\sin\theta_2\right)u_y\right]\delta u_x \\ &+ AE\left[\left(\frac{1}{L_1}\cos\theta_1\sin\theta_1 - \frac{1}{L_2}\cos\theta_2\sin\theta_2\right)u_x + \left(\frac{1}{L_1}\cos^2\theta_1 + \frac{1}{L_2}\cos^2\theta_2\right)u_y\right]\delta u_x\end{aligned}$$

$\delta U - \delta W = 0$から

$$(L_2\sin^2\theta_1 + L_1\sin^2\theta_2)u_x + (L_2\cos\theta_1\sin\theta_1 - L_1\cos\theta_2\sin\theta_2)u_y = \frac{L_1L_2}{AE}P\sin\beta$$

$$(L_2\cos\theta_1\sin\theta_1 - L_1\cos\theta_2\sin\theta_2)u_x + (L_2\cos^2\theta_1 + L_1\cos^2\theta_2)u_y = \frac{L_1L_2}{AE}P\cos\beta$$

これより，u_xとu_yは

$$u_x = \frac{P}{AE}\frac{L_1\cos\theta_2\sin(\theta_2+\beta) - L_2\cos\theta_1\sin(\theta_1-\beta)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}, \quad u_y = \frac{P}{AE}\frac{L_1\sin\theta_2\sin(\theta_2+\beta) + L_2\sin\theta_1\sin(\theta_1-\beta)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

である[2]．■

さて，今までの式系はすべての部材の一方の端点が動かない条件で導かれている．以下では，**基本例題8.31**のような部材の両方の端点が移動するような系の場合について一般化してみよう．

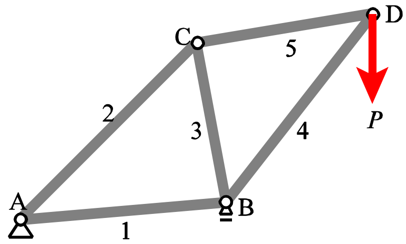


図8.14

図8.14のような系を考えてみよう．節点A～Dのx軸方向(右向き)とy軸方向(上向き)の変位量をu_{xI}，u_{yI}で表す．ここで添字IはA～Dを表す．各部材の長さの変化量Δl_iは，たとえば，部材1については

$$\Delta l_1 = (u_{xB} - u_{xA})\cos\theta_1 + (u_{yB} - u_{yA})\sin\theta_1$$

で表される．ここで，θ_1は部材がx軸と反時計まわりになす角である．

系の全ひずみエネルギは

$$U = \sum_{i=1}^{5}\frac{N_i^2 l_i}{2A_iE_i} = \sum_{i=1}^{5}\frac{A_iE_i}{2l_i}\Delta l_i^2$$

であるので，δUは

$$\delta U = \sum_{i=1}^{5}\frac{A_iE_i}{l_i}\Delta l_i \sum_{I=A}^{D}\left(\frac{\partial \Delta l_i}{\partial u_{xI}}\delta u_{xI} + \frac{\partial \Delta l_i}{\partial u_{yI}}\delta u_{yI}\right)$$

となる．δWは，節点A～Dのx軸方向(右向き)とy軸方向(上向き)の外力をP_{xI}，P_{yI}で表すと，

$$\delta W = \sum_{I=A}^{D}(P_{xI}\delta u_{xI} + P_{yI}\delta u_{yI})$$

---

[2]ここでのu_yと教科書の答え(p.189)のu_{y2}の符号が逆になっている理由は説明するまでもないでしょう．

となる. 仮想仕事の原理から, 節点I (=A～D)について

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{A_iE_i}{l_i}\Delta l_i\frac{\partial\Delta l_i}{\partial u_{xI}}=P_{xI},\qquad \sum_{i=1}^{5}\frac{A_iE_i}{l_i}\Delta l_i\frac{\partial\Delta l_i}{\partial u_{yI}}=P_{yI}\qquad \text{(A)}$$

が得られる. この式は, 全部で8個の式を表している. この例の冒頭で記したように式中のΔl_iはi番目の部材の両端点(節点)の変位の差で表される. 節点の変位は全部で8個あり, これらの変位がすべて未知であるとすると, 8元の連立一次方程式を表すことになる. つまり, 節点の数の二倍の式ができることになる. 一般に, N個の節点が存在すると, 式(A)は, 節点Iについて

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m}\frac{A_iE_i}{l_i}\Delta l_i\frac{\partial\Delta l_i}{\partial u_{xI}}=P_{xI}},\quad \boxed{\sum_{i=1}^{m}\frac{A_iE_i}{l_i}\Delta l_i\frac{\partial\Delta l_i}{\partial u_{yI}}=P_{yI}}$$

と書ける. ここで, mは部材の総数を表している. この二つの式が**二次元トラス構造の有限要素法**において重要な式である. 部材数が少ない系であれば手計算できないわけではないが, 多くなるとコンピュータ君の力を借りて数値的に計算したほうがはるかに速い.

節点の変位の拘束条件の設定の仕方や荷重条件の与え方は12.2節を参考にしてほしい. 健闘を祈る.

はりの有限要素法の定式化について

12.3節のはりの解析についても触れないわけにはいかないので, 簡単(?)に触れておく. この節では, 材料力学の知識を駆使してはりの問題に対する要素方程式を導き, エルミート三次補間関数を導いた. 通常, はりの有限要素法の定式化においては, 仮想仕事の原理とエルミート三次補間関数から要素方程式を導く. このプロセスをたどってみよう.

まず, 分布荷重$p(x)$が作用するはりのたわみ曲線の微分方程式は

$$\frac{d^4v}{dx^4}=\frac{p(x)}{EI_z}$$

である. なお, ここでは, 12.3節の定義に従っているので, 注意してほしい.

$x=L_{ij}\xi$として, たわみ曲線の微分方程式にδv_{ij}をかけて積分すると, 要素ijについて

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\int_0^1\delta\left(\frac{d^2v_{ij}}{d\xi^2}\right)\left(\frac{d^2v_{ij}}{d\xi^2}\right)d\xi-L_{ij}\int_0^1\delta v_{ij}p(\xi)d\xi+const.=0\qquad \text{(A)}$$

この式を見ると, 第一項はひずみエネルギに関連していて, 第二項は外力の仕事に関連していることがわかるだろう.

項$const.$は, 積分の結果出てきた項で,

$$const.=\left[\delta v_{ij}\frac{d^3v_{ij}}{d\xi^3}\right]_0^1-\left[\delta\left(\frac{dv_{ij}}{d\xi}\right)\frac{d^2v_{ij}}{d\xi^2}\right]_0^1$$

の形をしている. ここで$\dfrac{d^3v_{ij}}{d\xi^3}$と$\dfrac{d^2v_{ij}}{d\xi^2}$は, それぞれ, せん断力と曲げモーメントである. したがって, 項$const.$要素両端点の内部仕事の変化量になっている. 一方, 式(A)は仮想仕事の原理の観点からは, 項$const.$を外力で表したほうがいい. そこで, 教科書の図12.7を参照して, 要素両端のモーメントと横荷重を使って

$$\delta W_1=M_i\delta\theta_i+P_{yi}\delta v_i+M_j\delta\theta_j+P_{yj}\delta v_j$$

と表現すると, δW_1は外部仕事の変化量になるから, 式(A)は次式のように書き換えることができる.

$$\boxed{\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\int_0^1\delta\left(\frac{d^2v_{ij}}{d\xi^2}\right)\left(\frac{d^2v_{ij}}{d\xi^2}\right)d\xi-\left[L_{ij}\int_0^1\delta v_{ij}p(\xi)d\xi+M_i\delta\theta_i+P_{yi}\delta v_i+M_j\delta\theta_j+P_{yj}\delta v_j\right]=0}\qquad \text{(B)}$$

発展例題8.46 式(B)を仮想仕事の原理と考えて，教科書の式(12.11)のエルミート三次補間関数$\varphi_i(\xi)$を用いて，教科書の例題12.3の式(d)を導け．

解答 教科書の式(12.11)のエルミート三次補間関数$\varphi_i(\xi)$を用いたたわみ曲線の表現を代入して計算すると，

$$\frac{d^2 v_{ij}}{d\xi^2}=(12\xi-6)v_i+(6\xi-4)\theta_i L_{ij}-(12\xi-6)v_j+(6\xi-2)\theta_j L_{ij}$$

であるから，第1項は

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3}(\delta v_i \quad \delta\theta_i L_{ij} \quad \delta v_j \quad \delta\theta_j L_{ij})\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i L_{ij} \\ v_j \\ \theta_j L_{ij} \end{pmatrix}$$

式(B)の[ ]内の項は，$I_i=\int_0^1 \varphi_i(\xi)p(\xi)d\xi$として

$$L_{ij}(\delta v_i \quad \delta\theta_i L_{ij} \quad \delta v_j \quad \delta\theta_j L_{ij})\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}+(\delta v_i \quad \delta\theta_i \quad \delta v_j \quad \delta\theta_j)\begin{pmatrix} P_{yi} \\ M_i \\ P_{yj} \\ M_j \end{pmatrix}$$

となるから，ゼロでない任意のベクトル$(\delta v_i \quad \delta\theta_i L_{ij} \quad \delta v_j \quad \delta\theta_j L_{ij})$について式(B)が成立するためには

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_{ij} & -12 & 6L_{ij} \\ 6L_{ij} & 4L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 2L_{ij}^2 \\ -12 & -6L_{ij} & 12 & -6L_{ij} \\ 6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 4L_{ij}^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}=L_{ij}\begin{pmatrix} I_1 \\ L_{ij}I_2 \\ I_3 \\ L_{ij}I_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} P_{yi} \\ M_i \\ P_{yj} \\ M_j \end{pmatrix}$$

が成立しなければならない．もし，$p(\xi)=q_0$なら，

$$I_1=\frac{1}{2}, \qquad I_2=\frac{1}{12}, \qquad I_3=\frac{1}{2}, \qquad I_4=-\frac{1}{12}$$

であるから，

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_{ij} & -12 & 6L_{ij} \\ 6L_{ij} & 4L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 2L_{ij}^2 \\ -12 & -6L_{ij} & 12 & -6L_{ij} \\ 6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 4L_{ij}^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}=\frac{q_0 L_{ij}}{12}\begin{pmatrix} 6 \\ L_{ij} \\ 6 \\ -L_{ij} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} P_{yi} \\ M_i \\ P_{yj} \\ M_j \end{pmatrix}$$

となり，例題12.3の式(d)(教科書のp.159)が得られる．■

はり要素の両端点のたわみとたわみ角が求められれば，要素内の任意点でのたわみ関数は式(12.11)から計算できる．ところが，例題12.3のような等分荷重の場合，要素内で満足されなければならないたわみの微分方程式は

$$\frac{d^4 v}{dx^4}=\frac{q_0}{EI_z}$$

でなければならない．この式はたわみ関数$v(x)$が四次関数であることを要求している．一方，エルミート三次補間関数$\varphi_i(\xi)$は三次の補間関数なので，この微分方程式は満足されないことになる．では，満足されるためにはどうしたらいい

のだろうか.

発展例題8.47 教科書の12.3.2項の式(12.12)を導け.

解答 $x=L_{ij}\xi$として微分方程式を書き直し，特解の意味で解をv_{pij}と表現すると

$$\frac{d^4 v_{pij}}{d\xi^4}=\frac{q_0}{EI_z}L_{ij}^4.$$

これを積分すると,

$$v_{pij}=\frac{q_0 L_{ij}^4}{24EI_z}\xi^4+A+B\xi+C\xi^2+D\xi^3$$

と書ける. 式(12.11)にv_{pij}を加えると,

$$v_{ij}(\xi)=\varphi_1(\xi)v_i+\varphi_2(\xi)\theta_i L_{ij}+\varphi_3(\xi)v_j+\varphi_4(\xi)\theta_j L_{ij}+\frac{q_0 L_{ij}^4}{24EI_z}\xi^4+A+B\xi+C\xi^2+D\xi^3$$

と表現される. 要素端点の条件は

$$\xi=0:\ \ v_{ij}(0)=v_i,\qquad \frac{dv_{ij}(0)}{dx}=\theta_i$$

$$\xi=1:\ \ v_{ij}(1)=v_j,\qquad \frac{dv_{ij}(1)}{dx}=\theta_j$$

であるので，最初の二つの条件から$A=0$，$B=0$となり，残りの二つの条件から

$$C+D=-\frac{q_0 L_{ij}^4}{24EI_z},\qquad 2C+3D=-\frac{q_0 L_{ij}^4}{6EI_z}$$

が得られる. この二つの式からCとDを求めて特解v_{pij}を表現すると

$$v_{pij}(\xi)=\frac{q_0 L_{ij}^4}{24EI_z}(1-\xi^2)\xi^2$$

となる. この項は式(12.12)の最後の項である. ■

発展例題8.48 教科書の例題12.4の場合の曲げモーメントの式を導け.

解答 要素内の曲げモーメントはたわみ関数をxで二回微分すれば得られるから，式(12.12)を二回微分すると

$$M_{ij}=\frac{EI_z}{L_{ij}^2}[(12\xi-6)v_i+(6\xi-4)\theta_i L_{ij}-(12\xi-6)v_j+(6\xi-2)\theta_j L_{ij}]+\frac{q_0 L_{ij}^2}{12}(6\xi^2-6\xi+1)$$

となる. 例題12.4では

$$v_j=\frac{q_0 L_{ij}^4}{8EI_z},\qquad \theta_j=\frac{q_0 L_{ij}^3}{6EI_z}$$

であるから，これらをM_{ij}の式に代入すると，曲げモーメントの式は

$$M_{ij}=\frac{1}{2}q_0 L_{ij}^2(\xi-1)^2$$

である. ■

解説1：この式は材料力学から得られる等分布荷重を受ける一端固定他端自由はりの曲げモーメントの式と同じである．

解説2：要素内の曲げモーメントはたわみ関数をxで二回微分すれば得られるから，要素端点でのたわみとたわみ角が得られていれば，通常は式(12.11)をxで二回微分して

$$M_{ij}=EI_z\frac{d^2v_{ij}}{dx^2}=\frac{EI_z}{L_{ij}^2}\frac{d^2v_{ij}}{d\xi^2}=\frac{EI_z}{L_{ij}^2}[(12\xi-6)v_i+(6\xi-4)\theta_iL_{ij}-(12\xi-6)v_j+(6\xi-2)\theta_jL_{ij}]$$

から計算することができるが，上式はξの一次関数になっている．一方，材料力学の知識から，等分布荷重が作用する場合の曲げモーメントの式は二次関数なので合わない．そのため，**解答**の最初の式のように，分布荷重による影響の項(最後の項)を加えておけば正しい式になる．

発展例題8.49 図8.15の荷重点Cの荷重方向変位を求めよ．

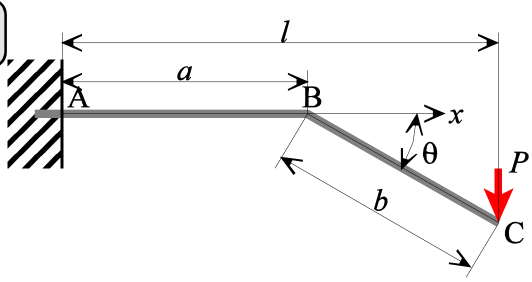


図8.15

解答　以下では，三つの方法を試す．ただし，三つ目の有限要素法による解は数式で表現するのが厄介なので，他の二つの方法による解を代入して有限要素法の方程式が満足されるかどうかを確認するにとどめる．共通事項は以下のとおり．

EI_z：　はりの曲げ剛性

θ：　BCが水平線となす角($\cos\theta=(l-a)/b$)

x_1：　ABの軸線方向の座標

x_2：　BCの軸線方向の座標

その1：たわみの微分方程式から

曲げモーメントの式は，図8.16を参照して

$$M_{AB}=-Pl+Px_1,$$

$$M_{BC}=-Pl+Pa+P\cos\theta x_2=-P\frac{l-a}{b}(b-x_2).$$

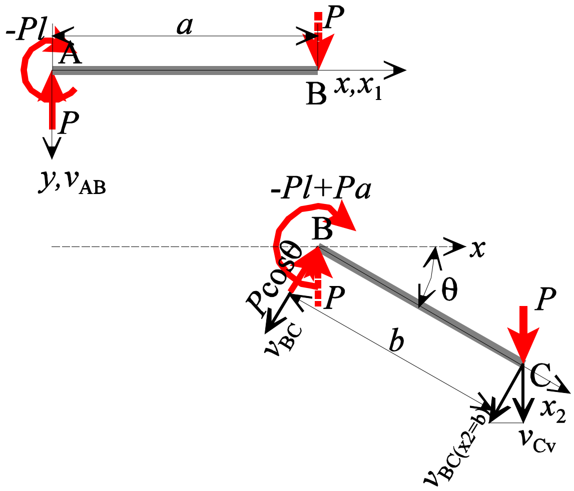


図8.16

ここで，$P\cos\theta$は点Bに生ずるBCの軸線に垂直な反力成分である．

たわみの微分方程式より，AB間のたわみ角の式とたわみ関数は

$$\frac{dv_{AB}}{dx_1}=\frac{P}{EI_z}\left(lx_1-\frac{1}{2}x_1^2\right),\quad v_{AB}=\frac{P}{EI_z}\left(\frac{1}{2}lx_1^2-\frac{1}{6}x_1^3\right).$$

点Bでのたわみ角とたわみは$x_1=a$を代入すると得られ，

$$\frac{dv_B}{dx_1}=\frac{P}{2EI_z}(2l-a)a,\quad v_B=\frac{P}{6EI_z}(3l-a)a^2$$

である．

BC間のたわみ角の式とたわみ関数は，点Bを固定支点のように考えると，

$$\frac{dv_{BC}}{dx_2}=\frac{P}{EI_z}\frac{l-a}{b}\left(bx_2-\frac{1}{2}x_2^2\right),\quad v_{BC}=\frac{P}{EI_z}\frac{l-a}{b}\left(\frac{1}{2}bx_2^2-\frac{1}{6}x_2^3\right)$$

と得られるから，

$$v_{BC(x_2=b)}=\frac{P}{3EI_z}(l-a)b^2$$

となる．しかし，$v_{BC(x_2=b)}$は部材BCの軸線に垂直であるから，これを荷重方向の変位になおす必要がある．そのため，図8.16を参照すると，点Cの荷重方向たわみv_{Cv}は$v_{Cv}=v_{BC(x_2=b)}\cos\theta$なので，

$$v_{Cv}=\frac{P}{3EI_z}(l-a)b^2\cos\theta=\frac{P}{3EI_z}(l-a)^2b$$

である．

系全体として，点Cの荷重方向の変位量は

$$v_C=v_B+\frac{dv_B}{dx_1}(l-a)+v_{Cv}=\frac{P}{6EI_z}(3l-a)a^2+\frac{P}{2EI_z}(2l-a)a(l-a)+\frac{P}{3EI_z}(l-a)^2b$$

となり，整理すると

$$v_C=\frac{P}{3EI_z}[l^3-(l-a)^3+(l-a)^2b]$$

となる．

解説1：さて，部材BCの曲げモーメントの式

$$M_{BC}=-Pl+Pa+P\cos\theta x_2$$

で，$x_2\cos\theta$は点Bを基準として部材BCに沿った座標のx軸への正射影であるから，$x_2\cos\theta=x-a$と書き換えることができる．これを用いると

$$M_{BC}=-Pl+Pa+P\cos\theta x_2=-Pl+Pa+P(x-a)=-Pl+Px$$

と書き直すことができる．一方，$x_1=x$であるから$M_{AB}=-Pl+Px_1=-Pl+Px$であるから，$0<x<l$で$M=-Pl+Px$．ゆえに，点Cのたわみは

$$\frac{P}{3EI_z}l^3$$

である．というのは間違いである．この理由は，たわみの基礎微分方程式はx軸をはりの軸線に沿ってとっているので，BC間で軸線に沿った座標はx_2であり，たわみの基礎微分方程式は

$$\frac{d^2v_{BC}}{dx_2^2}=-\frac{1}{EI_z}(-Pl+Px)$$

である．v_{BC}はx_2軸に垂直である．xを使って表現するなら，$x_2=\frac{x-a}{\cos\theta}$という関係から$a<x<l$において

$$\frac{d^2v_{BC}}{dx^2}=-\frac{1}{EI_z}(-Pl+Px)\frac{1}{\cos^2\theta}$$

と書くことができ，これを$x=a$でたわみ角とたわみがゼロであるとして積分すると

$$v_{BC(x=l)}=\frac{P}{3EI_z}(l-a)^3\frac{1}{\cos^2\theta}$$

となる．この$v_{BC(x=l)}$はx_2軸に垂直であるから，全体系で垂直方向の成分v_{Cv}は$v_{Cv}=v_{BC(x=l)}\cos\theta$として得られる．

その2：カスティリアノの定理から

曲げモーメントの式は「その1」と同じである．ひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2EI_z}\int_0^a M_{AB}^2 dx_1+\frac{1}{2EI_z}\int_0^b M_{BC}^2 dx_2$$

荷重方向変位は

$$v_C=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{P}{EI_z}\int_0^a (l-x_1)^2 dx_1+\frac{P}{EI_z}\left(\frac{l-a}{b}\right)^2\int_0^b (b-x_2)^2 dx_2=\frac{P}{3EI_z}(3l^2-3la+a^2)a+\frac{P}{3EI_z}(l-a)^2 b$$

である．整理すると

$$v_C=\frac{P}{3EI_z}[l^3-(l-a)^3+(l-a)^2 b]$$

となる．

その3：はりの有限要素法から

部材ABについては全体座標系のx軸と部材座標系のx_1軸が一致しているので，教科書の12.3節の式(12.10)までの式展開がそのまま成立する．部材ABを表す量として上添字ABを使うと

$$\frac{EI_z}{a^3}\begin{bmatrix}12 & 6a & -12 & 6a\\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2\\ -12 & -6a & 12 & -6a\\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_A^{AB}\\ \theta_A^{AB}\\ v_B^{AB}\\ \theta_B^{AB}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{yA}^{AB}\\ M_A^{AB}\\ P_{yB}^{AB}\\ M_B^{AB}\end{pmatrix}$$

と書くことができる．あるいは，全体座標系を用いて

$$\frac{EI_z}{a^3}\begin{bmatrix}12 & 6a & -12 & 6a\\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2\\ -12 & -6a & 12 & -6a\\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_A\\ \theta_A\\ v_B\\ \theta_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{yA}\\ M_A\\ P_{yB}\\ M_B\end{pmatrix}$$

と書いてもよい．

部材BCについては，部材座標系x_2を使うと

$$\frac{EI_z}{b^3}\begin{bmatrix}12 & 6b & -12 & 6b\\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2\\ -12 & -6b & 12 & -6b\\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_B^{BC}\\ \theta_B^{BC}\\ v_C^{BC}\\ \theta_C^{BC}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{yB}^{BC}\\ M_B^{BC}\\ P_{yC}^{BC}\\ M_C^{BC}\end{pmatrix}$$

と書ける．部材座標系x_2はθだけ傾斜しているので，

$$v_B=v_B^{AB}=v_B^{BC}\cos\theta,\ P_{yB}\cos\theta=P_{yB}^{AB}\cos\theta=P_{yB}^{BC}$$

の関係を用いて部材BCに関する式を書き換えると，

$$\frac{EI_z}{b^3}\begin{bmatrix}12 & 6b & -12 & 6b\\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2\\ -12 & -6b & 12 & -6b\\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\cos\theta & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_B\\ \theta_B\\ v_C\\ \theta_C\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}P_{yB}\\ M_B\\ P_{yC}\\ M_C\end{pmatrix}$$

となる．ここでベクトル$(v_B\ \theta_B\ v_C\ \theta_C)^T$と$(P_{yB}\ M_B\ P_{yC}\ M_C)^T$は全体座標系での量である．

以上の関係式を用い，$v_A=v_A^{AB}=0$，$\theta_A=\theta_A^{AB}=0$，$P_{yC}=-P$の条件を用いて系全体の式を書き下すと，

$$EI_z\begin{bmatrix} 12/a^3+12/(b^3\cos\theta) & -6/a^2+6/(b^2\cos\theta) & -12/(b^3\cos\theta) & 6/(b^2\cos\theta) \\ -6/a^2+6/(b^2\cos\theta) & 4/a+4/b & -6/(b^2\cos\theta) & 2/b \\ -12/(b^3\cos\theta) & -6/(b^2\cos\theta) & 12/(b^3\cos\theta) & -6/(b^2\cos\theta) \\ 6/(b^2\cos\theta) & 2/b & -6/(b^2\cos\theta) & 4/b \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_B \\ \theta_B \\ v_C \\ \theta_C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

が解くべき連立一次方程式になる.

さて，この方程式を解くのは面倒なので，代わりにすでに得られている解を用いてこの方程式が満足されるかどうかを確認することにする. 座標系との関係から,

$$v_B=\frac{-P}{6EI_z}(3l-a)a^2,\ \theta_B=\frac{-P}{2EI_z}(l-a)a,\ v_C=\frac{-P}{3EI_z}[l^3-(l-a)^3+(l-a)^2b]$$

であるが，θ_Cが得られていないので，これを求める. 単位荷重法を用いるため，点Cに反時計回りの単位モーメントを負荷すると，曲げモーメントは$M=1$となるので，単位荷重法により

$$\theta_C=-\frac{P}{EI_z}\int_0^a(l-x_1)dx_1-\frac{P}{EI_z}\int_0^b\frac{l-a}{b}(b-x_2)dx_2=\frac{-P}{2EI_z}[(2l-a)a+(l-a)b]$$

となる. これらの値を代入して計算すると，解くべき連立一次方程式を満たすことが確認できる. (自分でやってみてね)■

解説2：この解答を見ていて「あれっ？」と思った人はいるだろうか. この例題はある教科書のはりの部分の演習問題として取り上げられているものであ. では，どこが「あれっ？」なのだろうか.

解説3：部材BCのみについて考え，点Bが固定されているものとする. 外力は部材BCの軸線に直交していないので，部材BCに対する横荷重成分$P\cos\theta$と軸方向荷重成分$P\sin\theta$に分解されなければならない. 横荷重成分は部材BCにたわみを生じさせ，そのたわみ量は部材BCに垂直で$v_{BC(x_2=b)}=\frac{P\cos\theta}{3EI_z}b^3$である. 一方，軸方向荷重成分は部材BCを伸縮させるので，部材の断面積をAとして，$\lambda_C=\frac{P\sin\theta}{AE}b$だけの伸びを生じさせる. 結局，点Cの移動量は，図8.17を参照すると

$$v_{Cv}=v_{BC(x_2=b)}\cos\theta+\lambda_C\sin\theta=\frac{P\cos^2\theta}{3EI_z}b^3+\frac{P\sin^2\theta}{AE}b$$

で表される. さてここでθが小さければ$\sin^2\theta\approx0$とおいてよく，また$\cos\theta=(l-a)/b$であることを考慮すると

$$v_{Cv}\approx\frac{P\cos^2\theta}{3EI_z}b^3=\frac{P}{3EI_z}(l-a)^2b$$

となる.

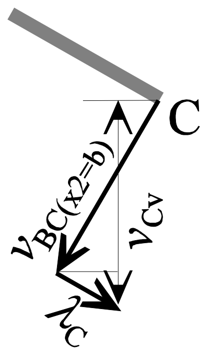


図8.17

解説4：もちろん，カスティリアノの定理を使う場合も，BC部分のひずみエネルギは

$$U_{BC}=\frac{1}{2EI_z}\int_0^b M_{BC}^2dx_2+\frac{1}{2AE}\int_0^b N_{BC}^2dx_2$$

であり，$M_{BC}=-P\frac{l-a}{b}(b-x_2)$，$N_{BC}=P\sin\theta$であるから，この部分だけの荷重方向変位量は

$$\frac{\partial U_{BC}}{\partial P}=\frac{P\cos^2\theta}{3EI_z}b^3+\frac{P\sin^2\theta}{AE}b$$

となる. この値は「解説3」のv_{Cv}の値と同じである. なお，$l-a=b\cos\theta$を使っている.

解説5：はりの有限要素法を使う場合は次に述べるようにフレーム構造のために改造する必要がある.

フレーム構造のための有限要素方程式の定式化

前の例題の部材BCのような場合，横荷重成分と軸方向荷重成分の両方を持ち，これらはそれぞれ曲げと伸縮に関連することがわかった．ここでは，このような場合に利用できる有限要素法の定式化について述べる．なお，諸量の定義を教科書の第12章にあわせる．

まず，部材軸方向の式を作る．式(12.1)をu_{Xi}とu_{Xj}で微分すると，カスティリアノの第二定理から

$$f_{Xi}=-\frac{AE}{L_{ij}}(u_{Xj}-u_{Xi}),\ f_{Xj}=\frac{AE}{L_{ij}}(u_{Xj}-u_{Xi})$$

となり，マトリックス表現すると

$$\frac{AE}{L_{ij}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_{Xi}\\ u_{Xj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{Xi}\\ f_{Xj}\end{pmatrix}$$

と書ける．ここで，u_{Xi}とu_{Xj}は節点iとjでの部材軸(X軸)方向の変位量，f_{Xi}とf_{Xj}は部材軸(X軸)方向の力である．

次に，はりの有限要素方程式はそのまま成立するから，部材座標系において

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\begin{bmatrix}12 & 6L_{ij} & -12 & 6L_{ij}\\ 6L_{ij} & 4L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 2L_{ij}^2\\ -12 & -6L_{ij} & 12 & -6L_{ij}\\ 6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 4L_{ij}^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_{Yi}\\ \theta_i\\ v_{Yj}\\ \theta_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{Yi}\\ M_i\\ f_{Yj}\\ M_j\end{pmatrix}$$

と書ける．ここでYは部材軸に直交する軸を表している．

これら二つの式を合成すると部材座標系X-Yでの要素方程式は

$$\frac{1}{L_{ij}}\begin{bmatrix}AE & 0 & 0 & -AE & 0 & 0\\ 0 & 12EI_z/L_{ij}^2 & 6EI_z/L_{ij} & 0 & -12EI_z/L_{ij}^2 & 6EI_z/L_{ij}\\ 0 & 6EI_z/L_{ij} & 4EI_z & 0 & -6EI_z/L_{ij} & 2EI_z\\ -AE & 0 & 0 & AE & 0 & 0\\ 0 & -12EI_z/L_{ij}^2 & 6EI_z/L_{ij} & 0 & 12EI_z/L_{ij}^2 & -6EI_z/L_{ij}\\ 0 & 6EI_z/L_{ij} & 2EI_z & 0 & -6EI_z/L_{ij} & 4EI_z\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_{Xi}\\ v_{Yi}\\ \theta_i\\ u_{Xj}\\ v_{Yj}\\ \theta_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{Xi}\\ f_{Yi}\\ M_i\\ f_{Xj}\\ f_{Yj}\\ M_j\end{pmatrix}$$

となる．

さて，全体座標系x-yでの一般化変位ベクトルと部材座標系での一般化変位ベクトルとの関係との関係を求める．図8.17+1のように部材軸Xが全体座標系のx軸に対して反時計回りにθだけ傾斜しているとすると

$$u_{xi}=u_{Xi}\cos\theta+v_{Yi}\sin\theta,\ u_{yi}=u_{Xi}\sin\theta-v_{Yi}\cos\theta$$

であり，この逆関係は

$$u_{Xi}=u_{xi}\cos\theta+u_{yi}\sin\theta,\ v_{Yi}=-u_{xi}\sin\theta+u_{yi}\cos\theta$$

となる．点jについても同じように考えてマトリックスを使って表示すると

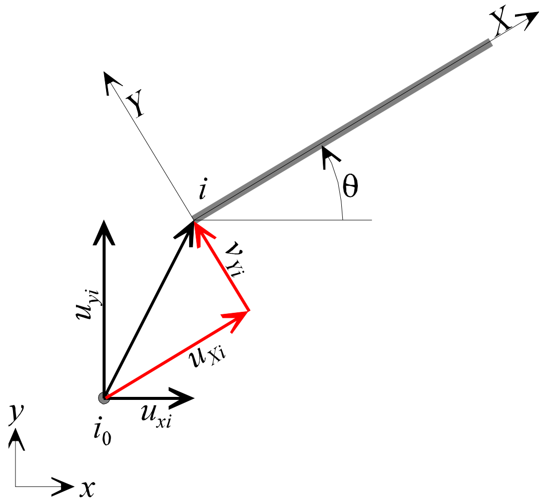


図8.17+1

$$\begin{pmatrix}u_{Xi}\\ v_{Yi}\\ \theta_i\\ u_{Xj}\\ v_{Yj}\\ \theta_j\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_{xi}\\ u_{yi}\\ \theta_i\\ u_{xj}\\ u_{yj}\\ \theta_j\end{pmatrix}$$

で表される．この式が全体座標系での一般化変位ベクトルを部材座標系での一般化変位ベクトルに変換する式である．同じ関係が一般化力ベクトルとの間に成り立つから上式の右辺のマトリックスを$[T]$で表し，剛性行列を$[k]$で表すと，部材座標系X-Yでの要素方程式は全体座標系x-yで次のように表現することができる．

$$[k][T]\begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}=[T]\begin{pmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ M_i \\ f_{xj} \\ f_{yj} \\ M_j \end{pmatrix}$$

この式に$[T]$の逆行列を左からかけると

$$[T]^{-1}[k][T]\begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ M_i \\ f_{xj} \\ f_{yj} \\ M_j \end{pmatrix}$$

あるいは，$[T]^{-1}=[T]^T$の関係にあるから

$$[T]^T[k][T]\begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ \theta_i \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ \theta_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ M_i \\ f_{xj} \\ f_{yj} \\ M_j \end{pmatrix}$$

とも書ける．

さて，以上の系でマトリックス$[T]^T[k][T]$をがんばって手計算したいところだが，面倒なのでコンピュータ君の力を拝借して数値を代入して計算してみることにする．図8.15を参照して点A，B，Cの座標を

A:(0,0)　　B:(5,0)　　C:(10,-2)

とすると，$l=10$ m，$a=5$ m，$b=\sqrt{5^2+2^2}=5.385$ mとなる．また，$E=206$ GPa，$A=10^{-4}$ m^2，$I_z=10^{-4}$ m^4，$P=10$ Nとする．拘束条件は点Aを完全に拘束，つまり，$u_{xA}=0$，$u_{yA}=0$，$\theta_A=0$である．コンピュータ君がはじき出した結果は点B，Cの水平方向変位，垂直方向変位，角度変化量の順に，

点B：$u_{xB}=$ -0.9317362D-20 m，$u_{yB}=$ -0.5056634D-04 m，$\theta_B=$ -0.1820388D-04 rad

点C：$u_{xC}=$ -0.4422019D-04 m，$u_{yC}=$ -0.1637310D-03 m，$\theta_C=$ -0.2473928D-04 rad

である．ここで，「$D\pm**$」で「$\times 10^{\pm**}$」を表す．

次に，上の答えを確認してみよう．**発展例題8.49**の解答の式から

$$\frac{dv_B}{dx_1}=\frac{P}{2EI_z}(2l-a)a,\quad v_B=\frac{P}{6EI_z}(3l-a)a^2$$

であり，v_Cは

軸方向変位あり:　$v_C = \dfrac{-P}{3EI_z}[l^3-(l-a)^3+(l-a)^2 b]+\dfrac{P\sin^2\theta}{AE}b$

軸方向変位なし:　$v_C = \dfrac{-P}{3EI_z}[l^3-(l-a)^3+(l-a)^2 b]$

荷重点Cのたわみ角は

$$\theta_C = \frac{P}{2EI_z}[(2l-a)a+(l-a)b]$$

であるから, これらの式に所定の数値を代入して計算すると

$$\frac{dv_B}{dx_1} = 0.1820388\mathrm{D}{-}04 \text{ rad},\quad v_B = 0.5056634\mathrm{D}{-}04 \text{ m}$$

であり, v_Cは

軸方向変位あり:　$v_C = 0.163\underline{7310}\mathrm{D}{-}03$ m

軸方向変位なし:　$v_C = 0.163\underline{3704}\mathrm{D}{-}03$ m

荷重点Cのたわみ角は

$$\theta_C = 0.2473928\mathrm{D}{-}04 \text{ rad}$$

となる. 材料力学による場合ははり理論で使う座標系を, 有限要素法の場合は第12章の座標系を用いていることに注意.

この結果から, 材料力学による計算結果は有限要素法の結果に一致していることがわかる. ただ, v_Cの値は軸方向変位を考慮した材料力学による計算結果は有限要素法の結果に一致しているが, 軸方向変位を考慮しない場合は有限要素法の結果との間にわずかに差がある(↑の下線部に注目). この差は軸方向変位を考慮するか否かで生じていると考えてよい. ただ, ここで挙げた数値の桁数は違いを見るために大きく取っているだけで, 実際の設計計算等でこのように大きな桁数を必要とせず, せいぜい3桁なので軸方向変位を考慮するかしないかは大きな問題ではなさそうである. もちろん, 計算条件によっても異なるが. たとえば, 断面形状が一辺の長さが200 mmの正方形断面だとすると, A=40×10^{-3} m^2, I_z=133.3×10^{-6} m^{4}となるから, 材料力学による計算からv_Cは

軸方向変位あり:　$v_C = 0.12255\underline{93}\mathrm{D}{-}03$ m

軸方向変位なし:　$v_C = 0.12255\underline{84}\mathrm{D}{-}03$ m

となって↑の下線部のように5桁まで同じ数値である. 通常はこの差を気にする必要はないようであるが, 簡単に計算できるならフレーム構造を扱える有限要素法を使ったほうがよいように思う.

基本例題8.18の数値計算例

横断面形状を, 半径 0.025 m の円形断面とし, a=5 m, b=3 m, c=4 m, ヤング率をE=206 GPa, ポアソン比をν=0.3として計算してみた. まずは, 横弾性率とヤング率との関係G=E/2/(1+ν)と円形断面の断面二次モーメントと断面二次極モーメントとの関係I_p=2I_zと使って答えの式を簡略化すると

$$\delta_D = \frac{P}{EI_z}\left\{\frac{1}{3}c^3+\frac{1}{3}b^3+\frac{1}{3}[(a-c)^3+c^3]+(1+\nu)bc^2+(1+\nu)ab^2\right\}$$

と書ける. この式に所定の数値を代入して計算すると,

$$\delta_D = 0.027358 \text{ m}$$

と計算される. この答えが正しいかどうかを確認するために, できたてホヤホヤの三次元フレーム構造解析用有限要素法プログラムで計算したところ, ばっちり一致した. (実は, 有限要素法プログラムのベンチマークテストでしたが, いず

れにしても答えが一致してホッとしているオジサンでした)

発展例題8.49の数値計算例(再び)

上の計算例で三次元フレーム構造解析用プログラムができたので，同プログラムを二次元問題に適用してみた．点A, B, Cの座標はそのまま，ヤング率と荷重もそのまま，横断面形状は一辺が 0.2 mの正方形断面．そうです．上の例題の最後に挙げたパラメータを使っています．その結果，

軸方向変位あり: $v_C =$ 0.1225287D-03 m

でした．四桁まであっているのでよしとしよう．

第8章　演習問題

問題1．三次元応力状態におけるひずみエネルギ密度は

$$u=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx})$$

で表される．フックの法則が成立するとき，

$$u=\frac{1}{2E}[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)]+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)$$

を示せ．

ヒント：第5章の「**三次元応力，ひずみに関する補足**」を参照

Ans.　省略

問題2．三次元応力状態において，静水圧成分によるひずみエネルギ密度を求めよ．

ヒント：第5章の演習問題の問題13を参照．

Ans.　静水圧成分によるひずみエネルギ密度をu_1で表現すると，

$$u_1=\frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2$$

である．

問題3．$u_2=u-u_1$を求めよ．また，これを三つの主応力によって表せ．

Ans.　$u_2=\dfrac{1+\nu}{6E}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2]+\dfrac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)$

主応力で表すと

$$u_2=\frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

解説：このu_2をせん断ひずみエネルギという．

問題4．降伏応力をσ_Yで表す．一軸引張状態での降伏点におけるせん断ひずみエネルギを求めよ．

Ans.　$u_2=\dfrac{1+\nu}{3E}\sigma_Y^2$

解説：この一軸引張状態での降伏点におけるせん断ひずみエネルギを三次元応力状態でのせん断ひずみエ

ネルギと等置すると，

$$\sigma_Y^2=\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

が得られる．ここで

$$\sigma_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

と表し，σ_Mをミーゼス(Mises)応力と呼んでいる．三次元応力状態で$\sigma_Y=\sigma_M$で降伏すると考える弾性破損説を，**せん断ひずみエネルギ説**(第５章，**応用例題5.15**の解説参照)という．

問題5．教科書p.62の例題5.2のはりの点Cのたわみ角およびその点のたわみ，点Aのたわみ角をカスティリアノの定理を用いて求めよ．ただし，$b=l-a$とおく．

ヒント：点Cの仮想荷重を下向きにP，点Aの仮想モーメントを時計回りにM_Aとすると，曲げモーメントの式は

$$M_{AC}=\frac{1}{l}[M_A(l-x)+M_Cx+bPx],\quad M_{CB}=\frac{1}{l}[M_A-M_C+aP](l-x)$$

である．単位荷重法を使う場合の曲げモーメントは下表を参照のこと．

	実荷重系	点Cのたわみのとき	点Aのたわみ角のとき
AC間	$\frac{M_C}{l}x$	$\frac{b}{l}x$	$\frac{1}{l}(l-x)$
CB間	$-\frac{M_C}{l}(l-x)$	$\frac{a}{l}(l-x)$	$\frac{1}{l}(l-x)$

Ans. $\theta_C=\frac{M_C}{3EI_zl^2}(a^3+b^3)=\frac{M_C}{3EI_zl}(a^2-ab+b^2)$，$v_C=\frac{M_Cab}{3EI_zl^2}(a^2-b^2)=\frac{M_Cab}{3EI_zl}(a-b)$，

$$\theta_A=\frac{M_C}{6EI_zl^2}(a^3+3a^2b-2b^3)=\frac{M_C}{6EI_zl}(a^2+2ab-2b^2)$$

（**基本例題6.03**の解答で確認のこと．）

問題6．教科書p.86の演習問題6.2の点Cのたわみと点Bのたわみ角をカスティリアノの定理を用いて求めよ．

ヒント：点Bのたわみ角を求める場合，点Bに時計回りの仮想モーメントM_Bを加えると，曲げモーメントの式は

$$M_{AB}=-M_B-P(L_1+L_2)+Px,\quad M_{BC}=-P(L_1+L_2)+Px$$

である．単位荷重法を使う場合の曲げモーメントは下表を参照のこと．

	実荷重系	点Bのたわみ角のとき
AB間	$-P(L_1+L_2)+Px$	-1
BC間	$-P(L_1+L_2)+Px$	0

Ans.　$v_C=\dfrac{P}{3EI_{z1}}\left[(L_1+L_2)^3-L_2^3\right]+\dfrac{P}{3EI_{z2}}L_2^3$，たわみ角$\theta_B$は演習問題6.2の解答を参照のこと．

問題7．教科書p.86の演習問題6.4の点Cの垂直方向変位と水平方向変位をカスティリアノの定理を用いて求めよ．

Ans.　垂直方向変位は演習問題6.4の解答を参照のこと．点Cに右向きに仮想荷重法または単位荷重法で計算すると，水平方向変位δ_{CH}は

$$\delta_{CH}=\frac{PaL^2}{2EI_z}$$

問題8．図1のフレーム構造の点Aでの曲げとねじりに対する固定モーメントを求めよ．フレーム構造は壁に対して垂直に設置されており，各部材も直角をなしている．曲げ剛性をEI，ねじり剛性をGI_pとする．

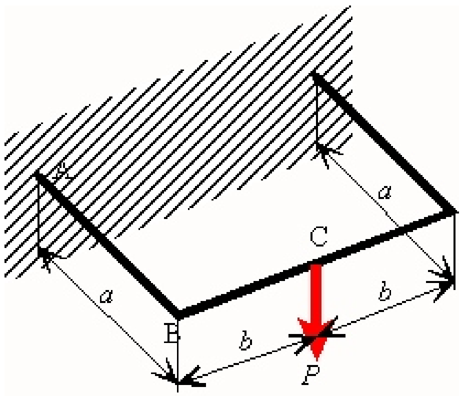


図1

ヒント：フリーボディダイヤグラムは図2のようである．

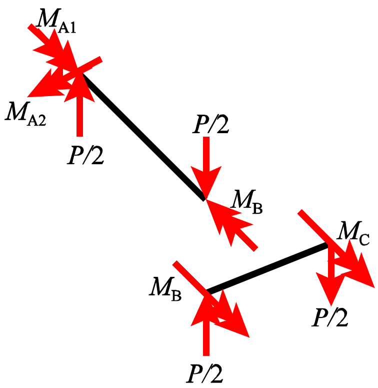


図2

部材BCについては，モーメントのつりあいは

$$M_B+M_C-\frac{1}{2}Pb=0$$

部材ABについては，

$$M_{A1}-M_B=0,\quad M_{A2}-\frac{1}{2}Pa=0$$

である．

Ans.　$M_{A1}=\dfrac{1}{4}Pb\dfrac{b/EI}{a/GI_p+b/EI}$(ねじり)，$M_{A2}=\dfrac{1}{2}Pa$(曲げ)

補足：不必要な補足かも知れないが，もし部材ABのねじり剛性$GI_p=\infty$なら，$M_{A1}=\dfrac{1}{4}Pb$である．この場合棒ABはねじれないことになって，横部材は剛体壁につながっていることと同じなので，図3の左の系で置き換えられる．横部材全体では図3の右と等価になる．図3の右の場合，集中荷重を受ける両端固定支持のはりと同じなので，**基本例題6.28**のM_Aの式で$a=b$，$l=2b$とおいて

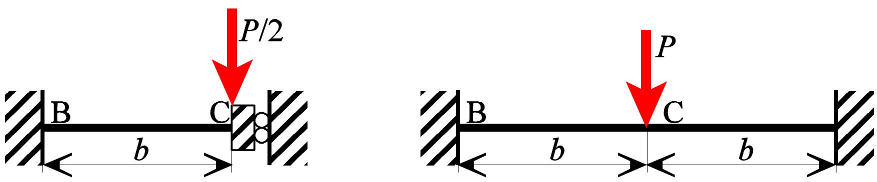


図3

$$M_A=\frac{1}{4}Pb$$

となる．このM_Aは本問題ではM_BとM_{A1}である．

棒ABのねじり剛性が有限なら，$M_{A1}=\frac{1}{4}Pb\frac{b/EI}{a/GI_p+b/EI}<\frac{1}{4}Pb$なので，剛体壁に伝達されるねじりモーメントは$GI_p=\infty$の場合に比べて小さくなる.

問題9．問題8の点Cの垂直方向変位を求めよ.

Ans. $\delta_{CV}=\frac{P}{6EI}(a^3+b^3)-\frac{P}{8EI}\frac{b/EI}{a/GI_p+b/EI}b^3$

問題10．図4のような，BC間に等分布荷重を受けるフレーム構造において，移動可能支点Dの水平方向変位δ_{DH}を求めよ．曲げ剛性をEIとする.

ヒント：点Dに仮想荷重Qを負荷した場合のフリーボディダイヤグラムは図5のようである.

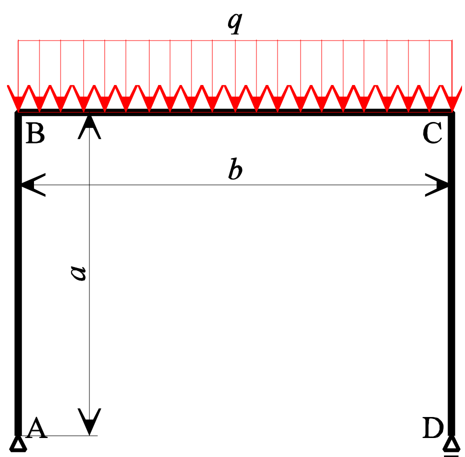


図4

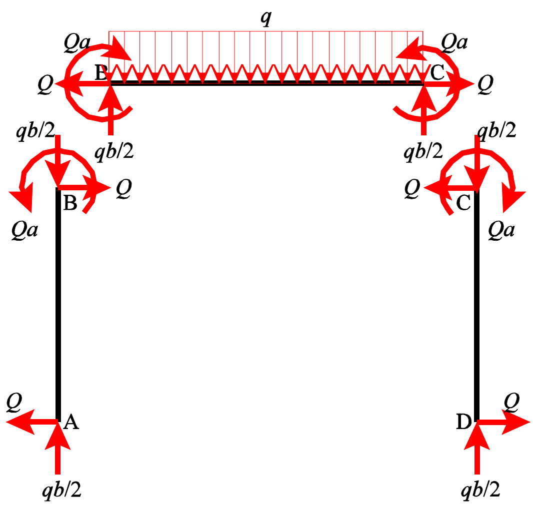


図5

Ans. $\delta_{DH}=\frac{1}{12}\frac{qab^3}{EI}$

問題11．図6の構造の点Gの荷重点方向の変位を求めよ.

Ans. $\delta_G=\frac{4}{3}\frac{P}{EI}(a^3+2b^3)+2\frac{Pab}{GI_p}(a+3b)$

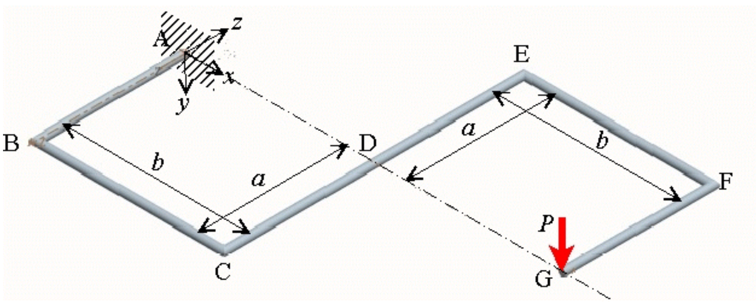


図6

問題12．　図7の3/4円弧曲りはりの点Bの垂直および水平方向変位を求めよ.

Ans.　下向きに$\left(2+\dfrac{9}{4}\pi\right)\dfrac{Pa^3}{EI}$, 左向きに$\dfrac{1}{2}\dfrac{Pa^3}{EI}$.

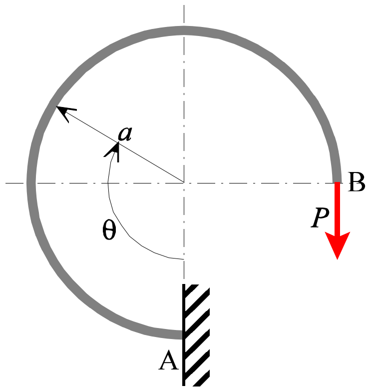


図7

問題13．　図8の半円弧状曲がりはりの点Bの垂直および水平方向変位を求めよ.

Ans. 下向きに$\dfrac{2a^3P}{EI}\left[\dfrac{3\pi a^3k}{2EI-3\pi a^3k}+1\right]$, 左向きに$\dfrac{a^3P}{EI}\left[\dfrac{8a^3k}{2EI-3\pi a^3k}+\dfrac{\pi}{2}\right]$

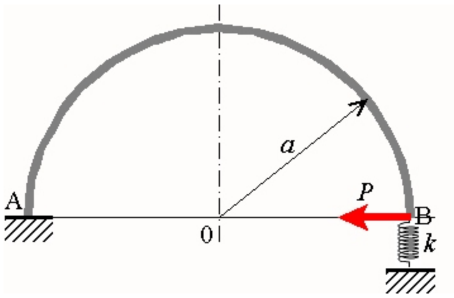


図8

問題14．　第三章の演習問題10．の, Aからxの距離にある断面CのAに対するねじり角を, カスティリアノの定理を用いて, 求めよ. 丸棒のねじり剛性をGI_pとする.

ヒント:任意位置XをCとし, この横断面での仮想ねじりモーメントをT_Cとすると, ねじりモーメントは

$$T_{AC}=tL+T_C-tx \qquad (0\leq x\leq X)$$

$$T_{CB}=tL-tx \qquad (X\leq x\leq L)$$

である. T_Cはtと同じ向きに仮定している. 解答は第三章の演習問題10．のAns.の$\varphi_C-\varphi_A$を参照.

第9章　はりの塑性変形

はりに発生する曲げ応力は第4章の**基本事項1**に挙げたように，

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y$$

である．ここでMは曲げモーメント，I_zは中立軸に関する断面二次モーメント，yは横断面内でz軸を基準に下向きにとられた座標である．

曲げモーメントは曲げ応力の合モーメントであるから，曲げ応力との関係は

$$M = \int_A \sigma_x y dA$$

である．

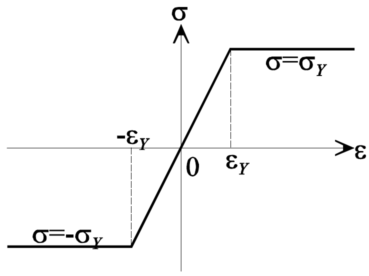


図9.1

以下では，はりに発生する塑性変形について考えるが，塑性変形モデルとして完全弾塑性体(図9.1)を考える．このモデルでは，応力が降伏応力にいたるまではフックの法則$\sigma = E\varepsilon$に従って直線的に変化し，降伏応力σ_Yに達すると応力は$\sigma_x = \sigma_Y$の状態を保つ．

基本例題9.01　はりの横断面が幅$b = 50$ mm，厚さ$h = 60$ mmであり，降伏応力$\sigma_Y = 200$ MPaの材料でできたはりが塑性変形しない限界の曲げモーメントを求めよ．また，このはりが長さ$L = 2$ mの片持ちはりのとき，自由端に負荷できる限界の横荷重はどれだけか．

解答　はりの断面二次モーメントは

$$I_z = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 50 \times 60^3 = 900 \times 10^3 \ mm^4 = 900 \times 10^{-9} \ m^4.$$

曲げ応力の最大値ははりの上下面($y = \pm \frac{h}{2} = \pm 30$mm)で生じ，このときの最大応力を$\sigma_{xmax} = \sigma_Y = 200$ MPaとおくと，許容できる最大曲げモーメントの絶対値は

$$M_{\max} = \frac{\sigma_Y I_z}{h/2} = \frac{200 \times 10^6 \times 900 \times 10^{-9}}{30 \times 10^{-3}} = 6.0 \times 10^3 \text{ Nm}$$

である．

片持ちはりの最大曲げモーメントは固定支持点で生じ，最大横荷重を$P_{\max}$とすると$M_{\max} = P_{\max} L$であるから，

$$P_{\max} = \frac{M_{\max}}{L} = \frac{6 \times 10^3}{2} = 3 \times 10^3 \text{ N}$$

である．つまり，約306 kgである．■

基本例題9.02　基本例題4.03の図4.5のような横断面が二等辺三角形の片持ちはりがある．はりは降伏応力$\sigma_Y = 200$ MPaの材料でできているものとして，塑性変形しない限界の曲げモーメントを求めよ．横断面寸法は**基本例題4.03**と同じであるとする．

解答　基本例題4.03から，$I_z = 11.25 \times 10^{-6}$ m^{4}である．最大曲げ応力は図4.5の頂点Aに生じ，この点は中立軸から$\frac{2}{3}h = 100$ mmのところにある．ゆえに，許容できる最大曲げモーメントの絶対値は

$$M_{\max}=\frac{200\times10^6\times11.25\times10^{-6}}{100\times10^{-3}}=22.5\times10^3\ \text{Nm}$$

である．■

発展例題9.03　基本例題9.01で外力のモーメントが増加したことによって最大曲げモーメントの値が増加した．この結果，はりに塑性変形が生じた．このときの曲げモーメントを表す式を導け．

指針　基本例題9.01では横断面が長方形であるので，曲げ応力分布は中立軸に対して反対称である．塑性域ははりの上下面から中立面のほうへ広がる．

解答　図9.2のようにフックの法則が成り立つ限界のyをy_pで表すと，フックの法則に従う範囲は$-y_p\le y\le y_p$である．曲げ応力はこの範囲で$\pm\sigma_Y$の範囲で変化するから$\sigma_x=\frac{\sigma_Y}{y_p}y$で表現される．一方，$-\frac{h}{2}\le y\le -y_p$では$\sigma_x=-\sigma_Y$，$y_p\le y\le\frac{h}{2}$では$\sigma_x=\sigma_Y$であるから，曲げモーメントは

$$\begin{aligned}M&=-\sigma_Y\int_{-h/2}^{-y_p}by\,dy+\frac{\sigma_Y}{y_p}\int_{-y_p}^{y_p}by^2dy+\sigma_Y\int_{y_p}^{h/2}by\,dy\\&=\sigma_Yb\left(\frac{1}{4}h^2-y_p^2\right)+\frac{2}{3}\sigma_Yby_p^2\\&=\sigma_Yb\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}y_p^2\right)\end{aligned}$$

である．■

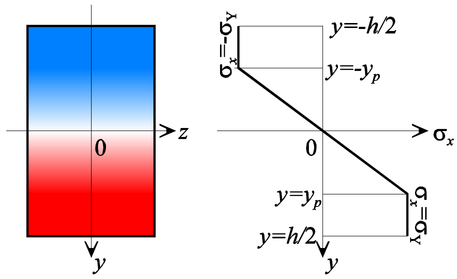


図9.2

解説1：もし，はりの横断面全体が降伏すると$y_p=0$である．このときの曲げモーメントをM_pで表すと

$$M_p=\frac{1}{4}\sigma_Ybh^2$$

であり，降伏しない限界の曲げモーメントをM_Yで表すと，$y_p=\frac{h}{2}$であるから，

$$M_Y=\frac{1}{6}\sigma_Ybh^2$$

である．長方形断面では$\frac{M_p}{M_Y}=\frac{3}{2}$である．$M_p$を(全)塑性曲げモーメント(plastic moment)という．また，$\frac{M_p}{M_Y}$をshape factorといい，この量は横断面形状に依存する．

解説2：横断面全体が降伏する場合，力の大きさは上半分で$-\frac{1}{2}bh\sigma_Y$，下半分で$\frac{1}{2}bh\sigma_Y$である．これらの力は具力の関係にある．力の作用点の座標は$\mp\frac{h}{4}$であり，作用点間距離は$\frac{h}{2}$．ゆえに偶力が作るモーメントは$\frac{1}{4}bh^2\sigma_Y$である．

解説3：**解答**の$M=\sigma_Yb\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}y_p^2\right)$は$M_Y=\frac{1}{6}\sigma_Ybh^2$を用いて書き直すと

$$M=\frac{3}{2}M_Y\left(1-\frac{4}{3}\frac{y_p^2}{h^2}\right)$$

とも書ける．

発展例題9.04　基本例題9.02で横断面全体が降伏した場合の中立軸の位置，塑性曲げモーメントM_pおよびshape factorを求めよ．

指針　横断面全体が降伏した場合でも軸方向内力はゼロである．

解答　横断面全体が降伏した場合，図9.3のようにはりの横断面に生じている軸方向応力は上半分で$\sigma_x=-\sigma_Y$，下半分で$\sigma_x=\sigma_Y$で一様である．軸方向内力はゼロであるから，横断面の上半分と下半分の面積は等しい．三角形の高さをh，底辺の長さをbとすると三角形の面積は$bh/2$であるから上半分と下半分の面積はそれぞれ$bh/4$である．三角形の相似の関係から上半分の三角形の高さと底辺の長さは$h/\sqrt{2}$と$b/\sqrt{2}$である．ゆえに，中立軸の位置は図9.3の頂点Aから下方に$h/\sqrt{2}$の位置にある．

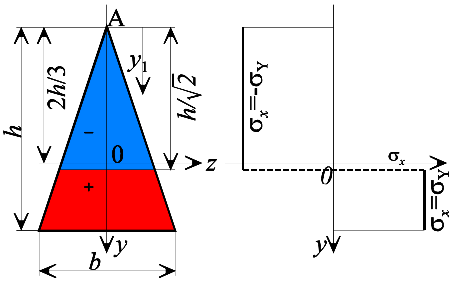


図9.3

塑性曲げモーメントM_pの大きさを求める．図9.3の頂点Aから下向きにy_1座標を取ると三角形の幅は$\frac{b}{h}y_1$，微小面積は$\frac{b}{h}y_1dy_1$であるからM_pの大きさは

$$M_p=-\sigma_Y\int_0^{h/\sqrt{2}}\frac{b}{h}y_1^2dy_1+\sigma_Y\int_{h/\sqrt{2}}^{h}\frac{b}{h}y_1^2dy_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)bh^2\sigma_Y$$

である．

塑性変形を生じない最大の曲げモーメントを生ずる応力分布は図9.4のようである．$\sigma_Y=\frac{M_y}{I_z}\frac{2}{3}h$，$I_z=\frac{1}{36}bh^3$であるから

$$M_Y=\frac{1}{24}bh^2\sigma_Y$$

である．ゆえに，shape factorは

$$\frac{M_p}{M_Y}=2.34$$

である．■

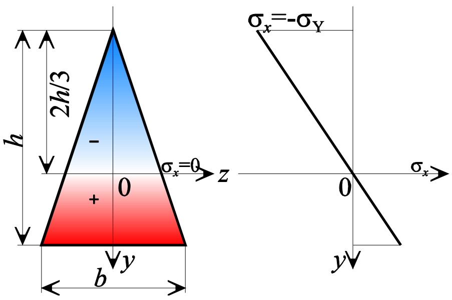


図9.4

発展例題9.05　発展例題9.03の状態におけるはりの曲率半径の式を求めよ．

指針　図9.5左のような応力分布に対するひずみ分布を図9.5右のように考える．

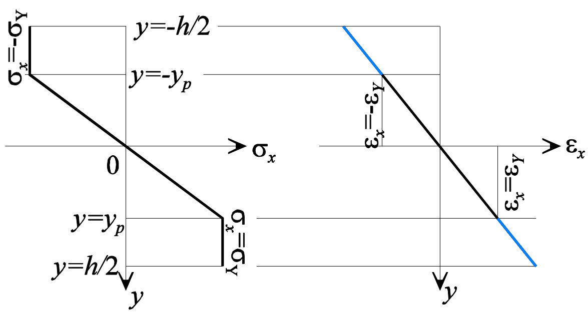


図9.5

解答　$y=y_p$における弾性ひずみをε_Yで表すと，

$$\varepsilon_Y=\frac{\sigma_Y}{E}$$

であるから$-y_p\leq y\leq y_p$におけるひずみの分布関数は

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}=\frac{\sigma_Y}{E}\frac{y}{y_p}=\varepsilon_Y\frac{y}{y_p}$$

である．$-y_p \le y \le y_p$におけるひずみ分布$\varepsilon_x = \varepsilon_Y \dfrac{y}{y_p}$を図9.5右の青い線で表すように$-\dfrac{h}{2} \le y \le -y_p$，$y_p \le y \le \dfrac{h}{2}$に外挿すると，はりの上下面でのひずみは

$$\varepsilon_x|_{y=\mp h/2} = \mp \varepsilon_Y \frac{h}{2y_p}$$

で表される．いま，曲率半径をRとおいて教科書の式(4.1)を使うと$\varepsilon_x|_{y=\mp h/2} = \mp \dfrac{1}{R}\dfrac{h}{2}$と書けるから，

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_Y}{y_p}$$

である．M_Yのもとでの曲率半径をR_Yとすると，

$$\frac{1}{R_Y} = \frac{\varepsilon_Y}{h/2}$$

この二つの式から$2\dfrac{y_p}{h} = \dfrac{R}{R_Y}$であるから，**発展例題9.03**の解説3に挙げた式は

$$M = \frac{3}{2} M_Y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{R^2}{R_Y^2} \right)$$

この式から求める曲率半径の式は

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\dfrac{M}{M_Y}}} \frac{1}{R_Y}$$

である．■

解説1：**解答**の$\dfrac{1}{R}$の式は$M \ge M_Y$について成り立つ．$M \le M_Y$においてははりの曲げ応力は弾性変形の範囲なので$\dfrac{1}{R} = \dfrac{M}{EI_z}$である．すなわち，

$$M \ge M_Y: \qquad \frac{M}{M_Y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1/R_Y}{1/R} \right)^2$$

$$M \le M_Y: \qquad \frac{M}{M_Y} = \frac{1/R}{1/R_Y}$$

である．図9.6に$\dfrac{M}{M_Y}$と$\dfrac{R_Y}{R}$の関係を示す．曲線は$\dfrac{M}{M_Y} = \dfrac{3}{2}$に漸近する．

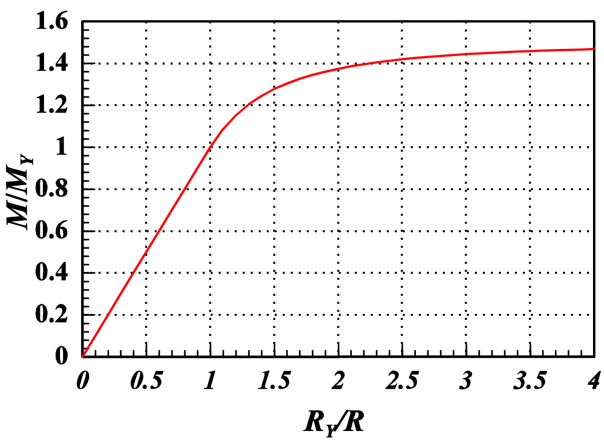


図9.6

解説2：塑性変形が進行して横断面全体が降伏状態になると曲げモーメントは**発展例題9.03**の解説1で述べたM_pに近づく．このとき，$\dfrac{R_Y}{R}$は大きくなる．ここでR_Yは定数なので$\dfrac{1}{R}$が大きくなる，あるいは，Rが小さくなることを意味している．このことは降伏領域のあるはりのたわみを考える際に重要になってくる．

応用例題9.06 はりの横断面が幅$b=50$ mm，厚さ$h=60$ mmで降伏応力$\sigma_Y=200$ MPa，ヤング率$E=200$ GPaの材料でできたはりの塑性変形しない限界の曲げモーメントM_Yの大きさはどれだけか．また，この曲げモーメントより10%大きい曲げモーメントに対する曲率半径を求めよ.

解答 1)塑性変形しない限界の曲げモーメントに対する曲率半径

はりの断面二次モーメントは

$$I_z=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}\times50\times60^3=900\times10^3\ \mathrm{mm}^4=900\times10^{-9}\ \mathrm{m}^4$$

曲げ応力の最大値ははりの上下面$y=\pm\dfrac{h}{2}=\pm30$ mmで生じ，そのときの最大応力は$\sigma_x\leq\sigma_Y=200$ MPaでなければならない．ゆえに，塑性変形しない限界の曲げモーメントの絶対値は

$$M_Y=\frac{\sigma_Y I_z}{h/2}=\frac{200\times10^6\times900\times10^{-9}}{30\times10^{-3}}=6.0\times10^3\ \mathrm{Nm}.$$

である.

2)M_Yより10%大きい曲げモーメントに対する曲率半径

M_Yのときの曲率半径は

$$R_Y=\frac{EI_z}{M_Y}=\frac{200\times10^9\times900\times10^{-9}}{6.0\times10^3}=30.0\ \mathrm{m}.$$

発展例題9.05の答えの式から

$$R=\sqrt{3-2\frac{M}{M_Y}}R_Y$$

であり，曲げモーメントはM_Yより10%大きいから$M=1.1M_Y$とおくと

$$R=\sqrt{3-2\frac{M}{M_Y}}R_Y=\sqrt{3-2\times1.1}\times30.0=26.8\ \mathrm{m}$$

である．■

さて，はりの横断面全体が降伏応力に達したときの曲げモーメントM_pは**基本例題9.03**の解説1や**基本例題9.04**でみたように，

長方形断面：$M_p=\dfrac{1}{\sigma_Y}bh^2$

二等辺三角形断面：$M_p=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)bh^2\sigma_Y$

である．一方，この曲げモーメントに対して中立軸の上下に発生している力は大きさが等しく互いに逆向きになっているから，力の大きさは

長方形断面：$\dfrac{1}{2}bh\sigma_Y$

二等辺三角形断面：$\dfrac{1}{4}bh\sigma_Y$

着力点間の距離は

長方形断面：$\dfrac{1}{2}h$

二等辺三角形断面: $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)h$

である.

一般に, 中立軸の上下に発生している力の着力点を$\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$とし, はりの横断面積をAとすると上下の面積は$\dfrac{A}{2}$であるから,

$$M_p=(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\frac{A}{2}\sigma_Y$$

で表すことができ, これから

$$\sigma_Y=\frac{M_p}{(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\dfrac{A}{2}}=\frac{M_p}{Z_p}$$

と表すことができる. ここで$Z_p=(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\dfrac{A}{2}$を塑性断面係数(plastic section modulus)ということがある.

基本例題9.07 図9.3の二等辺三角形断面の塑性断面係数を幾何学的条件から導け.

解答 断面積は$A=\dfrac{1}{2}bh$であるから$\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{4}bh$. 上の三角形の高さと底辺の長さはそれぞれ$\dfrac{1}{\sqrt{2}}h$と$\dfrac{1}{\sqrt{2}}b$である. 下の台形の高さは$h-\dfrac{1}{\sqrt{2}}h=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)h$である.

着力点は上下それぞれの図形の図心であるから, 上の三角形では中立軸から上方に$\dfrac{1}{3\sqrt{2}}h$にあり, 下の台形では中立軸から下方に$\dfrac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\dfrac{1}{3\sqrt{2}}h$にある. ゆえに, 着力点間距離は

$$\bar{y}_1+\bar{y}_2=\frac{4}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{3\sqrt{2}}h$$

塑性断面係数は

$$Z_p=(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\frac{A}{2}=\frac{4}{1+\sqrt{2}}\frac{1}{3\sqrt{2}}h\times\frac{1}{4}bh=\frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}bh^2$$

である. ■

基本例題9.10 図9.7に示す断面のM_Y, 断面全体が降伏したときの中立軸の位置cおよびM_pの値を求めよ. また, 塑性断面係数Z_pおよび着力点間距離を求めよ. 降伏応力をσ_Y=200 MPaとする.

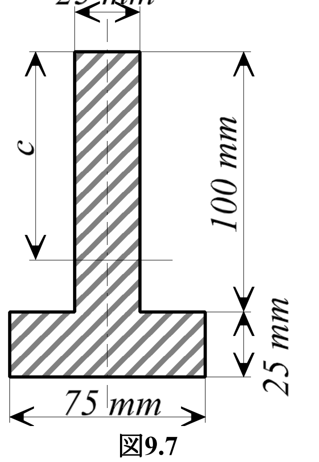


図9.7

解答 1) M_Y

横断面全体が弾性応力の状態にあるときの図心の位置を下辺からc_eとすると,

$$(100\times25)\times\left(25+\frac{100}{2}\right)+(25\times75)\times\frac{25}{2}-(100\times25+25\times75)\times c_e=0$$

からc_e=48.21 mmである(下辺からは125.0-48.21=76.79 mm).

中立軸に関する断面二次モーメントを求める. まず, 系の中立軸に関するフランジ部の

断面二次モーメントは平行軸の定理を用いて

$$\frac{75\times25^3}{12}+(48.21-12.5)^2\times75\times25=2.489\times10^6\ \mathrm{mm}^4$$

同じくウェブ部の断面二次モーメントは

$$\frac{25\times100^3}{12}+(75-48.21)^2\times25\times100=3.878\times10^6\ \mathrm{mm}^4$$

弾性応力状態での断面係数は

$$Z=\frac{2.489\times10^6+3.878\times10^6}{125-48.1}=82.91\times10^3\ \mathrm{mm}^3$$

ゆえにM_Yは

$$M_Y=\sigma_Y Z=200\times10^6\times82.91\times10^3\times10^{-9}=16.58\times10^3\ \mathrm{Nm}$$

2) c

cは図9.7の図形の面積を上下に二分する点であるので,

$$25\times c=25\times(100-c)+75\times25$$

から

$$c=87.5\ \mathrm{mm}$$

3) M_p

発展例題9.04のように考える. $c=87.5$ mmの点から上の部分では$\sigma_x=-\sigma_Y$, 下の部分では$\sigma_x=\sigma_Y$であるので, 図9.7の形状の上辺まわりのモーメントは上の部分について

$$-25\times87.5\times\frac{87.5}{2}\times\sigma_Y=-95.70\times10^3\times\sigma_Y$$

下の部分について

$$[25\times(100-87.5)\times94.75+75\times25\times112.5]\times\sigma_Y=240.2\times10^3\sigma_Y$$

ゆえに, 単位をそろえて

$$M_p=(240.2-95.7)\times10^3\times\sigma_Y=144.5\times10^{-6}\times200\times10^6=28.9\times10^3\ \mathrm{Nm}$$

4) Z_p

$M_p=Z_p\sigma_Y$から

$$Z_p=\frac{M_p}{\sigma_Y}=\frac{28.9\times10^3}{200\times10^6}=144.5\times10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

5)着力点間距離

$Z_p=(\bar{y}_1+\bar{y}_2)\dfrac{A}{2}$で4)の結果と$\dfrac{A}{2}=25\times87.5\times10^{-6}=2.188\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2$を用いると

$$\bar{y}_1+\bar{y}_2=\frac{Z_p}{A/2}=\frac{144.5\times10^{-6}}{2.188\times10^{-3}}=66.04\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

つまり, 着力点間距離は66.04 mmである. ■

基本例題9.11　図9.8左の断面の応力分布が同図右のようである．中立軸の位置cと曲げモーメントMを求めよ．ただし，$\sigma_0<\sigma_Y$である．

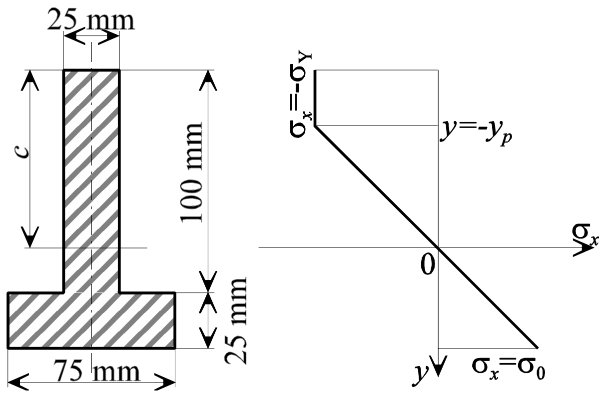


図9.8

解答　y軸を中立軸を基準に下向きに取ると，$y=0$で$\sigma_x=0$，$y=125-c$で$\sigma_x=\sigma_0$であるから，曲げ応力は$-y_p\leq y\leq 125-c$で

$$\sigma_x=\frac{y}{125-c}\sigma_0$$

で表現される．さて，力のつりあいは図を参照して

$$25\times(-\sigma_Y)\times\int_{-c}^{-y_p}dy+25\times\frac{\sigma_0}{125-c}\int_{-y_p}^{100-c}ydy+75\times\frac{\sigma_0}{125-c}\times\int_{100-c}^{125-c}ydy=0$$

が成り立たなければならない．

曲げ応力の式から，$y=-y_p$で$\sigma_x=-\sigma_Y$であることから

$$\frac{\sigma_Y}{y_p}=\frac{\sigma_0}{125-c}$$

が成り立つので，この関係を力のつりあい式に用いると

$$c^2-(2y_p+350)c+y_p^2+26875=0$$

が得られる．この式が中立軸の位置cを決める式である．

曲げモーメントは

$$M=25\times(-\sigma_Y)\times\int_{-c}^{-y_p}ydy+25\times\frac{\sigma_Y}{y_p}\times\int_{-y_p}^{100-c}y^2dy+75\times\frac{\sigma_Y}{y_p}\times\int_{100-c}^{125-c}y^2dy$$

から

$$M=25\times\frac{\sigma_Y}{y_p}\times\left[\frac{1}{3}y_p^3+\frac{1}{2}(c^2-y_p^2)y_p+\frac{1}{3}(125-c)^3-\frac{2}{3}(100-c)^2\right]$$

である．■

解説1：ここで導いた式は長さの単位にmmを用いている．実際に数値を入れて計算する際はy_pもmmに換算する．また，σ_YはPaだが，ここではN/mm^{2}の単位に換算する必要がある．このとき，モーメントの単位はN・mmになることにも注意．

解説2：中立軸を決める式$c^2-(2y_p+350)c+y_p^2+26875=0$で$y_p=c$とおいて計算すると，$c=76.79$ mmとなる．この値は上辺が降伏応力に達した場合であり，**発展例題9.10**の**解答**の1)で求めたc_eに相当するが，$c_e=48.21$ mmは下辺からはかった中立軸の位置である．したがって，当然$c+c_e=125$ mmである．

解説3：中立軸を決める式$c^2-(2y_p+350)c+y_p^2+26875=0$で$y_p=0$とおくと，横断面全体が降伏した状態での中立軸の位置が得られそうであるが，この式を導くための前提になっている$\frac{\sigma_Y}{y_p}=\frac{\sigma_0}{125-c}$が成立しないので使えない．当然$M$の式でも$y_p=0$とすることはできない．横断面全体が降伏した状態では**発展例題9.10**の**解答**の2)，3)のように考えなければならない．

解説4：下辺での曲げ応力が降伏応力に達したときの中立軸の位置は$\dfrac{\sigma_Y}{y_p}=\dfrac{\sigma_0}{125-c}$で$\sigma_0=\sigma_Y$とおくと$y_p=125-c$となるのでこれを$c^2-(2y_p+350)c+y_p^2+26875=0$に代入すると

$$2c^2-425c+2125=0$$

となり，これから$c=80.48$ mmが得られる．

弾性ヒステリシスと残留応力

はりの横断面の一部が降伏した後に外力のモーメントをゼロにするものとする．はりの横断面の一部が降伏しているためその部分は塑性変形を起こしている．部分的に塑性変形を起こしている状態で外力のモーメントがゼロになった場合の挙動を完全弾塑性モデルの応力-ひずみ線図に基づいて考えてみることにする．

簡単な例として，軸力系の場合について考えてみよう．一様な断面積を持つ棒が軸方向の力を受けるものとする．最初応力もひずみもゼロの状態にあった棒は，外力の増加に伴って，応力とひずみは増加する．このとき，応力とひずみの状態は図9.9の線分0B上の一点で表される．さらに外力が増加してその点の応力が材料の降伏応力σ_Yに達する．この後，図9.9の線分BCで表されるように応力はσ_Yのままでひずみのみ増加する．さて，点Cで表される応力とひずみの状態に達したとき，外力を徐々に取り去っていく(除荷過程)と，図9.9の線分CDに沿って応力とひずみは変化する．<u>線分CDは線分A0Bに平行</u>である．このような，塑性変形の途中で外力を取り去るときの応力とひずみの関係を<u>弾性ヒステリシス</u>という．なお，ここで考えているモデル以外の応力-ひずみモデルでも弾性ヒステリシスは一般に成立する．

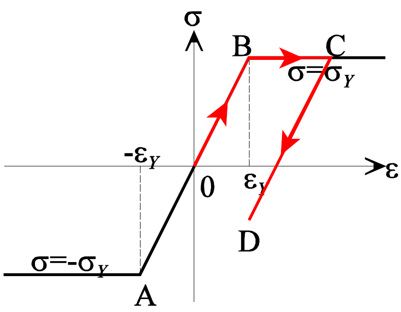


図9.9

弾性ヒステリシスと負荷-除荷をもう少し理解するために軸力系の例題で考えてみよう．

> **基本例題9.12** 図2.5の系について，$E_1>E_2$，$\sigma_{Y1}>\sigma_{Y2}$であるとして，円柱#1と円筒#2の材料の完全弾塑性モデルが図9.10のようであるとする．円柱#1と円筒#2の応力とひずみの状態が，それぞれ，点B_1とB_2の状態に達した．図9.10のε_{p1}を求めよ．

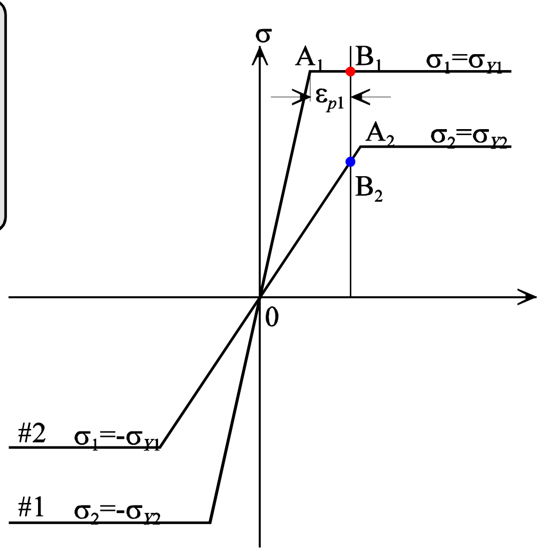


図9.10

解答　図9.10から，円柱#1と円筒#2は，それぞれ，点A_1と点A_2で表される応力とひずみの状態に至ると降伏する．

弾性変形の範囲内で円柱#1と円筒#2に生ずる軸方向応力は，**基本例題2.02**から

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{E_1}{A_1E_1+A_2E_2}P,\quad \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P$$

である．外力Pの増加に伴い，円柱#1の応力が$\sigma_1=\sigma_{Y1}$に達して降伏する．このとき円筒#2は降伏に達していないので円筒#2の応力は弾性変形の範囲内である．

さて，円柱#1の応力とひずみが点B_1に達したとき，円筒#2の応力とひずみは点B_2の状態にある．円柱#1と円筒#2のひずみは等しいから

$$\frac{\sigma_{Y1}}{E_1}+\varepsilon_{p1}=\frac{\sigma_2}{E_2}$$

が成立している．円柱#1に生じている内力は$N_1=\sigma_{Y1}A_1$であるから，円筒#2に生じている内力は$N_2=P-N_1=P-\sigma_{Y1}A_1$で

あるので，上式は

$$\frac{\sigma_{Y1}}{E_1}+\varepsilon_{p1}=\frac{P-\sigma_{Y1}A_1}{A_2E_2}$$

と書けるから，ε_{p1} は

$$\varepsilon_{p1}=\frac{P}{A_2E_2}-\left(\frac{1}{A_1E_1}+\frac{1}{A_2E_2}\right)\sigma_{Y1}A_1$$

である．■

基本例題9.13　基本例題9.12において，円柱#1と円筒#2の応力とひずみの状態が，それぞれ，点B_1とB_2の状態に達した後，荷重Pを徐々に減少させて荷重をゼロにした．このとき円柱と円筒に発生する応力を求めよ．

解答　弾性ヒステリシスによって円柱#1の材料は図9.11の点B_1の状態から$0A_1$に平行に応力とひずみは減少する．一方，円筒#2の材料は弾性領域にあるので$0B_1$に沿って応力とひずみは減少する．

円柱と円筒にひずみは常に等しいから，それぞれに生ずる弾性ひずみをε_1とε_2とすると，次式が成立しなければならない．

$$\frac{\sigma_{Y1}}{E_1}+\varepsilon_{p1}+\varepsilon_1=\frac{P-\sigma_{Y1}A_1}{A_2E_2}+\varepsilon_2$$

ゆえに，**基本例題9.12**から$\varepsilon_1=\varepsilon_2$が成立し，

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=-\frac{1}{A_1E_1+A_2E_2}P$$

である．

応力は，円柱#1については$\sigma_1=\sigma_{Y1}$の状態から，円筒#2については$\sigma_2=\dfrac{P-\sigma_{Y1}A_1}{A_2}$の状態から減少するので，最終的な応力は

$$\sigma_1=\sigma_{Y1}+E_1\varepsilon_1=\sigma_{Y1}-\frac{E_1}{A_1E_1+A_2E_2}P$$

$$\sigma_2=\frac{P-\sigma_{Y1}A_1}{A_2}+E_2\varepsilon_2=\frac{P-\sigma_{Y1}A_1}{A_2}-\frac{E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P$$

である．■

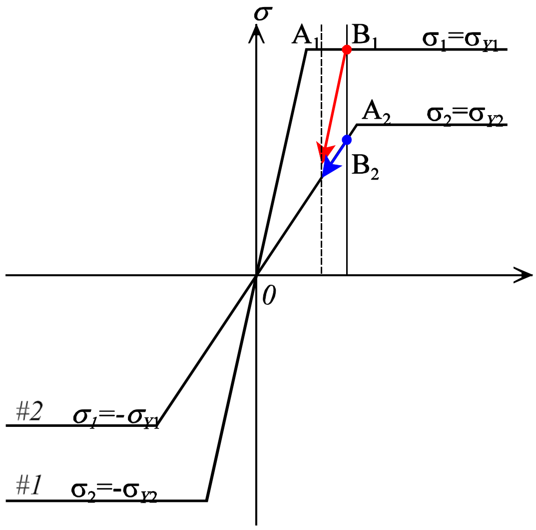


図9.11

解説1：最終的な応力状態では外力は作用していないので，力のつりあい式$\sigma_1A_1+\sigma_2A_2=0$を満足していなければならない．この式に応力を代入すると，

$$\sigma_1A_1+\sigma_2A_2=\sigma_{Y1}A_1-\frac{A_1E_1}{A_1E_1+A_2E_2}P+(P-\sigma_{Y1}A_1)-\frac{A_2E_2}{A_1E_1+A_2E_2}P=0$$

となっている．

解説2：この例題で荷重を取り去った後に円柱と円筒に発生している応力を**残留応力**(residual stress)という．一般に，塑性変形が生じた後に荷重を除去すると残留応力が発生する．また，残留応力を求める場合は，塑性変形が生じた状態に弾性解を重ね合わせればよい．

解説3：いま考えている例では，残留応力は$\sigma_1<0$，$\sigma_2>0$である．

いよいよはりの残留応力について考える．

発展例題9.14　発展例題9.03の状態から外力を取り去った．はりの横断面に生じている残留応力を求めよ．
指針：外力を取り去るということは，**発展例題9.03**の状態で生じている曲げモーメントと同じ大きさで逆向きの曲げモーメントを生ずる弾性解を重ね合わせる．

解答　発展例題9.03の曲げモーメントは

$$M=\sigma_Y b\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}y_p^2\right)$$

である．曲げ応力は $-y_p \le y \le y_p$ で $\sigma_x=\dfrac{\sigma_Y}{y_p}y$ で表現され，$-\dfrac{h}{2}\le y\le -y_p$ では $\sigma_x=-\sigma_Y$，$y_p\le y\le\dfrac{h}{2}$ では $\sigma_x=\sigma_Y$ である．

この曲げモーメントと大きさが同じで逆向きの曲げモーメントに対して発生する弾性応力は

$$\sigma_x=-\frac{M}{I_z}y$$

であるから，残留応力は $-y_p\le y\le y_p$ で

$$\sigma_x=\frac{\sigma_Y}{y_p}y-\frac{M}{I_z}y$$

$-\dfrac{h}{2}\le y\le -y_p$ で

$$\sigma_x=-\sigma_Y-\frac{M}{I_z}y$$

$y_p\le y\le\dfrac{h}{2}$ で

$$\sigma_x=\sigma_Y-\frac{M}{I_z}y$$

である．■

ここで残留応力による曲げモーメントはゼロであると共に x 軸方向の合力もゼロである．各自確認せよ．

応用例題9.15　はりの横断面が幅 b=50 mm，厚さ h=60 mmで材料の降伏応力 σ_Y=200 MPa，ヤング率 E=200 GPaである．このはりに 6.6×10^3 Nmの曲げモーメントが生じている．この状態から曲げモーメントがゼロになった．はりに発生する残留応力を求め，図示せよ．
指針：**基本例題9.01**，**発展例題9.03**，**応用例題9.06**，**発展例題9.14**を使う．

解答　応用例題9.06から，このはりの塑性変形しない限界の曲げモーメントは $M_Y=6.0\times10^3$ Nmであるから，$M=6.6\times10^3$ Nmの曲げモーメントが生じているときの弾性応力の限界点 y_p を求める．

発展例題9.03の答えの曲げモーメントの式で $M=6.6\times10^3$ Nm6.6×10^6 Nmm，σ_Y=200 MPa =200 N/mm^{2}とおくと

$$y_p^2=3\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{M}{\sigma_Y b}\right)=3\times\left(\frac{1}{4}\times60^2-\frac{6.6\times10^6}{200\times50}\right)=720.0\ \mathrm{mm}^2 \qquad \rightarrow \qquad y_p=26.83\ \mathrm{mm}$$

である．

はりの断面二次モーメントは**基本例題9.01**から

$$I_z=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}\times50\times60^3=900\times10^3\ mm^4=900\times10^{-9}\ m^4$$

であるから，残留応力は**発展例題9.14**から $-30.0 \le y \le -26.83$ で

$$\sigma_x = -\sigma_Y - \frac{M}{I_z}y = -200 - 7.333y \text{ N/mm}^2, \text{ MPa}$$

$-26.83 \le y \le 26.83$ で

$$\sigma_x = \frac{\sigma_Y}{y_p}y - \frac{M}{I_z}y = 0.1210y \text{ N/mm}^2, \text{ MPa}$$

$26.83 \le y \le 30.0$ で

$$\sigma_x = \sigma_Y - \frac{M}{I_z}y = 200 - 7.333y \text{ N/mm}^2, \text{ MPa}$$

である．残留応力の分布は図9.12のようになる．■

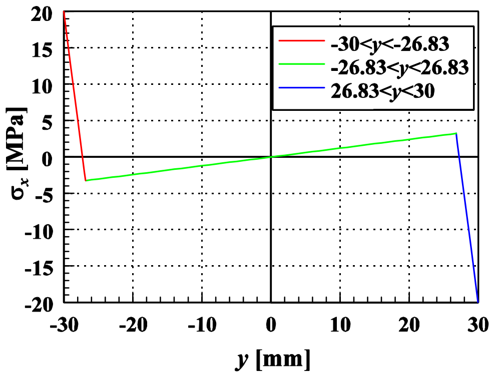


図9.12

発展例題9.16　発展例題9.14のはりの曲率半径を調べよ．
指針：降伏している領域におけるひずみ分布を**発展例題9.05**のように考える．

解答　ひずみ分布は**発展例題9.05**から，曲率半径を R とすると

$$\varepsilon_x = \frac{1}{R}y$$

である．このひずみは図9.5右のように $-y_p \le y \le y_p$ においては弾性ひずみを，それ以外の領域(青い線で表示されている部分)においては弾性ひずみと塑性ひずみの和(すなわち，全ひずみ)を表している．

曲げモーメントがゼロになったとき新たに加わるひずみは弾性ひずみであり，これを $\frac{1}{R_1}y$ で表すと，**発展例題9.14**のはりのひずみ分布は

$$\varepsilon_x = \frac{1}{R}y + \frac{1}{R_1}y$$

である．ここで $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$ とおくと R_2 は残留応力が生じた状態での曲率半径を表す．

さらに，$-y_p \le y \le y_p$ においては弾性ひずみであり，$y = y_p$ において $\sigma_x = \sigma_Y$ であることから，$\frac{y_p}{R} = \frac{\sigma_Y}{E}$ である．新たに加わった弾性ひずみは $y = y_p$ において $\frac{y_p}{R_1} = -\frac{M}{EI_z}y_p$ であるから，

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sigma_Y}{Ey_p} - \frac{M}{EI_z} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_Y}{y_p} - \frac{M}{I_z}\right)$$

となる．■

応用例題9.17　応用例題9.15のはりの曲率半径，$y = y_p$ および $y = \mp\frac{h}{2}$ におけるひずみを求めよ．

解答　1)曲率半径

発展例題9.16の式に数値を代入すると

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_Y}{y_p} - \frac{M}{I_z}\right) = \frac{1}{200\times10^9}\left(\frac{200\times10^6}{26.83\times10^{-3}} - \frac{6.6\times10^3}{900\times10^{-9}}\right) = 0.605\times10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

であるから，曲率半径は 1.653×10^3 mで下に凸に曲がっている．

2) $y=y_p$ におけるひずみ

$$\varepsilon_x\Big|_{y=y_p}=\frac{y_p}{R_2}=\frac{26.83\times10^{-3}}{1.653\times10^{3}}=16.23\times10^{-6}$$

である.

3) $y=\mp\dfrac{h}{2}$ におけるひずみ

$$\varepsilon_x\Big|_{y=\mp\frac{h}{2}}=\frac{1}{R_2}\frac{h}{2}=\frac{30.0\times10^{-3}}{1.653\times10^{3}}=1.815\times10^{-6}$$

である. ■

第10章　薄肉圧力容器

圧力容器に関わる問題では，第5章の**応用例題5.18**のように少なくとも二方向の垂直応力成分が関わる．圧力容器の問題を特にあたっての特別なことは特にないが，基本的に圧力は単位面積当たりの力なので

　　圧力×作用している面積＝圧力による力

である．圧力によって発生する応力は

　　圧力による力/力が作用している面積

から計算できる．単純に言ってしまえばそれだけである．

基本例題10.01　図10.1のような圧力容器に生ずるx軸方向応力σ_xと円周方向応力σ_tを圧力pを用いて表せ．

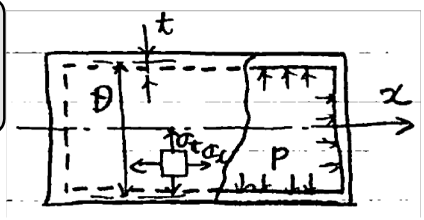


図10.1

解答　圧力pは円筒容器の円周方向とx方向の垂直応力を生ずる．まず，図5.19のようにx方向の垂直応力をσ_xで表すとx方向の内力は$N_x=\pi Dt\sigma_x$であり，x方向の外力は$P_x=\pi D^2p/4$であるから，$N_x=P_x$からσ_xは次式から計算できる．

$$\sigma_x=\frac{D}{4t}p.$$

円周方向の応力をσ_tで表す．図5.20のようにx軸を含む面で切断して力のつりあいを考えると，円周方向の内力は$N_t=lt\sigma_t$，圧力の合力は$P_t=Dlp$であるから，$2N_t=P_t$からσ_tは

$$\sigma_t=\frac{D}{2t}p.$$

である．■

解説1：**応用例題5.18**の解答の前半部分と同じである．なお，同例題の解説2もあわせて参照のこと．
解説2：円周方向応力は周方向応力ともいう．英語表記はhoop stressあるいはcircumferential stress．軸方向応力は回転体の母線に沿った方向の応力で，子午線方向応力とも言う．英語表記はmeridional stress．以下では，hoop stressをσ_{t1}，meridional stressをσ_{t2}で表す．

基本例題10.02　密度ϱの液体を高さHまで満たすための貯水槽を作りたい．貯水槽は内径Dの円筒形である．貯水槽の壁の厚さtを決める式を導け．貯水槽の材料の許容応力をσ_aとする．

解答　液体による圧力pは貯水槽の底で最大値をとり，その値は$p=\varrho gH$である．貯水槽の壁に発生する円周方向応力σ_tは

$$\sigma_t=\frac{D}{2t}p=\frac{D}{2t}\varrho gH$$

である．$\sigma_t<\sigma_a$から

$$t>\frac{\varrho gH}{\sigma_a}\frac{D}{2}$$

である．■

基本例題10.03　基本例題10.02で，$\varrho=1.0\times10^3 kg/m^3$，$D=10m$，$H=5m$，$\sigma_a=5.0MPa$のとき，厚さ$t$を決定せよ.

解答　前問で導いた式に数値を代入して

$$t>\frac{\varrho gH}{\sigma_a}\frac{D}{2}=\frac{1.0\times10^3\times9.8\times5.0}{5.0\times10^6}\times\frac{10}{2}=0.049\text{ m.}$$

壁の厚さは49 mm以上必要である. ■

基本例題10.04　基本例題10.01の圧力容器の材料のヤング率がEである. この圧力容器の直径の変化量を求めよ.

解答　圧力容器の元の円周長さはπDであり，加圧後の円周長さは，直径の変化量をΔDとすると$\pi(D+\Delta D)$であるから円周方向ひずみε_tは

$$\varepsilon_t=\frac{\pi(D+\Delta D)-\pi D}{\pi D}=\frac{\Delta D}{D}$$

である. また，円周方向ひずみは円周方向応力σ_tと軸方向応力σ_xからポアソン比νを用いて

$$\varepsilon_t=\frac{\sigma_t}{E}-\nu\frac{\sigma_x}{E}=\frac{pD}{2Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$$

であるから，これらを等置すると

$$\Delta D=\varepsilon_t D=\frac{pD^2}{2Et}\left(1-\frac{\nu}{2}\right)$$

である. ■

解説：圧力容器の円筒面には二つの垂直応力成分があることに注意. 第5章の「三次元応力，ひずみに関する補足」も参照.

基本例題10.05　内径D，厚さt_2の円筒に外径D，厚さt_1の円筒をはめ込んだ二重円筒に内圧pが作用する. 各円筒に生ずる円周方向応力を求めよ. 内円筒と外円筒のヤング率はE_1，E_2である. また，内外円筒は十分に薄く，円筒の軸方向応力は無視する.

解答　内円筒には内圧pと外圧p_1が作用し，外円筒には内圧p_1が作用する. 内外円筒の円周長さの変化量は

$$\Delta D_1=\varepsilon_{t1}D=\frac{(p-p_1)D^2}{2E_1t_1},\qquad \Delta D_2=\varepsilon_{t2}D=\frac{p_1D^2}{2E_2t_2}$$

これらが等しいことから

$$p_1=\frac{E_2t_2}{E_1t_1+E_2t_2}p$$

であるから，

$$\sigma_{t1}=\frac{(p-p_1)D}{2t_1}=\frac{E_1}{2(E_1t_1+E_2t_2)}p,\qquad \sigma_{t2}=\frac{p_1D}{2t_2}=\frac{E_2}{2(E_1t_1+E_2t_2)}p$$

である. ■

基本例題10.06 内径D, 厚さt_2の円筒に外径$D+\Delta D$, 厚さt_1の円筒をはめ込んだ二重円筒を作った. 各円筒に生ずる円周方向応力を求めよ. 内円筒と外円筒のヤング率はE_1, E_2である. また, 内外円筒は十分に薄く, 円筒の軸方向応力は無視する. $\Delta D>0$である.

解答 二重円筒を作った状態で内円筒には外圧pが作用し, 外円筒には内圧pが作用する. 内外円筒の円周長さの変化量は

$$\Delta D_1=\varepsilon_{t1}(D+\Delta T)=-\frac{p(D+\Delta D)^2}{2E_1t_1},\quad \Delta D_2=\varepsilon_{t2}D=\frac{pD^2}{2E_2t_2}$$

である. これらの間には

$$|\varepsilon_{t1}(D+\Delta T)|+|\varepsilon_{t2}D|=\Delta D \qquad (*)$$

が成立しなければならないからpは

$$p=\frac{2E_1t_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)D+2\Delta D}\frac{\Delta D}{D}$$

となる. ここで$\Delta D \ll D$なら

$$p=\frac{2E_1t_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)D}\frac{\Delta D}{D}$$

と近似できるから, 内外円筒に生ずる円周方向応力は

$$\sigma_{t1}=-\frac{pD}{2t_1}=-\frac{E_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)}\frac{\Delta D}{D},\qquad \sigma_{t2}=\frac{pD}{2t_2}=\frac{E_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)}\frac{\Delta D}{D}\frac{t_1}{t_2}=-\frac{t_1}{t_2}\sigma_{t1}$$

である. ■

解説:解答中の式(*)は第2章の**発展例題2.04**と同じ考え方である.

基本例題10.07 **基本例題10.06**において, $D=100$ mm, $\Delta D=0.25$ mm, $t_1=2.5$ mm, $t_2=2.0$ mm, $E_1=E_2=200$ GPa である. 各円筒に生ずる円周方向応力を求めよ.

解答 **基本例題10.06**の解答の式に数値を代入すると,

$$\sigma_{t1}=-\frac{E_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)}\frac{\Delta D}{D}=-\frac{200\times10^9}{1+\dfrac{2.5}{2.0}}\times\frac{0.25}{100}=-222\times10^6\ \text{Pa}=-222\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{t2}=\frac{E_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)}\frac{\Delta D}{D}\frac{t_1}{t_2}=222\times10^6\times\frac{2.5}{2.0}=278\times10^6\ \text{Pa}=278\ \text{MPa}$$

■

基本例題10.08 内径D，厚さt_2の円筒に外径$D+\Delta D$，厚さt_1の円筒をはめ込んで二重円筒を作りたい．このとき，外円筒を均等に熱した後内円筒を挿入して冷却することにした．基準温度からの温度上昇分を求めよ．外円筒の材料の線膨張係数をα_2とする．内外円筒は十分に薄い．

解答 加熱後の外円筒の内径が$D+\Delta D$より大きくなるように加熱すれば外径$D+\Delta D$の円筒を挿入することができる．

基準温度からの温度上昇分をΔTとすると自由熱膨張ひずみは$\alpha_2\Delta T$であり，この自由熱膨張ひずみによって直径は$\alpha_2\Delta TD$だけ増加する．この増加分がΔDと等しい，すなわち，

$$\alpha_2\Delta TD=\Delta D$$

から

$$\Delta T=\frac{1}{\alpha_2}\frac{\Delta D}{D}$$

である．■

解説1：内径Dの円筒の加熱後の円周長さは$\pi(1+\alpha_2\Delta T)D$．外径$D+\Delta D$の円筒の円周長さは$\pi(D+\Delta D)$．これらを等置すると，$\alpha_2\Delta TD=\Delta D$が得られる．

解説2：このように，内円筒の外径が外円筒の内径よりわずかに大きくなるように作って，外円筒の温度を均等に加熱して内円筒を挿入した後，円筒全体の温度を下げて二重円筒を作る操作を**焼ばめ**または**締まりばめ**という．英語で表現するとshrink fit．焼ばめ後に内外円筒には応力が発生するが，これらは**基本例題1.06**の式から計算することができる．

基本例題10.09 **基本例題10.08**において，$D=100$ mm，$\Delta D=0.1$ mm，$t_1=2.5$ mm，$t_2=2.0$ mm，$E_1=90.0$ GPa，$E_2=200$ GPa，$\alpha_1=16.7\times10^{-6}$ K^{-1}，$\alpha_2=12.0\times10^{-6}$ K^{-1}である．焼ばめするためには外円筒の温度を何度上げなければならないか．また，焼ばめ後に各円筒に生ずる円周方向応力を求めよ．

解答 必要な温度上昇は**基本例題10.06**の解答の式に数値を代入すると，

$$\Delta T=\frac{1}{\alpha_2}\frac{\Delta D}{D}=\frac{1}{12.0\times10^{-6}}\frac{0.1}{100}=83.3$$

外円筒の温度を84 K以上上げる必要がある．

焼ばめ後に生ずる円周方向応力は**基本例題10.06**の解答の式に数値を代入すると，

$$\sigma_{t1}=-\frac{E_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)}\frac{\Delta D}{D}=-\frac{90.0\times10^9}{1+\dfrac{90.0\times2.5}{200\times2.0}}\times\frac{0.1}{100}=-57.6\times10^6\ \text{Pa}=-57.6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{t2}=\frac{E_1}{\left(1+\dfrac{E_1t_1}{E_2t_2}\right)}\frac{\Delta D}{D}\frac{t_1}{t_2}=57.6\times10^6\times\frac{2.5}{2.0}=72.0\times10^6\ \text{Pa}=72.0\ \text{MPa}$$

■

基本例題10.10　基本例題10.09の円筒に内圧70 kPaが作用した. このとき, 各円筒に生ずる円周方向応力を求めよ.

解答　内圧pが作用した場合の二重円筒に生ずる円周方向応力は, **基本例題10.05**から,

$$\sigma_{t1}=\frac{E_1}{2(E_1t_1+E_2t_2)}p, \qquad \sigma_{t2}=\frac{E_2}{2(E_1t_1+E_2t_2)}p=\frac{E_2}{E_1}\sigma_{t1}$$

であるから, これらに数値を代入すると

$$\sigma_{t1}=\frac{E_1}{2(E_1t_1+E_2t_2)}p=\frac{1}{2}\times\frac{90.0\times10^9\times70\times10^3}{90.0\times10^9\times2.5\times10^{-3}+200.0\times10^9\times2.0\times10^{-3}}=10.1\times10^6\ \mathrm{Pa}=10.1\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{t2}=\frac{E_2}{E_1}\sigma_{t1}=\frac{200.0}{90.0}\times10.1=22.4\ \mathrm{MPa}$$

となるから, これらに**基本例題10.09**の答えを加えると,

$$\sigma_{t1}=-47.5\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{t2}=94.4\ \mathrm{MPa}$$

である. ■

基本例題10.11　円錐形薄肉容器が密度ϱの液体が高さHまで満たして上から吊り下げられている. この容器に発生する応力を求めよ. 容器の厚さをtとする. 容器の自重は無視する.

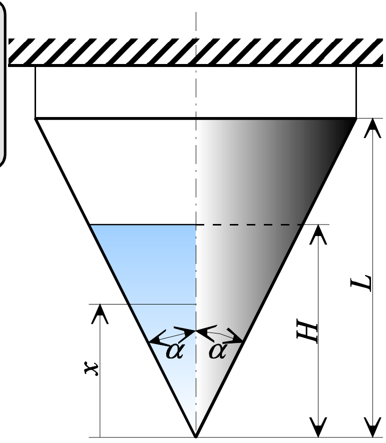


図10.2

解答　円錐の先端からの上向きにxをとる. まず, この点での液体の圧力は$p(x)=\varrho g(H-x)$である. また, この点での円錐の半径をrとすると$r=x\tan\alpha$. 円錐面に垂直な半径をr_1とおくと$r_1=\dfrac{r}{\cos\alpha}=x\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$である.

図10.3を参照して微小部分における円周方向の力のつりあい式をつくる. 図10.3左から圧力の合力は

$$\frac{1}{2}[(r_1+dr_1)+r_1]d\theta\frac{dx}{\cos\alpha}p\approx x\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}d\theta\frac{dx}{\cos\alpha}p=\varrho g(H-x)x\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}d\theta\frac{dx}{\cos\alpha}$$

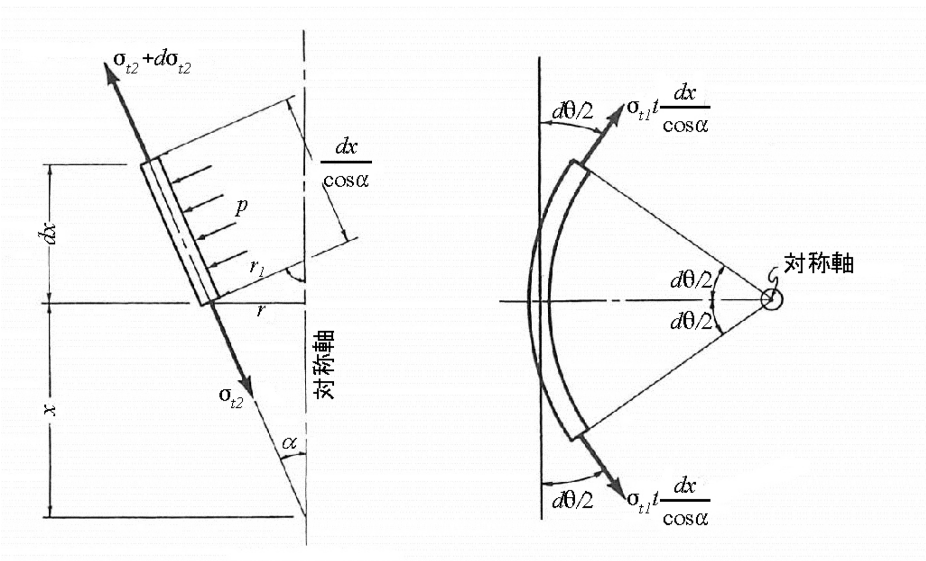


図10.3

であり, 発生している応力σ_{t1}の合力は図10.3右を参照して

$$2\times\sigma_{t1}t\frac{dx}{\cos\alpha}\sin\frac{d\theta}{2}\approx\sigma_{t1}t\frac{dx}{\cos\alpha}d\theta$$

である. $d\theta$は微小なので近似$\sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}$を用いた.

これら二つの力がつりあうことから, 発生する周応力σ_{t1}は

$$\sigma_{t1}=\frac{\varrho g(H-x)x}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

である.

次に円錐の母線方向の応力σ_{t2}を求める. いま考えている位置xでのこの応力による力のx軸方向成分は$2\pi rt\sigma_{t2}\cos\alpha=2\pi(x\tan\alpha)t\sigma_{t2}\cos\alpha$である. この力は$[0,x]$にある円錐形液体の重量$\frac{\pi}{3}r^2x\varrho g=\frac{\pi}{3}x^3\varrho g\tan^2\alpha$と$[x,H]$にある液体の圧力による力$\pi r^2\varrho g(H-x)=\pi\varrho g(H-x)x^2\tan^2\alpha$の和とつりあう必要があるから

$$(2\pi xt\tan\alpha\cdot\cos\alpha)\sigma_{t2}-\pi\varrho g\tan^2\alpha\left[\frac{1}{3}x^2+(H-x)x\right]=0$$

が成り立つ. これから,

$$\sigma_{t2}=\frac{\varrho g}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{2}Hx-\frac{1}{3}x^2\right)$$

である. ■

解説: 上で求めた式はいずれも$0<x<H$で成立する. $H<x<L$の場合,

σ_{t1}: $p(x)=0$なので$\sigma_{t1}=0$である.

σ_{t2}: $[0,H]$にある円錐形液体の重量$\frac{\pi}{3}H^3\varrho g\tan\alpha$とつりあうから$\sigma_{t2}=\frac{\varrho gH^3}{6xt}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$となる.

基本例題10.12　基本例題10.11において, それぞれの応力の最大値が生ずる位置と最大応力を求めよ.

解答　1) σ_{t1}の最大値

$$\sigma_{t1}=\frac{\varrho g(H-x)x}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

をxで微分してゼロにおくと$x=\frac{H}{2}$となるから, σ_{t1}の最大値$\sigma_{t1\max}$は$x=\frac{H}{2}$で生じ, その値は

$$\sigma_{t1\max}=\frac{1}{4}\frac{\varrho gH^2}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

である.

2) σ_{t2}の最大値

$$\sigma_{t2}=\frac{\varrho g}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{2}Hx-\frac{1}{3}x^2\right)$$

をxで微分してゼロにおくと$x=\frac{3}{4}H$となるから, σ_{t2}の最大値$\sigma_{t2\max}$は$x=\frac{3}{4}H$で生じ, その値は

$$\sigma_{t2\max}=\frac{3}{16}\frac{\varrho g H^2}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

である. ■

> **基本例題10.13　基本例題10.11**の容器に, 液体の代わりに圧力pの気体を封入して密閉されている. 発生する応力を求めよ.

解答　図10.3を参照して微小部分における円周方向の力のつりあい式をつくる. 図10.3左から圧力の合力は

$$\frac{1}{2}[(r_1+dr_1)+r_1]d\theta\frac{dx}{\cos\alpha}p\approx x\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}d\theta\frac{dx}{\cos\alpha}p$$

であり, 発生している応力σ_{t1}の合力は図10.3右を参照して

$$2\times\sigma_{t1}t\frac{dx}{\cos\alpha}\sin\frac{d\theta}{2}\approx\sigma_{t1}t\frac{dx}{\cos\alpha}d\theta$$

である.

これら二つの力がつりあうことから, 発生する周応力σ_{t1}は

$$\sigma_{t1}=\frac{px}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

である.

次に円錐の母線方向の応力σ_{t2}を求める. いま考えている位置xでのこの応力による力のx軸方向成分は $2\pi rt\sigma_{t2}\cos\alpha=2\pi(x\tan\alpha)t\sigma_{t2}\cos\alpha$である. この力は圧力による力$\pi r^2p=\pi px^2\tan^2\alpha$とつりあう必要があるから

$$\sigma_{t2}=\frac{1}{2}\frac{px}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

である. ■

> 解説 : 図10.3から$r=x\tan\alpha$とすると
>
> $$\sigma_{t1}=\frac{pr}{t}\frac{1}{\cos\alpha},\quad \sigma_{t2}=\frac{1}{2}\frac{pr}{t}\frac{1}{\cos\alpha}$$
>
> となる. ここで$\alpha\to0$とおくと円錐容器は円筒容器に近づく. このときの応力は
>
> $$\sigma_{t1}=\frac{pr}{t},\quad \sigma_{t2}=\frac{1}{2}\frac{pr}{t}$$
>
> となって円筒容器の周方向応力と軸方向応力に一致する.

直交する二方向に曲率を持つ薄肉圧力容器

図10.4のように圧力容器の微小部分の長さが$R_1d\theta_1$, $R_2d\theta_2$であるとする. ここで, R_1, R_2はいま考えている微小部分の曲率半径であり, $d\theta_1$, $d\theta_2$は微小角度である. 微小部分にはたらく圧力pによる力は

$$p(R_1d\theta_1)(R_2d\theta_2)$$

である.

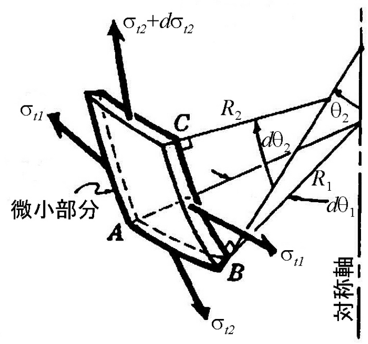


図10.4

この微小部分に生じている周方向応力をσ_{t1}, σ_{t2}で表すと, 周方向の力は, いま考えている微小部分の厚さをtとすると

$\sigma_{t1}tR_2d\theta_2$, $\sigma_{t2}tR_1d\theta_1$

で表される. これらの力の圧力による力方向の分力の和は,

$$2\sigma_{t1}tR_2d\theta_2\sin\frac{d\theta_1}{2}+2\sigma_{t2}tR_1d\theta_1\sin\frac{d\theta_2}{2}\approx(\sigma_{t1}tR_2+\sigma_{t2}tR_1)d\theta_1d\theta_2$$

である. ここで$d\theta_1$, $d\theta_2$は微小なので近似$\sin\frac{d\theta_1}{2}\approx\frac{d\theta_1}{2}$, $\sin\frac{d\theta_2}{2}\approx\frac{d\theta_2}{2}$を用いた.

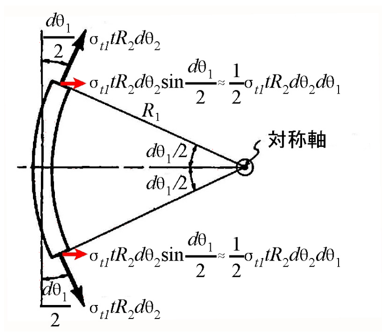


図10.5

これら二つの力がつりあうから,

$$(\sigma_{t1}tR_2+\sigma_{t2}tR_1)d\theta_1d\theta_2-p(R_1d\theta_1)(R_2d\theta_2)=0\,.$$

これから,

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}+\frac{\sigma_{t2}}{R_2}=\frac{p}{t}$$

となる. この式が二方向に曲率を持つ薄肉圧力容器で重要な式になる(簡単な式なので覚えておいてもいいかも).

基本例題10.14 上で求めた直交する二方向に曲率を持つ圧力容器の式を用いて一定内圧pが作用する円筒形圧力容器および球形圧力容器に生ずる円周方向応力を求めよ. 容器の厚さをtとする.

解答 1)円筒形圧力容器

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}+\frac{\sigma_{t2}}{R_2}=\frac{p}{t}$$

において$R_2=\infty$とおくと,

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}=\frac{p}{t}$$

となり, 円筒の直径をDとして$R_1=\frac{D}{2}$とおくと

$$\sigma_{t1}=\frac{D}{2t}p$$

この式は**基本例題10.01**の式と同じである.

2)球形圧力容器

$R_1=R_2$とおくと

$$\frac{1}{R_1}(\sigma_{t1}+\sigma_{t2})=\frac{p}{t}$$

また, 球形の場合直交する二方向の円周方向応力は等しいから$\sigma_{t1}=\sigma_{t2}$であり,

$$2\frac{\sigma_{t1}}{R_1}=\frac{p}{t}$$

となり, 球の直径をDとして$R_1=\frac{D}{2}$とおくと

$$\sigma_{t1}=\frac{D}{4t}p$$

である. ■

解説：**基本例題10.11**に，直交する二方向に曲率を持つ薄肉圧力容器に生ずる応力の式を適用する．応力の式で$R_1=r_1=x\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$，$R_2=\infty$，$p=p(x)=\varrho g(H-x)$とおくと，

$$\sigma_{t1}=\frac{\varrho g(H-x)x}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}$$

が得られる．

基本例題10.15 厚さtの軸対称(回転対称)圧力容器に気体が内圧pで封入されている．この容器に発生する対称軸まわりの周方向応力σ_{t1}と母線方向の応力σ_{t2}を求めよ．直交する二方向の曲率半径は図10.4のようにとるものとする．

解答 母線方向の応力σ_{t2}は，圧力による対称軸方向の力πR_1^2pと母線方向応力による力$2\pi R_1 t\sigma_{t2}$がつりあうことから

$$\sigma_{t2}=\frac{1}{2}\frac{R_1}{t}p$$

である．円周方向応力は，

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}+\frac{\sigma_{t2}}{R_2}=\frac{p}{t}$$

に代入して

$$\sigma_{t1}=\frac{1}{2}\frac{R_1}{t}p\left(2-\frac{R_1}{R_2}\right)$$

である．■

解説：直交する二方向に曲率を持つ薄肉圧力容器に生ずる応力の式

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}+\frac{\sigma_{t2}}{R_2}=\frac{p}{t}$$

は，一方の曲率半径が無限大の場合基本例題10.14やその解説のように応力成分は一つだけになるので便利に使えるが，この例題のように曲率半径が共に有限である場合はいずれか一方の応力を何らかの方法で求めておく必要がある．

基本例題10.16 図10.6のような半球状容器の途中まで密度ϱの液体が入っている．容器に生ずる周方向応力と母線方向応力を求めよ．容器の厚さをtとする．
指針：**基本例題10.11**のように考える．

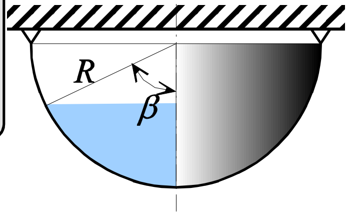


図10.6

解答 図10.7のように座標系を考える．

$0<\alpha<\beta$の範囲において，角度$[0,\alpha]$の範囲にある液体の重量をWとすると，

$$W=\varrho g\int_0^{\alpha}\pi(R\sin\alpha)^2\sin\alpha R d\alpha=\pi\varrho gR^3\left(\frac{2}{3}-\cos\alpha+\frac{1}{3}\cos^3\alpha\right)$$

である．また，上部の液体の圧力による力をPとすると，

$$P=\pi\varrho gR^3\sin^2\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)$$

である．

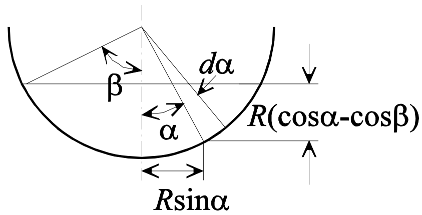


図10.7

これらの力の和が母線方向応力による力の垂直方向成分$2\pi Rt\sin^2\alpha\cdot\sigma_{t2}$とつりあうので，

$$\sigma_{t2}=\frac{1}{6}\varrho g\frac{R^2}{t}\left(2\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}-3\cos\beta\right)$$

である．

いま考えている点での流体圧力は$p=\varrho gR(\cos\alpha-\cos\beta)$であるから，

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}+\frac{\sigma_{t2}}{R_2}=\frac{p}{t}$$

で$R_1=R_2=R$とすると

$$\sigma_{t1}=\varrho g\frac{R^2}{t}(\cos\alpha-\cos\beta)-\sigma_{t2}=\frac{1}{6}\varrho g\frac{R^2}{t}\left(6\cos\alpha-2\frac{1-\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}-3\cos\beta\right)$$

である．

$\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$では

$$\sigma_{t2}=\frac{1}{6}\varrho g\frac{R^2}{t}\frac{2-3\cos\beta+\cos^3\beta}{\sin^2\alpha}$$

$$\sigma_{t1}=-\sigma_{t2}$$

である．■

基本例題10.17 図10.8左のような球状ドームを作る．材料の単位面積当たりの重量がwであるとして，周方向応力と母線方向応力を求めよ．ドームの厚さをtとする．

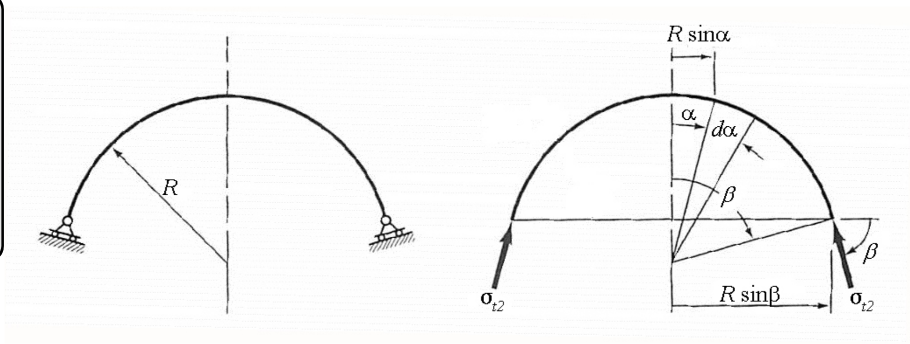


図10.8

解析 図10.8右のように考えると，ドームの角度αまでの重量は，

$$W=w\int_0^{\alpha}2\pi R\sin\alpha\, Rd\alpha=2\pi R^2(1-\cos\alpha)w$$

である．この重量と応力σ_{t2}による力の垂直方向成分$2\pi Rt\sin\alpha\sigma_{t2}\cdot\sin\alpha$がつりあうので，

$$\sigma_{t2}=\frac{R}{t}\frac{1}{1+\cos\alpha}w$$

である．支持部では$\alpha=\beta$であるので

$$\sigma_{t2}=\frac{R}{t}\frac{1}{1+\cos\beta}w$$

となる．

次に円周方向応力を求める．このとき，単位面積当たりの半径方向の力を求める必要がある．材料の単位面積当たりの重量wは下向きの力なので，この力の法線方向成分は$w\cos\alpha$である．この成分はドームの外から内に向かう単位面積当たりの力なので，直交する二方向に曲率を持つ圧力容器の応力の式では$p=-w\cos\alpha$としなければならない．一方，先に求めたσ_{t2}は圧縮応力になるので

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}+\frac{\sigma_{t2}}{R_2}=\frac{p}{t}$$

から

$$\frac{\sigma_{t1}}{R}=-\frac{w}{t}\cos\alpha-\frac{\sigma_{t2}}{R}=-\frac{w}{t}\cos\alpha+\frac{w}{t}\frac{1}{1+\cos\alpha}$$

となるから

$$\sigma_{t1}=\frac{R}{t}w\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}-\cos\alpha\right)$$

である．支持部では$\alpha=\beta$であるので

$$\sigma_{t1}=\frac{R}{t}w\left(\frac{1}{1+\cos\beta}-\cos\beta\right)$$

となる．■

解説：とくに解説というわけではないが，公式を利用する際はそれが導かれた前提条件を頭に入れた上で実際に代入する量の正負に注意する．この例題の場合は，pとσ_{t2}は式の導出の際の向きとは逆になっている．

基本例題10.18　基本例題10.11の系で，最大せん断応力，ミーゼス応力をxの関数として表せ．また，最大せん断応力，ミーゼス応力が最大値をとるxの位置をもとめ，これらの最大値を求めよ．ただし，$0<x<H$の範囲で考えるものとする．

解答　基本例題10.11から応力成分σ_{t1}，σ_{t2}は

$$\sigma_{t1}=\frac{\varrho g}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}(H-x)x,\qquad \sigma_{t2}=\frac{1}{6}\frac{\varrho g}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}(3H-2x)x$$

である．これらの応力成分はいずれも主応力である．もう一つの主応力は容器の厚さ方向の応力であるが，小さいとしてゼロとする．

1)最大せん断応力

まず，二つの主応力の挙動について調べる．σ_{t1}，σ_{t2}は$0<x<H$で$\sigma_{t1}>0$，$\sigma_{t2}>0$であり，大小関係は

$$0<x<\frac{3}{4}H:\quad \sigma_{t1}>\sigma_{t2}$$

$$\frac{3}{4}H<x<H:\quad \sigma_{t1}<\sigma_{t2}$$

であるから，最大せん断応力は

$$0<x<\frac{3}{4}H:\quad \tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_{t1}-0)=\frac{1}{2}\frac{\varrho g}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}(H-x)x$$

$$\frac{3}{4}H<x<H:\quad \tau_{\max}=\frac{1}{2}(\sigma_{t2}-0)=\frac{1}{12}\frac{\varrho g}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}(3H-2x)x$$

である．

2)ミーゼス応力

ミーゼス応力の定義式に代入すると

$$\sigma_M = \frac{1}{6}\frac{\varrho g}{t}\frac{\tan\alpha}{\cos\alpha}x\sqrt{27H^2-54Hx+28x^2}$$

である．

最大せん断応力の最大値は$x=\dfrac{H}{2}$で生じ，その値は$\dfrac{1}{8}\dfrac{\varrho g}{t}\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}H^2$

ミーゼス応力の最大値は$x=0.521H$で生じ，その値は$0.221\dfrac{\varrho g}{t}\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}H^2$

である．■

解説：図10.9に応力の変化を示す．ここで縦軸のnon-dimensional stressは応力の無次元量を表しており，応力値を$\dfrac{\varrho g}{t}\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha}H^2$で除して表示している．

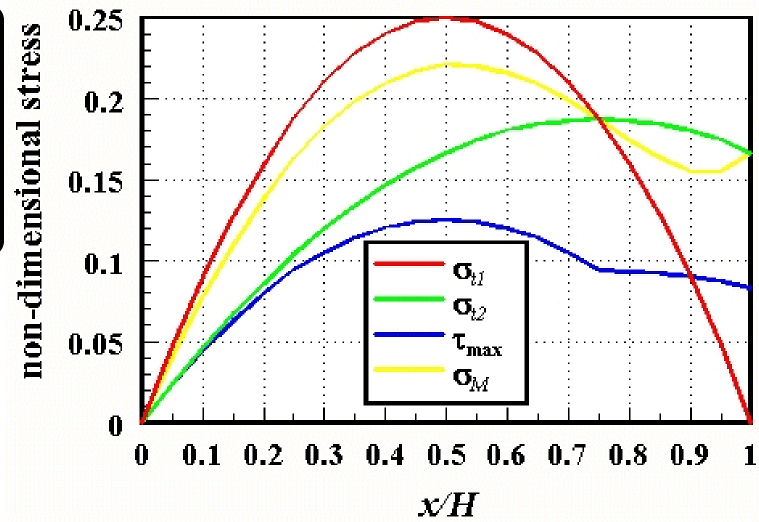


図10.9

基本例題10.19　図10.10のようなトーラス(円環体)状圧力容器に生ずる応力を求めよ．容器内圧をp，容器の厚さをtとする．

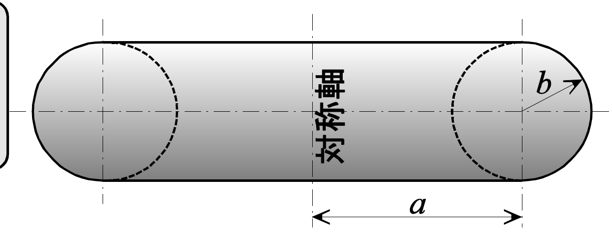


図10.10

解答　まずσ_{t2}を求める．図10.11を参照して点Bにおける応力σ_{t2}による力の垂直方向分力は

$$2\pi r t\sigma_{t2}\sin\alpha$$

であり，圧力による力は弧ABの水平面への正射影の対称軸まわりの面積を使って

$$\pi(r^2-a^2)p$$

である．これらがつりあうことから，

$$\sigma_{t2} = \frac{1}{2}\frac{r^2-a^2}{rt\sin\alpha}p$$

となる．この式はさらに，$\sin\alpha = \dfrac{r-a}{b}$を用いると

$$\sigma_{t2} = \frac{1}{2}\frac{(r+a)b}{rt}p$$

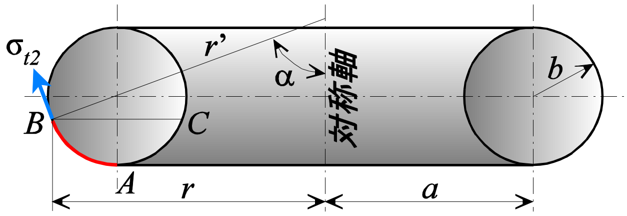


図10.11

となる．ここで$a-b \leq r \leq a+b$である．

次にσ_{t1}を求める．公式

$$\frac{\sigma_{t1}}{R_1}+\frac{\sigma_{t2}}{R_2}=\frac{p}{t}$$

で$R_2=b$，$R_1=\frac{r}{\sin\alpha}$であるから，σ_{t1}は

$$\sigma_{t1}=\frac{1}{2}\frac{b}{t}p$$

である．■

解説1：σ_{t2}の最大値は$r=a-b$で生じ，その値は$\sigma_{t2\max}=\frac{1}{2}\frac{(2a-b)b}{(a-b)t}p$である．

解説2：図10.11でAC間の長さを$2c$とおくと，点BとCにおけるσ_{t2}をσ_{t2B}とσ_{t2C}で表すと

$$\sigma_{t2B}=\frac{1}{2}\frac{2a+c}{a+c}\frac{b}{t}p,\quad \sigma_{t2C}=\frac{1}{2}\frac{2a-c}{a-c}\frac{b}{t}p$$

であり，これらの応力による力の垂直成分は

$$2\pi(a+c)t\sigma_{t2B}\sin\alpha+2\pi(a-c)t\sigma_{t2C}\sin\alpha=4\pi acp$$

である．一方，線分ACを対称軸（回転軸）まわりに一回転してできる面の面積は$\pi(a+c)^2-\pi(a-c)^2=4\pi ac$であるから圧力による力は$4\pi acp$である．つまり，$\sigma_{t2}$による力の垂直成分と圧力による力はつりあっていることがわかる．

第11章　薄肉曲りはりとばねの力学

基本事項1（薄肉曲りはり）

カスティリアノの定理を用いて薄肉曲りはりの解析を行うことができる．薄肉曲りはりは通常の曲りはりとは異なり，断面係数や中立軸に関して通常のはり理論が使える．このため解析はずいぶん簡単になる．ここでは，まず，薄肉曲りはりについての考え方の基本を述べ，例題を通して理解する．

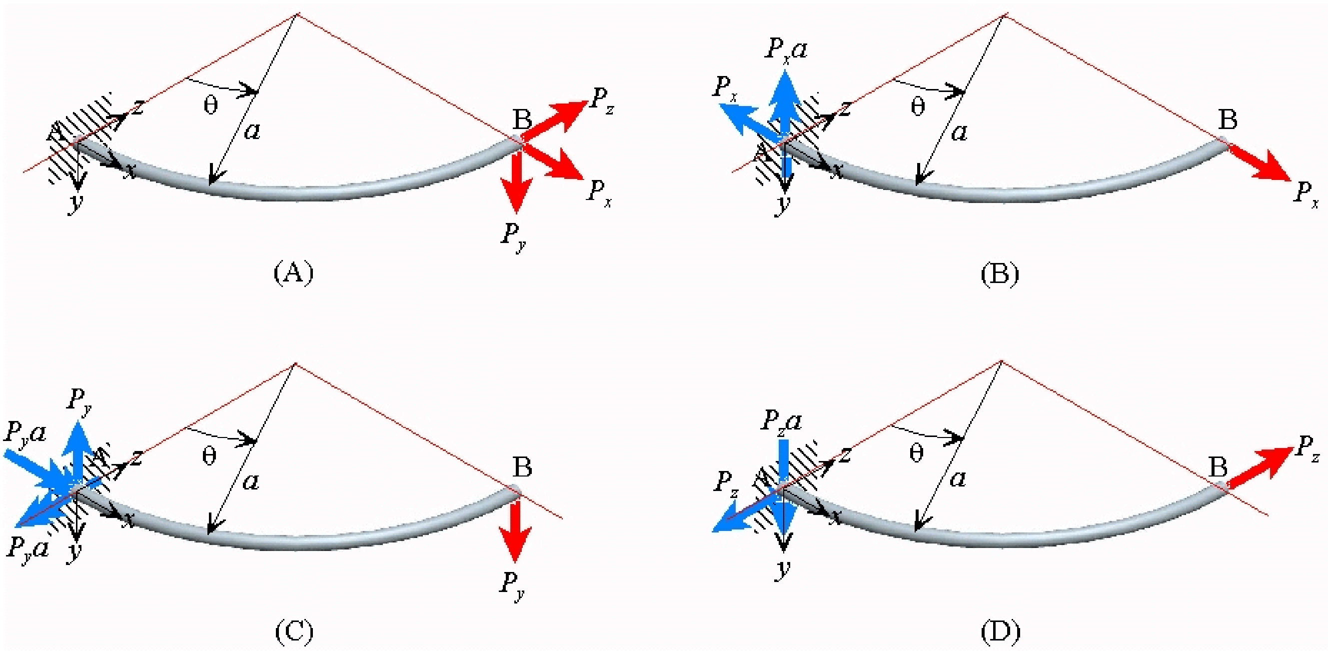


図11.1

図11.1の(A)のように，半径aの1/4円弧薄肉はりの自由端にP_x，P_y，P_zの荷重が作用している．このとき，各荷重によって固定支持に発生する反力と反モーメントを青い矢印で示している．たとえば，P_xのみ作用しているとき(B)のようである．固定支持部にはx軸の負の向きに大きさP_xの反力が発生する．この反力と外力は作用線がaだけずれているので，y軸の負の方から見て時計回りの大きさ$P_x a$のモーメントを生ずるから，このモーメントとつりあうために同じ大きさでy軸の負の方から見て反時計回りのモーメントが生じていなければならない．(C), (D)も同様に理解できるだろう．

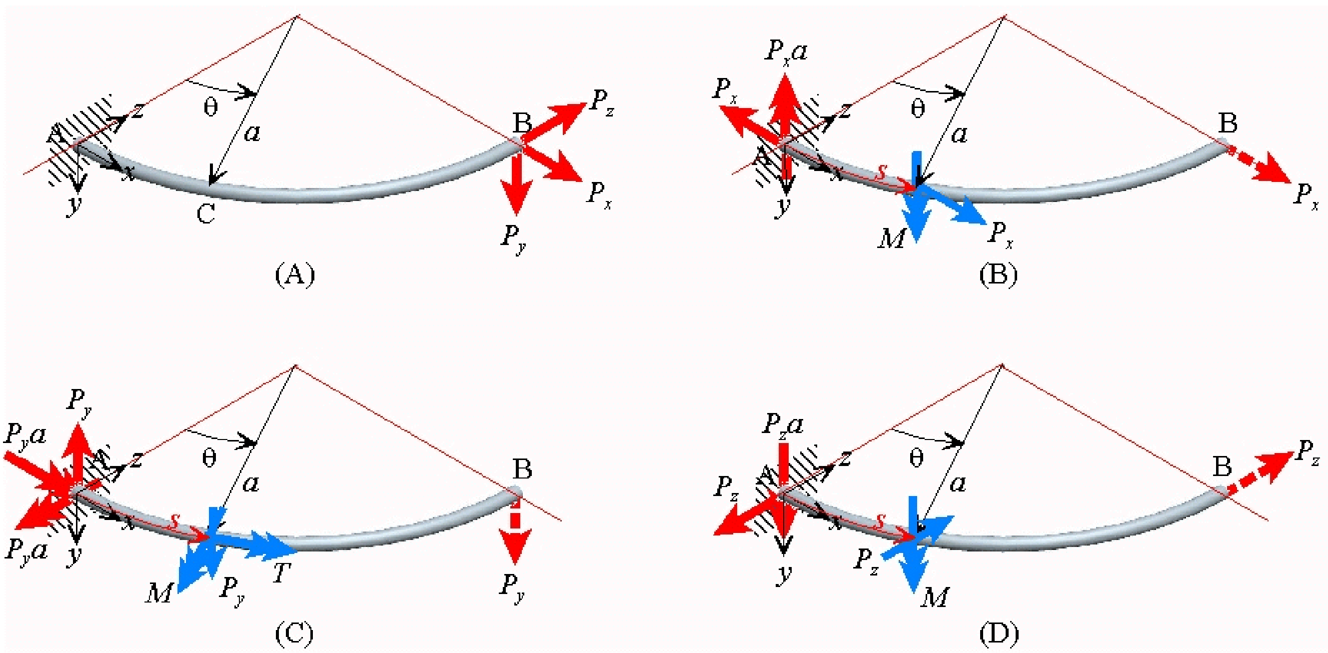


図11.2

さて，カスティリアノの定理を使うためには曲げモーメントやねじりモーメントを求める必要がある．(B)から(D)についてみていこう．θは図11.2のように取るものとし，はりの途中の点Cに発生している内力を青い矢印で表現する(図11.2を参照)．何度も書くが，固定支持部に発生する反力と反モーメントはフリーボディダイヤグラムでは外力になるので，赤い矢印で表示している．また，積分のための座標として固定支持部を基準に図中赤線で示したはりの中央線に沿った座標系sをとる．このとき，$s=a\theta$，$ds=ad\theta$である．まず，(B)と(D)について考える．

(B) モーメントのつりあいは

$$-P_x a+M+P_x a(1-\cos\theta)=0$$

であるので，曲げモーメントは

$$M=P_x a\cos\theta$$

(D) モーメントのつりあいは

$$-P_z a-M+P_z a\sin\theta=0$$

であるので，

$$M=-P_z a(1-\sin\theta)$$

となる．

各系の荷重方向変位量は，単位荷重法を用いて，次のように求めることができる．

(B) $$\delta_x=\frac{P_x a^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}\frac{P_x a^3}{EI}$$

(D) $$\delta_z=\frac{P_z a^3}{EI}\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)^2 d\theta=\frac{3\pi-8}{4}\frac{P_z a^3}{EI}$$

さて，図11.1の(B)の系の点Bのz方向変位を求めてみよう．これを$\delta_{(B)z}$で表す．単位荷重を(D)の系のP_zの向きにとると，

$$M=P_x a\cos\theta, \qquad m=-a(1-\sin\theta)$$

であるから，単位荷重法によって

$$\delta_{(B)z}=-\frac{P_x a^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot(1-\sin\theta)d\theta=-\frac{1}{2}\frac{P_x a^3}{EI}$$

となる．つまり，z軸の負の向きに大きさ$\dfrac{1}{2}\dfrac{P_x a^3}{EI}$の変位を生ずることになる．

面外の力が作用する場合((C)タイプ)の解析はかなり面倒になる．ここでは，しばらく(B)，(D)タイプの曲りはりについて述べ，後半部で(C)タイプの曲りはりについて述べることにする．

基本例題11.01 図11.1の(D)の系の点Bのx方向変位を求めよ．

解答 点Bのx方向変位を$\delta_{(D)x}$で表す．単位荷重を(B)の系のP_xの向きにとると，

$$M=-P_z a(1-\sin\theta), \quad m=a\cos\theta$$

であるから，単位荷重法によって

$$\delta_{(D)x}=-\frac{P_z a^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot(1-\sin\theta)d\theta=-\frac{1}{2}\frac{P_z a^3}{EI}$$

となる．つまり，x軸の負の向きに大きさ$\dfrac{1}{2}\dfrac{P_z a^3}{EI}$の変位を生ずる．■

基本例題11.02 図11.3において，点Bは水平方向のみ移動可能で，回転支持されている．点Bの水平方向変位と垂直方向反力を求めよ．

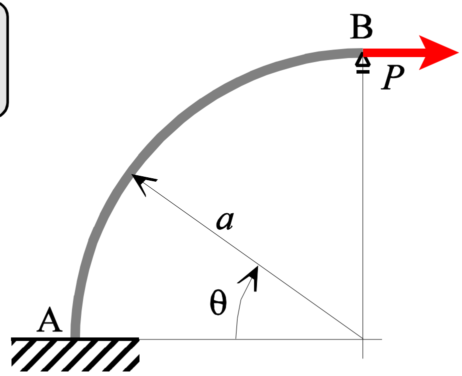


図11.3

解答 点Bでの垂直方向反力をQとおくと，図11.1の(B)と(D)を重ね合わせたものなので，曲げモーメントは

$$M=-Pa(1-\sin\theta)+Qa\cos\theta$$

となるので，点Bの垂直方向変位は，

$$\delta_{BV}=\frac{\partial U}{\partial Q}=-\frac{a^3}{EI}\int_0^{\pi/2}[P(1-\sin\theta)-Q\cos\theta]\cos\theta d\theta=-\frac{1}{2}\frac{Pa^3}{EI}+\frac{\pi}{4}\frac{Qa^3}{EI}$$

である．垂直方向変位がゼロでなければならないので，垂直方向反力は

$$Q=\frac{2}{\pi}P$$

で仮定どおり上向きである．

水平方向変位は，

$$\delta_{BH}=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{a^3}{EI}\int_0^{\pi/2}[P(1-\sin\theta)-Q\cos\theta](1-\sin\theta)d\theta=\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)\frac{Pa^3}{EI}-\frac{1}{2}\frac{Qa^3}{EI}$$

この式に$Q=\frac{2}{\pi}P$を代入すると

$$\delta_{BH}=\left(\frac{3\pi}{4}-2-\frac{1}{\pi}\right)\frac{Pa^3}{EI}$$

である．■

基本例題11.03 図11.4の構造のAD間の距離の変化量を求めよ．

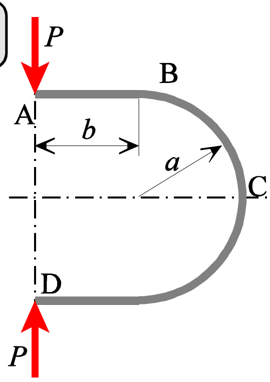


図11.4

解答 図11.4の構造に対するフリーボディダイヤグラムは，構造の対称性によって図11.5[1]のようになる．

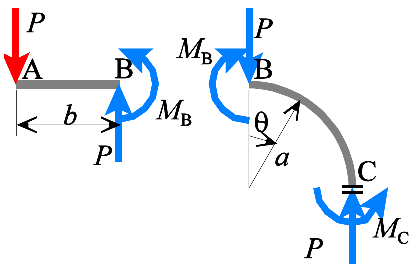


図11.5

水平部材の曲げモーメントは，AからBに向かってx軸をとると，

$$M_{AB}=-Px.$$

曲りはり部材BCに発生する曲げモーメントは，図11.5のようにθをとると，

$$M_{BC}=M_B-Pa\sin\theta=-Pb-Pa\sin\theta.$$

図11.5の点Aの垂直方向変位δ_Aは

$$\delta_A=\frac{P}{EI}\int_0^b x^2dx+\frac{Pa}{EI}\int_0^{\pi/2}(b+a\cos\theta)^2d\theta=\frac{1}{3}\frac{Pb^3}{EI}+\frac{1}{4}\frac{Pa}{EI}(2\pi b^2+8ab+\pi a^2)$$

$b=ka$と表すと，

$$\delta_A=\frac{1}{12}\frac{Pa^3}{EI}(4k^2+6\pi k^2+24k+3\pi)$$

この値は，図11.4の点Cを通る水平対称軸を基準にした値であるので，AD間の距離は$2\delta_A$短くなる．■

[1]この図で，Cにある二重線は移動可能な固定支持を表している．Cは水平方向に移動可能である

基本例題11.04　図11.6の構造の点AD間の距離の変化量を求めよ．
ヒント：基本的には**基本例題11.03**と変わらない．固定モーメントが入るだけ．

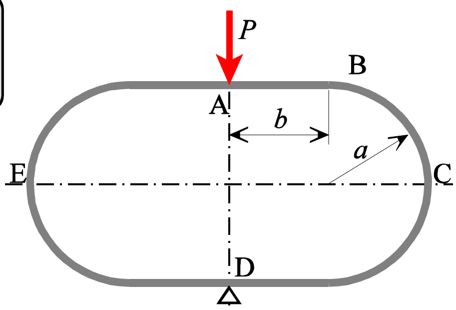


図11.6

解答　図11.6の構造に対するフリーボディダイヤグラムは，構造の対称性によって図11.7[2]のようになる．

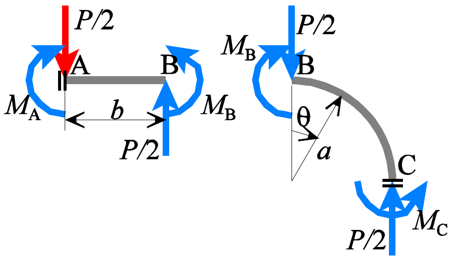


図11.7

水平部材ABについてのモーメントのつりあいは

$$M_A-\frac{1}{2}Pb-M_B=0$$

であるから，

$$M_B=M_A-\frac{1}{2}Pb.$$

水平部材の曲げモーメントは，AからBに向かってx軸をとると，

$$M_{AB}=M_A-\frac{1}{2}Px.$$

曲りはり部材BCに発生する曲げモーメントは，図11.7のようにθをとると，

$$M_{BC}=M_B-\frac{1}{2}Pa\sin\theta=M_A-\frac{1}{2}Pb-\frac{1}{2}Pa\sin\theta.$$

まず，M_Aを定める．点Aのたわみ角をφ_Aとすると，カスティリアノの定理から，

$$\varphi_A=\frac{\partial U}{\partial M_A}=\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A-\frac{1}{2}Px\right)dx+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A-\frac{1}{2}P(b+a\sin\theta)\right)d\theta.$$

対称性から$\varphi_A=0$でなければならないので，

$$M_A=\frac{b^2+\pi ab+2a^2}{2b+\pi a}\frac{1}{2}P$$

となる．

図11.7の点Aの変位量は，カスティリアノの定理から

$$\delta_A=\frac{\partial U}{\partial(P/2)}=-\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A-\frac{1}{2}Px\right)xdx-\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A-\frac{1}{2}P(b+a\sin\theta)\right)(b+a\sin\theta)d\theta$$

となるから，

$$\delta_A=\frac{1}{6EI}(b^3P-3b^2M_A)+\frac{a}{EI}\left(\frac{1}{4}\pi b^2P+abP+\frac{1}{8}\pi a^2P-\frac{1}{2}\pi bM_A-aM_A\right)$$

この値にM_Aの値を代入すれば最終的な答えが得られる．ここまでで十分な気がするが，$b=ka$と表すと，

$$M_A=\frac{k^2+\pi k+2}{2k+\pi}\frac{1}{2}Pa,\quad \delta_A=\frac{a^3}{6EI}\left(k^3P-3k^2\frac{M_A}{a}\right)+\frac{a^3}{EI}\left(\frac{1}{4}\pi k^2P+kP+\frac{1}{8}\pi P-\frac{1}{2}\pi k\frac{M_A}{a}-\frac{M_A}{a}\right)$$

と表され，

$$\delta_A=\frac{1}{24}\frac{Pa^3}{EI}\frac{2k^4+4\pi k^3+24k^2+6\pi k+3\pi^2-24}{2k+\pi}$$

となる．しかし，この値は，図11.6の水平対称軸ECを基準にした値であるので，AD間の距離は$2\delta_A$だけ短くなる．■

[2]この図で，AとCにある二重線は移動可能な固定支持を表している．Aは垂直方向に移動可能で，Cは水平方向に移動可能である

解説：点Cでのたわみ角がゼロであることを確認してみよう．まず，M_AをM_Cで書き直すと，$M_A = M_C + \frac{1}{2}P(a+b)$であるから，曲げモーメントは$M_{AB} = M_C + \frac{1}{2}P(a+b) - \frac{1}{2}Px$，$M_{BC} = M_C + \frac{1}{2}Pa(1-\sin\theta)$と書ける．点Cのたわみ角を$\varphi_C$とすると，

$$\varphi_C = \frac{\partial U}{\partial M_C} = \frac{1}{EI}\int_0^b \left(M_C + \frac{1}{2}P(a+b) - \frac{1}{2}Px \right) dx + \frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2} \left(M_C + \frac{1}{2}Pa(1-\sin\theta) \right) d\theta$$
$$= \frac{1}{EI}\left(M_C b + \frac{1}{2}P(a+b)b - \frac{1}{4}Pb^2 \right) + \frac{a}{2EI}\left[(\pi-2)a\frac{1}{2}P + \pi M_C \right]$$

この式に$M_C = M_A - \frac{1}{2}P(a+b)$，$M_A = \frac{b^2+\pi ab+2a^2}{2b+\pi a}\frac{1}{2}P$を代入すると$\varphi_C = 0$が確認できる．

基本例題11.05　図11.8の構造の点Aに生ずる水平方向反力を求めよ．点AとBは回転支持点である．

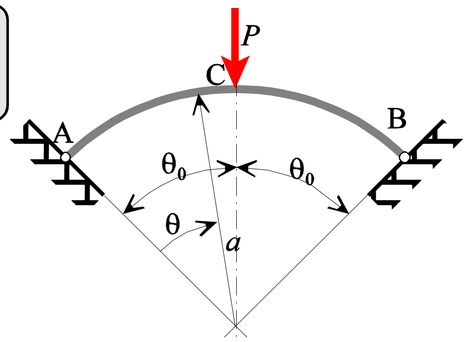


図11.8

解答　点AとBが回転支持点なので，垂直方向反力はそれぞれ上向きに$P/2$である．点Aにおける水平方向反力を右向きにR_Hとおくと，AC間の曲げモーメントM_{AC}は

$$M_{AC} = -[\cos(\theta_0-\theta) - \cos\theta_0]R_H a - [\sin(\theta_0-\theta) - \sin\theta_0]\frac{P}{2}a$$

である．点Aの水平方向変位δ_{AH}がゼロであることから，単位荷重法を用いて

$$\delta_{AH} = \frac{a^3}{EI}\int_0^{\theta_0} \left\{ [\cos(\theta_0-\theta) - \cos\theta_0]R_H + [\sin(\theta_0-\theta) - \sin\theta_0]\frac{P}{2} \right\} [\cos(\theta_0-\theta) - \cos\theta_0] d\theta = 0.$$

これより，

$$\frac{1}{4}(4\theta_0 - 3\sin 2\theta_0 + 2\theta_0\cos 2\theta_0)R_H + \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta_0 - 4\cos\theta_0 + 2\theta_0\sin 2\theta_0)\frac{P}{2} = 0$$

が得られ，R_Hは

$$R_H = -\frac{1 + 3\cos 2\theta_0 - 4\cos\theta_0 + 2\theta_0\sin 2\theta_0}{4\theta_0 - 3\sin 2\theta_0 + 2\theta_0\cos 2\theta_0}\frac{P}{2}$$

となる．■

解説：図11.9の構造の場合，点A，Bでは水平方向反力のほかに固定モーメントが発生することはすぐにわかるだろう．いま，点Aでの固定モーメントをM_Aとして時計まわりを仮定すると，AC間の曲げモーメントM_{AC}は

$$M_{AC}=M_A-[\cos(\theta_0-\theta)-\cos\theta_0]R_H a-[\sin(\theta_0-\theta)-\sin\theta_0]\frac{P}{2}a$$

で表現できる．R_HとM_Aを決めるためには，

$$\frac{\partial U}{\partial R_H}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial M_A}=0$$

から得られるR_HとM_Aを未知量とする連立方程式を解くことになる．

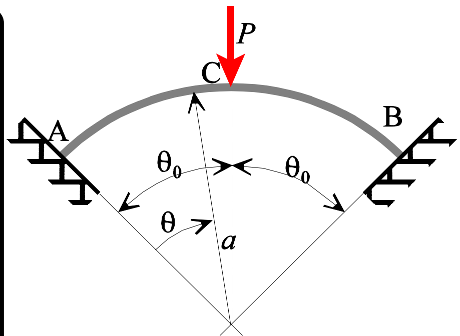


図11.9

基本例題11.06　図11.10のように曲りはりの軸線に垂直に単位長さあたりpの等分布荷重が外向きに作用している(図では矢印を入れていません．かなり面倒くさいので)．系の固定支持Aに生ずる固定モーメント，反力を求めよ．また，任意点の垂直方向ならびに水平方向の変位量を求めよ．

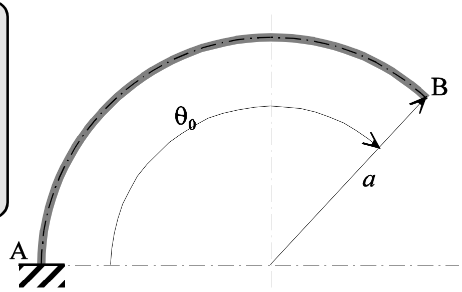


図11.10

解答　フリーボディダイヤグラムを図11.11に示す．

等分布荷重による力の垂直方向成分と水平方向成分は，積分変数をαで表すと，$p\sin\alpha\cdot ad\alpha$(上向き)と$p\cos\alpha\cdot ad\alpha$(左向き)であるから，等分布荷重による垂直方向合力P_Vと水平方向合力P_Hは

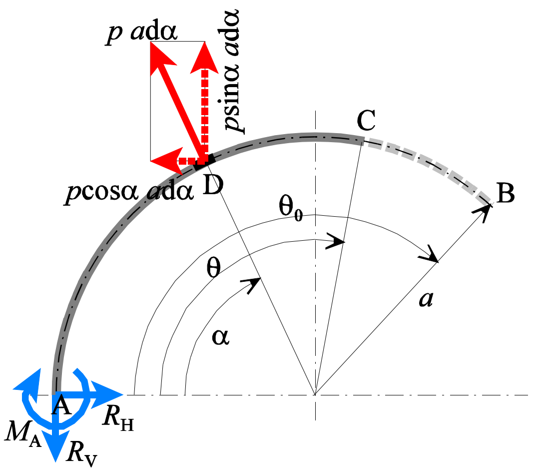


図11.11

$$P_V=pa\int_0^\theta \sin\alpha d\alpha=(1-\cos\theta)pa\ (\text{上向き}),$$

$$P_H=pa\int_0^\theta \cos\alpha d\alpha=pa\sin\theta\ (\text{左向き})$$

となり，固定支持Aに生ずる反力は$\theta=\theta_0$とおいて力のつりあいから

$$R_V=pa(1-\cos\theta_0)\ (\text{下向き}),\quad R_H=pa\sin\theta_0\ (\text{右向き})$$

次に，等分布荷重によって生ずる曲げモーメントを求める．等分布荷重による力の垂直方向成分と水平方向成分によるモーメントは，図11.11のようにθをとると，CD間の水平距離は$a(\cos\alpha-\cos\theta)$[3]，垂直距離は$a(\sin\theta-\sin\alpha)$であるから，点Cについて時計まわりに

$$\begin{aligned}dM_p&=pa^2\sin\alpha(\cos\alpha-\cos\theta)d\alpha+pa^2\cos\alpha(\sin\theta-\sin\alpha)d\alpha\\&=pa^2\sin(\theta-\alpha)d\alpha\end{aligned}$$

となり，これをαについて0からθまで積分すると点Cでの等分布荷重によるモーメントは

$$M_p=pa^2\int_0^\theta \sin(\theta-\alpha)d\alpha=pa^2(1-\cos\theta)$$

となる．M_Aを固定支持Aでの固定モーメント(時計まわりを仮定)，点Cでの曲げモーメントをM(反時計まわりを仮定)とすると，モーメントのつりあい

$$M_A+M_p-R_V a(1-\cos\theta)-P_H a\sin\theta-M=0$$

から，曲げモーメントは

[3] CD間の水平距離=AC間の水平距離-AD間の水平距離=$a(1-\cos\theta)-a(1-\cos\alpha)=a(\cos\alpha-\cos\theta)$．

$$M=M_A-pa^2[\cos(\theta_0-\theta)-\cos\theta_0]$$

となり，$\theta=\theta_0$で$M=0$の条件から固定モーメントは

$$M_A=pa^2(1-\cos\theta_0)$$

となる．これを用いると曲げモーメントは

$$M=pa^2[1-\cos(\theta_0-\theta)]$$

と書ける．

任意の位置θに上向きにQ_V，左向きにQ_Hの仮想荷重を負荷する．これらの力によって発生する曲げモーメントmは次式で表される．

$$m=-Q_V a(\cos\theta-\cos\alpha)+Q_H a(\sin\theta-\sin\alpha)$$

ここで$0<\alpha<\theta$である．まず，水平方向変位δ_Hは，$Q_V=0$，$Q_H=1$とおいて単位荷重法を用いると，

$$\begin{aligned}\delta_H&=\frac{pa^4}{EI}\int_0^\theta[1-\cos(\theta_0-\alpha)](\sin\theta-\sin\alpha)d\alpha\\&=\frac{pa^4}{EI}\left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta-\theta_0)-\sin\theta\sin(\theta-\theta_0)+\theta\sin\theta+\cos\theta+\frac{1}{2}\theta\sin\theta_0-\sin\theta_0\sin\theta+\frac{1}{4}\cos\theta_0-1\right]\end{aligned}$$

垂直方向変位δ_Vは$Q_V=1$，$Q_H=0$とおいて単位荷重法を用いると，

$$\begin{aligned}\delta_V&=-\frac{pa^4}{EI}\int_0^\theta[1-\cos(\theta_0-\alpha)](\cos\theta-\cos\alpha)d\alpha\\&=-\frac{pa^4}{EI}\left[\frac{1}{4}\sin(2\theta-\theta_0)-\cos\theta\sin(\theta-\theta_0)-\sin\theta+\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta\cos\theta_0-\sin\theta_0\cos\theta+\frac{1}{4}\sin\theta_0\right]\end{aligned}$$

である．

ついでに角度変化量$\Delta\theta$を求める．任意の位置θに反時計まわりに仮想モーメントm_θを負荷すると，

$$m=-Q_V a(\cos\theta-\cos\alpha)+Q_H a(\sin\theta-\sin\alpha)+m_\theta.$$

$Q_V=0$，$Q_H=0$，$m_\theta=1$とおいて単位荷重法を用いると，

$$\Delta\theta=\frac{pa^3}{EI}\int_0^\theta[1-\cos(\theta_0-\alpha)]d\alpha=\frac{pa^3}{EI}[\sin(\theta_0-\theta)-\sin\theta_0+\theta]$$

となる．■

解説：特に，$\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$なら，固定支持Aに生ずる反力と固定モーメントは

$$R_V=pa\,(\text{下向き}),\ R_H=pa\,(\text{右向き}),\ M_A=pa^2\,(\text{時計まわり})$$

である．

基本例題11.07 図11.12の構造で，単位長さあたりpの等分布荷重が外向きに作用している(図では矢印を入れていません．かなり面倒くさいので)．点A，Cに生ずるモーメントを求めよ．

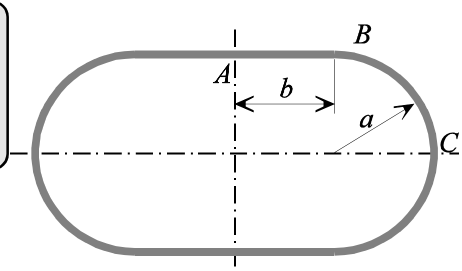


図11.12

解答 この系のフリーボディダイヤグラムは図11.13のようになる．等分布荷重の表示は省略している．

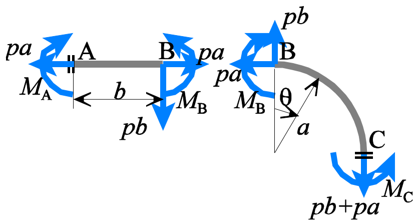


図11.13

水平部材の曲げモーメントM_{AB}を反時計まわりとし，AからBに向かってx軸をとると，

$$M_{AB}=M_A+\frac{1}{2}px^2.$$

曲りはり部材BCに発生する曲げモーメントを求める．等分布荷重によるモーメントは，**基本例題11.06**と同様に，時計まわりに

$$M_p=pa^2(1-\cos\theta)$$

となるから，部材BCに発生する曲げモーメントM_{BC}を反時計まわりに仮定すると

$$M_{BC}=M_B+M_p+pab\sin\theta-pa^2(1-\cos\theta)$$

である(第4項はBにはたらく左向きの力paによるモーメントである)．さらに，水平部材ABについてのモーメントのつりあいは$M_A+\frac{1}{2}pb^2-M_B=0$から$M_B=M_A+\frac{1}{2}pb^2$となるから，$M_{BC}$は次式のようになる．

$$M_{BC}=M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta.$$

まず，点Aの固定モーメントを求める．点Aのたわみ角をφ_Aとすると，カスティリアノの定理から，

$$\varphi_A=\frac{\partial U}{\partial M_A}=\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A+\frac{1}{2}px^2\right)dx+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta\right)d\theta.\ \cdots\cdots(*)$$

対称性から$\varphi_A=0$でなければならないので，点Aの固定モーメントは，$k=b/a$として

$$M_A=-\left(\frac{1}{2}k-\frac{2}{3}\frac{k^2-3}{2k+\pi}\right)abp$$

となり，点Cの固定モーメントは

$$M_C=M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab=\left(1+\frac{2}{3}\frac{k^2-3}{2k+\pi}\right)abp$$

となる．■

解説：もし$b=0$なら，$M_{BC}=0$である．すなわち，曲げモーメントは生じない．

基本例題11.08　基本例題11.07において，点Aの垂直方向変位と点Cの水平方向変位を求めよ．

解答　点Aに上向き仮想荷重Q_{AV}，点Cに右向き仮想荷重Q_{CH}を加える．このとき，曲げモーメントは，点Aでの固定モーメントをm_Aとして時計まわりとすると，

$$m_{AB}=m_A+Q_{AV}x,\qquad m_{BC}=m_A+Q_{AV}(b+a\sin\theta)-Q_{CH}a(1-\cos\theta)$$

となる．

[点Aの垂直変位量δ_{AV}]：m_{AB}とm_{BC}の式で$Q_{AV}=1$，$Q_{CH}=0$とおいて単位荷重法を用いると

$$\delta_{AV}=\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A+\frac{1}{2}px^2\right)(m_A+x)dx+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta\right)(m_A+b+a\sin\theta)d\theta$$

この積分でm_Aの項

$$\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A+\frac{1}{2}px^2\right)dx+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta\right)d\theta$$

は**基本例題11.07**の式(*)そのものであり，M_Aはこの式をゼロにするように決められているので，δ_{AV}は

$$\delta_{AV}=\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A+\frac{1}{2}px^2\right)xdx+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta\right)(b+a\sin\theta)d\theta$$

これより，点Aの垂直方向変位は上向きに

$$\delta_{AV}=\frac{a^3bp}{EI}\left[\frac{\pi}{4}+\frac{5}{24}k^3-\frac{1}{3}\frac{(k^2-2)(k^2-3)}{2k+\pi}\right]$$

となる．

[Cの水平変位量δ_{CH}]: m_{AB}とm_{BC}の式で$Q_{AV}=0$，$Q_{CH}=1$とおいて単位荷重法を用いると

$$\delta_{CH}=\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A+\frac{1}{2}px^2\right)m_Adx+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta\right)[m_A-a(1-\cos\theta)]d\theta$$

この積分でm_Aの項

$$\frac{1}{EI}\int_0^b\left(M_A+\frac{1}{2}px^2\right)dx+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta\right)d\theta$$

は**基本例題11.07**の式(*)そのものであり，M_Aはこの式をゼロにするように決められているので，δ_{CH}は

$$\delta_{CH}=-\frac{a^2}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(M_A+\frac{1}{2}pb^2+pab\sin\theta\right)(1-\cos\theta)d\theta$$

これより，点Cの水平方向変位量は右向きに

$$\delta_{CH}=-\frac{a^3bp}{EI}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi-2}{3}\frac{k^2-3}{2k+\pi}\right)$$

となる．■

以下では，図11.1の(C)タイプの曲りはりについて考えよう．

1)いま，y軸の負のほうから(上から)x-z面の見ると，図11.14のようになり，CB間に曲りはりの実体を考える．曲げモーメントMとねじりモーメントTを図のように仮定する．

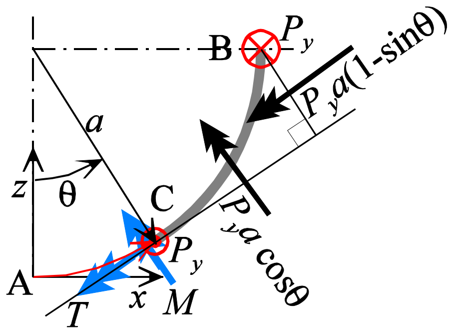


図11.14

外力P_yがつくるモーメントははりの軸線の接線まわりのモーメント

$$P_ya(1-\sin\theta)$$

と，これと垂直なモーメント

$$P_ya\cos\theta$$

である．前者はモーメントTとつりあい，後者はモーメントMとつりあう．また，外力のモーメントはいずれもTとMの向きと同じであるから，

$$T+P_ya(1-\sin\theta)=0 \quad \rightarrow \quad T=-P_ya(1-\sin\theta)$$

$$M+P_ya\cos\theta=0 \quad \rightarrow \quad M=-P_ya\cos\theta$$

となる．

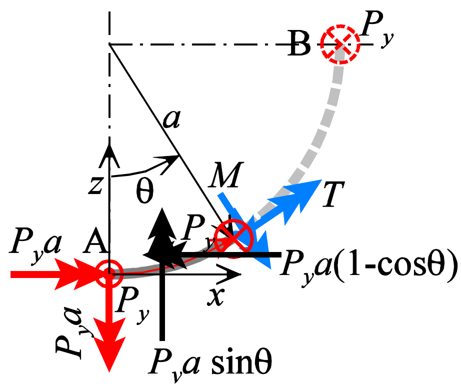


図11.15

2)AC間に実体を考える場合はどうなるだろうか．この考え方は，第4章，6章で述べたような，固定支持側から攻める考え方である．さて，図11.15を参照すると，x軸まわりのモーメントのつりあいは

$$T\cos\theta+M\sin\theta+P_ya-P_ya(1-\cos\theta)=0$$

z軸まわりのモーメントのつりあいは

$$T\sin\theta - M\cos\theta - P_y a + P_y a\sin\theta = 0$$

となり，これから内力のモーメントは

$$T = -P_y a(1-\sin\theta), \quad M = -P_y a\cos\theta$$

となって同じ式が得られる．

この系の荷重方向変位量は，単位荷重法を用いて，

$$\delta_B = \frac{P_y a^3}{GI_p}\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)^2 d\theta + \frac{P_y a^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = \frac{3\pi-8}{4}\frac{Pa^3}{GI_p} + \frac{\pi}{4}\frac{Pa^3}{EI}$$

となる．

基本例題11.09 図11.16の構造の荷重方向変位を求めよ．

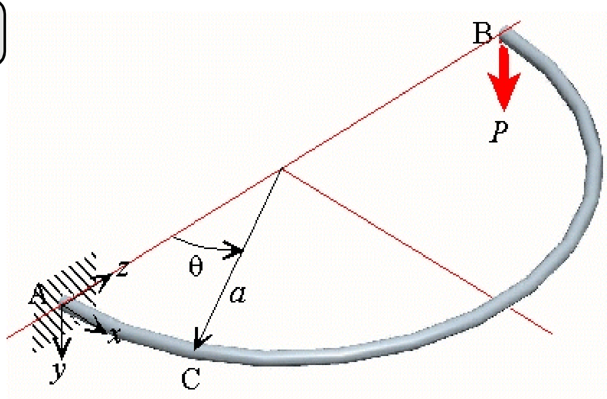


図11.16

解答 この構造ではy方向の外力だけなので，**基本事項1**の(C)の系と同じように考える．この場合点Aに生ずるモーメントはx軸まわりに大きさ$2Pa$，z軸まわりにゼロであるので，図11.16のようにθをとって考えると，x軸まわりのモーメントのつりあいは

$$T\cos\theta + M\sin\theta + 2Pa - Pa(1-\cos\theta) = 0$$

z軸まわりのモーメントのつりあいは

$$T\sin\theta - M\cos\theta + Pa\sin\theta = 0$$

となり，これから内力のモーメントは

$$T = -Pa(1+\cos\theta), \quad M = -Pa\sin\theta$$

となる．荷重方向変位は，単位荷重法を用いて

$$\delta_B = \frac{Pa^3}{GI_p}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta + \frac{Pa^3}{EI}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{3\pi}{2}\frac{Pa^3}{GI_p} + \frac{\pi}{2}\frac{Pa^3}{EI}$$

である．■

基本例題11.10 図11.1(C)の系で，点Bの角度変化量を求めよ．

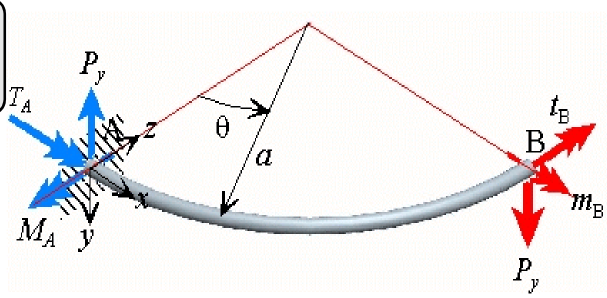


図11.17

解答 図11.17のように点Bに仮想モーメントm_Bとt_Bを作用させると，x軸まわりのモーメントのつりあいは

$$T_A + m_B - P_y a = 0$$

z軸まわりのモーメントのつりあいは

$$M_A - t_B - P_y a = 0$$

となるから，

$$M_A = P_y a + t_B, \qquad T_A = P_y a - m_B$$

となる．局所系において，x軸まわりのモーメントのつりあいは

$$T\cos\theta + M\sin\theta + T_A - P_y a(1-\cos\theta) = 0$$

z軸まわりのモーメントのつりあいは

$$T\sin\theta - M\cos\theta - M_A + P_y a\sin\theta = 0$$

となり，これから内力のモーメントは

$$T = -P_y a(1-\sin\theta) + m_B\cos\theta + t_B\sin\theta, \qquad M = -P_y a\cos\theta + m_B\sin\theta - t_B\cos\theta$$

である．

φ_{Bx}は，

$$T = -P_y a(1-\sin\theta), \quad M = -P_y a\cos\theta, \qquad t = \cos\theta, \qquad m = \sin\theta$$

とおいて単位荷重法を使うと

$$\varphi_{Bx} = -\frac{P_y a^2}{GI_p}\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\cos\theta d\theta - \frac{P_y a^2}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta = -\frac{1}{2}\frac{P_y a^2}{GI_p} - \frac{1}{2}\frac{P_y a^2}{EI}.$$

次に，φ_{Bz}は，

$$T = -P_y a(1-\sin\theta), \quad M = -P_y a\cos\theta, \qquad t = \sin\theta, \qquad m = -\cos\theta$$

とおいて単位荷重法を使うと

$$\varphi_{Bz} = -\frac{P_y a^2}{GI_p}\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\sin\theta d\theta + \frac{P_y a^2}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = -\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{P_y a^2}{GI_p} + \frac{\pi}{4}\frac{P_y a^2}{EI}$$

である．■

解説：φ_{Bx}は明らかに負である．これは，設定したモーメントm_Bの向きとは逆の向きに傾斜することを表している．φ_{Bz}はねじり剛性と曲げ剛性の大きさに伴って正負が変わるが$\varphi_{Bz}>0$と仮定するとモーメントt_Bの向きと同じである．

基本例題11.11　図11.1(C)の系で，点Bにモーメントを加えてx軸まわりの角度変化がゼロになるようにしたい．モーメントを定めよ．

解答　前例題でx軸まわりの角度変化に関係するモーメントはm_Bであるから$t_B=0$とすると，内力のモーメントは

$$T = -P_y a(1-\sin\theta) + m_B\cos\theta, \qquad M = -P_y a\cos\theta + m_B\sin\theta$$

となる．φ_{Bx}はカスティリアノの定理から

$$\varphi_{Bx} = \frac{\partial U}{\partial m_B} = \frac{a}{GI_p}\int_0^{\pi/2}[-P_y a(1-\sin\theta) + m_B\cos\theta]\cos\theta d\theta + \frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}[-P_y a\cos\theta + m_B\sin\theta]\sin\theta d\theta$$

であるから，

$$\varphi_{Bx} = -\frac{P_y a^2}{2}\left(\frac{1}{GI_p} + \frac{1}{EI}\right) + \frac{\pi m_B a}{4}\left(\frac{1}{GI_p} + \frac{1}{EI}\right).$$

$\varphi_{Bx}=0$から

$$m_B = \frac{2}{\pi}P_y a$$

である．■

基本例題11.12 基本例題11.10の結果を用いて図11.18の点Bのy方向変位を求めよ.

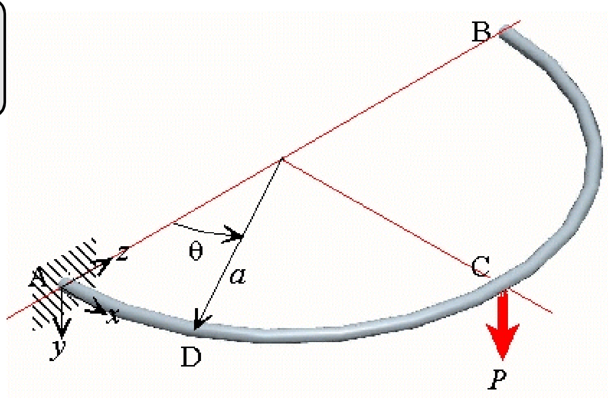


図11.18

解答　図11.18の点Cは**基本例題11.10**および図11.1の(C)の点Bに対応するので, 図11.18の点Cのy方向変位δ_Cと角度変化量φ_{Cx}, φ_{Cz}は, それぞれ,

$$\delta_C=\frac{3\pi-8}{4}\frac{Pa^3}{GI_p}+\frac{\pi}{4}\frac{Pa^3}{EI},$$

$$\varphi_{Cx}=-\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{GI_p}-\frac{1}{2}\frac{Pa^2}{EI},\quad \varphi_{Cz}=-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{Pa^2}{GI_p}+\frac{\pi}{4}\frac{Pa^2}{EI}$$

である. 点Bのy方向変位は

$$\delta_B=\delta_C-\varphi_{Cx}a-\varphi_{Cz}a$$

で表されるから,

$$\delta_B=\left(\frac{3\pi-8}{4}+\frac{1}{2}+1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{Pa^3}{GI_p}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\frac{Pa^3}{EI}=\frac{\pi-1}{2}\frac{Pa^3}{GI_p}+\frac{1}{2}\frac{Pa^3}{EI}$$

である. ■

解説: **基本例題11.10**のφ_{Bx}は明らかに負である. これは, モーメントm_Bの向きと逆の向きに傾斜することを表しており, 図11.18のCB部分が存在する平面はx軸の正の側から見ると時計回りに$-\varphi_{Cx}$だけ傾斜し, 点Bは点Cに対して$-\varphi_{Cx}a$だけ(yの正の側に)移動する. **基本例題11.10**のφ_{Bz}はねじり剛性と曲げ剛性の大きさに伴って正負が変わるが$\varphi_{Bz}>0$と仮定するとモーメントt_Bの向きと同じであり, 図11.18のCB部分が存在する平面はz軸の正の側からみると反時計回りにφ_{Cz}傾斜する. この傾斜によって点Bは点Cに対して$\varphi_{Cz}a$だけyの負の側に移動する. それゆえ, 点Bのy方向変位は

$$\delta_B=\delta_C-\varphi_{Cx}a-\varphi_{Cz}a$$

で表される. 三次元的に考えてくださいね.

基本例題11.13　図11.18の構造の点Bのy方向変位を単位荷重法を用いて求めよ.

解答　単位荷重による二つの内力のモーメントは, **基本例題11.09**で$P=1$と置くと

$$t=-a(1+\cos\theta),\qquad m=-a\sin\theta$$

であり, 荷重Pによる二つの内力のモーメントは$0\le\theta\le\pi/2$で

$$T=-Pa(1-\sin\theta),\qquad M=-Pa\cos\theta$$

それ以外では$T=0$, $M=0$であるので, 点Bのy方向変位は

$$\delta_B=\frac{Pa^3}{GI_p}\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)d\theta+\frac{Pa^3}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta$$
$$=\frac{\pi-1}{2}\frac{Pa^3}{GI_p}+\frac{1}{2}\frac{Pa^3}{EI}$$

である．■

基本例題11.14　図11.19の構造の点Bのy方向変位を単位荷重法を用いて求めよ．

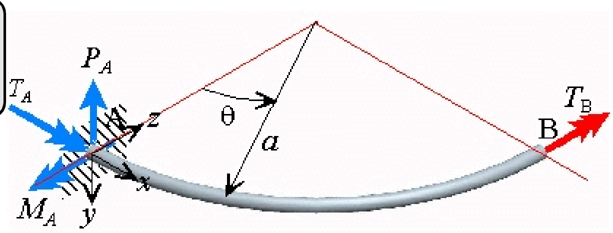


図11.19

解 答　図11.19のように点Aでの固定モーメントと反力を仮定すると，系のつりあいから

$$M_A=T_B,\qquad T_A=0,\qquad P_A=0$$

であり，局所系のつりあいから内力のモーメントは

$$T=T_B\sin\theta,\quad M=-T_B\cos\theta$$

である．y方向単位荷重によるモーメントは

$$t=-a(1-\sin\theta),\qquad m=-a\cos\theta$$

であるから，点Bのy方向変位は

$$\delta_B=-\frac{T_Ba^2}{GI_p}\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\sin\theta d\theta+\frac{T_Ba^2}{EI}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{T_Ba^2}{GI_p}+\frac{\pi}{4}\frac{T_Ba^2}{EI}$$

である．■

基本例題11.15　図11.20の構造の荷重点Dの荷重方向変位を求めよ．

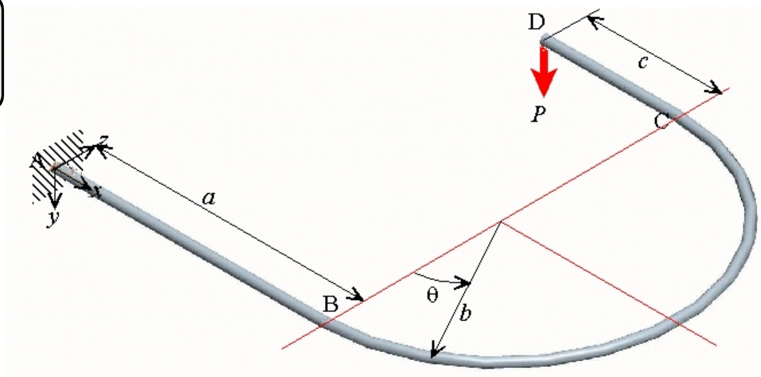


図11.20

解答　系全体のモーメントのつり合いから点Aでの固定モーメントは$M_A=P(a-c)$，$T_A=2Pb$であり，反力は上向きにPである．

図11.21に示したAB間とBC間のフリーボディダイヤグラムから，

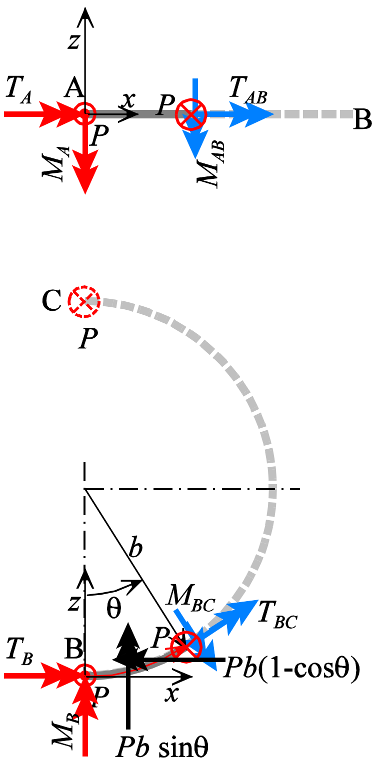


図11.21

AB間の内力のモーメントは，AからBに向かってx_1をとると，

$$M_{AB}=-M_A+Px_1=-P(a-c)+Px_1,\quad T_{AB}=-T_A=-2Pb.$$

点Bでの二つのモーメントは

$$M_B=Pc,\quad T_B=2Pb$$

であり，BC間の内力のモーメントは，

$$T_{BC}\cos\theta+M_{BC}\sin\theta+T_B-Pb(1-\cos\theta)=0$$

$$T_{BC}\sin\theta-M_{BC}\cos\theta+M_B+Pb\sin\theta=0$$

から，

$$M_{BC}=-Pb\sin\theta+Pc\cos\theta,\quad T_{BC}=-Pb(1+\cos\theta)-Pc\sin\theta$$

CD間では，x_2をDからCに向かってとると，

$$M_{DC}=Px_2,\quad T_{DC}=0$$

である．

荷重点の荷重方向変位は，単位荷重法を用いると，

$$\delta_D=\frac{P}{EI}\int_0^a(-a+c+x_1)^2dx_1+\frac{4Pb^2}{GI_p}\int_0^a dx_1$$
$$+\frac{P}{EI}\int_0^\pi(-b\sin\theta+c\cos\theta)^2d\theta+\frac{P}{GI_p}\int_0^\pi[b(1+\cos\theta)+c\sin\theta]^2d\theta$$
$$+\frac{P}{EI}\int_0^c x_2^2dx_2$$

と表され，これより

$$\delta_D=\frac{P}{EI}\left(\frac{1}{3}a^3-a^2c+ac^2+\frac{1}{3}c^3+\frac{\pi}{2}b^3+\frac{\pi}{2}bc^2\right)+\frac{P}{GI_p}\left(4ab^2+4bc^2+\frac{3\pi}{2}b^3+\frac{\pi}{2}bc^2\right)$$

である．■

基本例題11.16　図11.22の構造の点Aに生ずるx軸まわりのモーメントを求めよ．

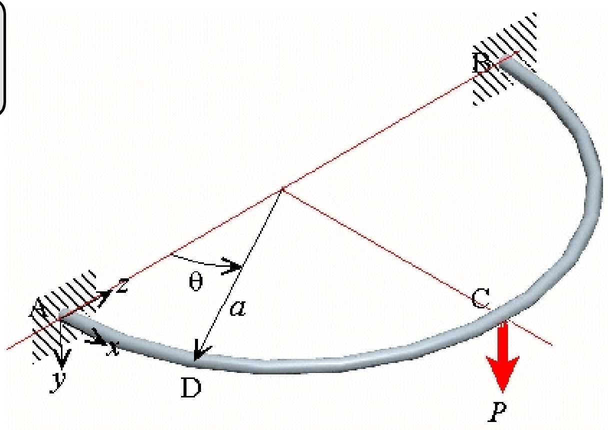


図11.22

解答　構造は点Cについて対称なので，フリーボディダイヤグラムは図11.22のようになる．モーメントのつりあいから内力のモーメントは

$$T=-T_A\cos\theta-\frac{1}{2}Pa(1-\cos\theta+\sin\theta)$$

$$M=-T_A\sin\theta-\frac{1}{2}Pa(\cos\theta-\sin\theta)$$

点Aのx軸まわりの角度変化はゼロであるから，

$$0=\frac{a}{GI_p}\int_0^{\pi/2}\left[T_A\cos\theta+\frac{1}{2}Pa(1-\cos\theta-\sin\theta)\right]\cos\theta d\theta$$
$$+\frac{a}{EI}\int_0^{\pi/2}\left[T_A\sin\theta+\frac{1}{2}Pa(\cos\theta-\sin\theta)\right]\sin\theta d\theta$$

これから，

$$T_A=\frac{1}{2}Pa-\frac{1}{\pi}Pa=\frac{\pi-2}{2\pi}Pa$$

である．■

注意：とある演習書の例題の答えは間違っているようです．

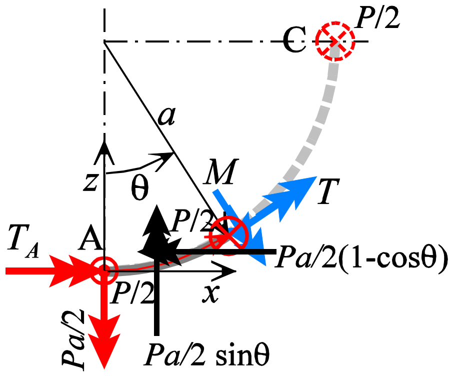


図11.23

解説：**基本例題11.11**で$P_y=\frac{P}{2}$とすると，$m_B=\frac{Pa}{\pi}$となり，$T_A=\frac{Pa}{2}-m_B=\frac{Pa}{2}-\frac{Pa}{\pi}$となる．この値は本例題の答えと同じである．

基本例題11.17 図11.24のスプリングワッシャに荷重Pを負荷して平らにする．荷重Pの大きさを求めよ．また，最大せん断応力と最大曲げ応力を求めよ．ここでh=5 mm，b=10 mm，a=35 mm，δ=5 mm，ν=0.3，E=206 GPaである．

指針 この系は，左右対称であるので，AA断面に固定支持部があると考える．

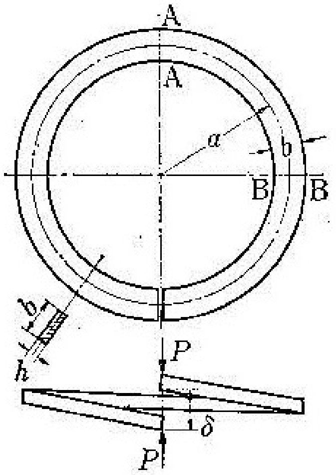


図11.24

解答 AA断面が固定支持である半円弧状曲りはりの自由端に荷重Pが作用した場合の荷重作用点のたわみ量は，**基本例題11.09**で得られているが，同例題のδ_Bの値は本例題の$\delta/2$に相当するから，

$$\delta=3\pi\frac{Pa^3}{GI_p}+\pi\frac{Pa^3}{EI}=\pi\left(\frac{3}{GI_p}+\frac{1}{EI}\right)Pa^3$$

である．この式から荷重Pを求めることができる．

与えられた寸法から，曲げ剛性EIは

$$EI=206\times10^9\times\frac{0.01\times(0.005)^3}{12}=21.46\ \mathrm{Nm^2}$$

長方形断面に対するねじり剛性GI_pでは断面二次極モーメントは使えないので，教科書の表7.1を使って$T/(d\varphi/dx)$の値を求めると

$$\frac{T}{d\varphi/dx}=0.229\times\frac{206\times10^9}{2\times(1+0.3)}\times0.01\times(0.005)^3=22.68\ \mathrm{Nm^2}$$

となる．この値をGI_pの代わりに用いると，荷重Pの値は

$$P=\frac{\delta}{\pi\left(\frac{3}{GI_p}+\frac{1}{EI}\right)a^3}=\frac{0.005}{\pi\left(\frac{31}{22.68}+\frac{1}{21.46}\right)\times(0.035)^3}=207.5\ \mathrm{N}$$

となる．

最大せん断応力はねじりモーメントが最大になる断面に生ずる．**基本例題11.09**の$T=-Pa(1+\cos\theta)$をθで微分してゼロにおくと$\theta=0$，$\theta=\pi$が得られ，これらのθでTは極値をとる．最大値は$\theta=0$のときでこの例題のAA断面に相当する．そのときのTの絶対値は$2Pa$となるから，最大せん断応力は，長方形断面であるから教科書の表7.1を使って

$$\tau_{\max}=\frac{2\times207.5\times0.035}{0.246\times0.01\times(0.005)^2}=237.8\ \mathrm{MPa}$$

最大曲げ応力は曲げモーメントが最大になる断面に生ずる．**基本例題11.09**の$M=-Pa\sin\theta$をθで微分してゼロにおくと$\theta=\frac{\pi}{2}$が得られ，このとき曲げモーメントが最大になり，この例題のBB断面に相当する．絶対値はPaなので，最大曲げ応力は

$$\sigma_{\max}=\frac{6\times207.5\times0.035}{0.01\times(0.005)^2}=174.3\ \mathrm{MPa}$$

である．■

解説：もう少し基本的なところから考えてみよう．図11.36のような系を考える．いま，点Aを基準に反時計まわりにθをとる．この図のAとEは固定支持ではないので，固定モーメントはゼロである．このとき，局所系のモーメントのつりあい式は，図11.15を参照して

$$T\cos\theta+M\sin\theta+Pa(1-\cos\theta)=0,\quad T\sin\theta-M\cos\theta-Pa\sin\theta=0$$

となり，これから内力のモーメントは

$$T=Pa(1-\cos\theta),\quad M=Pa\sin\theta$$

となる．この二つの式から，Tの最大値は$\theta=\pi$(図11.36ではC．図11.35のAAに対応)で生じ，Mの最大値は$\theta=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$(図11.36ではB，D．図11.35のBBに対応)で生ずる．点EのAに対するたわみは

$$\delta=\frac{Pa^3}{GI_p}\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta+\frac{Pa^3}{EI}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta$$

から計算でき，同じ答えが得られる．

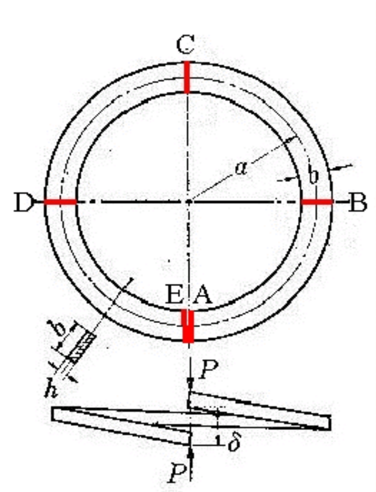


図11.25

基本事項2(ばねの力学への応用)

ばねの問題は教科書では「ねじりの章」で扱われることが多いが，「ねじりの章」が「はりの章」の前に配置されている場合は，その時点で曲げモーメントの概念がないのでわかり難いことになる．ここでは，ねじり，はり，ひずみエネルギを基礎において，簡単ながら，ばねの力学についてまとめておく．

図11.26のようなうず巻きばねを考えてみよう．この図で，濃いグレーはばねを横から見たときに手前に見える素線部分を，薄いグレーは後ろに見える素線部分を，それぞれ表しているものとする．

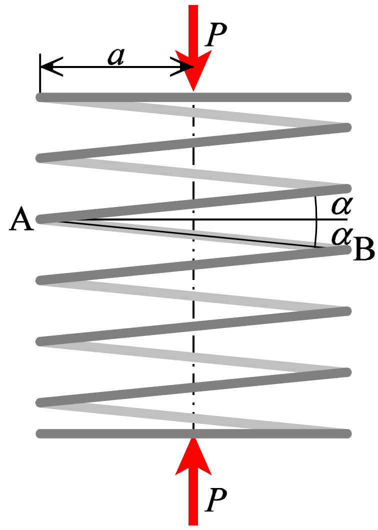


図11.26

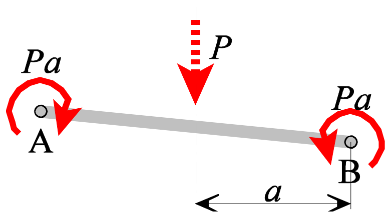


図11.27

このばねでAB部分を考えてみよう．この部分では，AとBは荷重Pの作用点からaだけ離れているので，図11.27のようにモーメントPaが生じていることになる．このモーメントは断面AとBにおいて<u>紙面に垂直な軸まわりのモーメント</u>であることに注意する．次に，Bから1/4まわりだけした点Cについて考えると，図11.39のようになっていることわかるだろう．

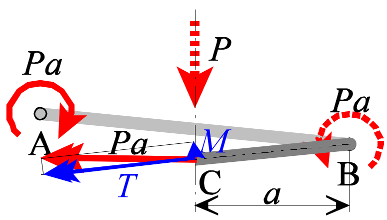


図11.28

図11.28から，モーメントPaは点Cでモーメント$Pa\cos\alpha$とこれに垂直な軸まわりのモーメント$Pa\sin\alpha$に分解できる．前者がねじりモーメントになり，後者が曲げモーメントになる．この曲げモーメントについては，後述する．

さて，一巻分の長さは$2\pi a/\cos\alpha$であるから，一巻分のひずみエネルギuは

$$u=\frac{2\pi a}{\cos\alpha}P^2a^2\left[\frac{\cos^2\alpha}{2GI_p}+\frac{\sin^2\alpha}{2EI}\right]=\frac{\pi P^2a^3}{\cos\alpha}\left[\frac{\cos^2\alpha}{GI_p}+\frac{\sin^2\alpha}{EI}\right]$$

となるから，n巻のばねであれば，

$$U=\frac{n\pi P^2a^3}{\cos\alpha}\left[\frac{\cos^2\alpha}{GI_p}+\frac{\sin^2\alpha}{EI}\right]$$

となり，荷重方向のばねの長さの変化量δは

$$\delta=\frac{2n\pi Pa^3}{\cos\alpha}\left[\frac{\cos^2\alpha}{GI_p}+\frac{\sin^2\alpha}{EI}\right]$$

となる．

以上は粗巻ばねの場合であるが，密巻ばねの場合角度αが小さいので$\sin\alpha\approx 0$，$\cos\alpha\approx 1$と近似できるので

$$\delta=\frac{2n\pi Pa^3}{GI_p}$$

である．δとPとの関係からばね定数Kは

$$K=\frac{P}{\delta}=\frac{GI_p}{2n\pi a^3}$$

となる．なお，素線断面形状が円形断面以外の場合は断面二次極モーメントは使えないので，**基本例題11.17**のような扱いをする必要がある．

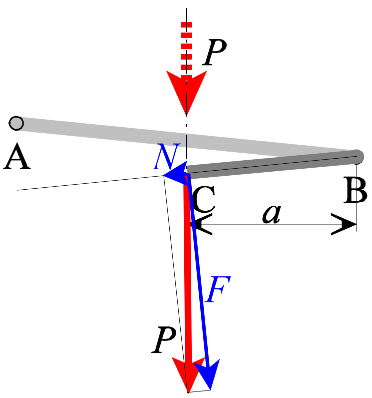


図11.29

次にばねの素線に発生する応力について考えよう．図11.29のように考えると，素線軸方向分力Nは$N=P\sin\alpha$，それに垂直な方向分力Fは$F=P\cos\alpha$である．前者は軸力であり，後者は横荷重である．このとき，C断面に生ずるせん断応力の最大値τ_{max}は，ねじりモーメントによるせん断応力の最大値$\tau_{1max}=\frac{T}{Z_p}=\frac{Pa\cos\alpha}{Z_p}$と横荷重による平均せん断応力$\tau_2=\frac{F}{A}=\frac{P\cos\alpha}{A}$の和であるので，

$$\tau_{max}=\frac{Pa\cos\alpha}{Z_p}+\frac{P\cos\alpha}{A}=\left(\frac{a}{Z_p}+\frac{1}{A}\right)P\cos\alpha$$

である．ここで，Z_pは素線のねじりの断面係数，Aは素線の断面積である．素線の断面形状が直径dの円形なら$Z_p=\frac{\pi}{16}d^3$，$A=\frac{\pi}{4}d^2$である．代入すると

$$\tau_{max}=\frac{16Pa}{\pi d^3}\left(1+\frac{d}{4a}\right)=\frac{4P}{\pi d^3}(4a+d)$$

となる．なお，τ_{1max}は素線外周に沿って発生し，τ_2は断面に一様に発生するから，最大せん断応力の発生位置がどこかはわかるだろう．もし，横荷重によるせん断応力で厳密な分布を用いるなら，τ_2の代わりに円形断面の場合$\tau_{2max}=\frac{4}{3}\tau_2$を，長方形断面の場合$\tau_{2max}=\frac{3}{2}\tau_2$を，それぞれ，用いればよい．以下では，平均せん断応力を用いて進めることにする．

基本例題11.18 直径d_1，d_2の素線を用いて半径a_1，a_2で巻数n_1，n_2のばねを作り，半径の大きいほうのばねの中に小さいほうのばねを，ばねの中心が一致するように入れて荷重Pを加えた（図11.30）．二つのばねに生ずる最大せん断応力の比を求めよ．二つのばねは自然長が等しく，密巻であり，素線の横弾性係数は等しい．

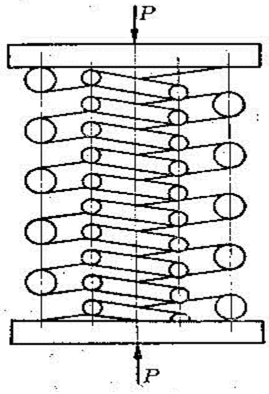


図11.30

解答 それぞれのばねが負担する荷重をP_1，P_2とすると，最大せん断応力の比は

$$\frac{\tau_{1max}}{\tau_{2max}}=\frac{(4a_1+d_1)d_2^3}{(4a_2+d_2)d_1^3}\frac{P_1}{P_2}.$$

二つのばねの伸縮量が等しいので

$$\frac{64n_1P_1a_1^3}{Gd_1^4}=\frac{64n_2P_2a_2^3}{Gd_2^4} \quad \rightarrow \quad \frac{d_2^3P_1}{d_1^3P_2}=\frac{n_2a_2^3d_1}{n_1a_1^3d_2}$$

となるので，最大せん断応力の比は

$$\frac{\tau_{1\max}}{\tau_{2\max}}=\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^3\frac{d_1}{d_2}\frac{4a_1+d_1}{4a_2+d_2}$$

である．■

解説1：この場合は，それぞれのバネが負担する荷重の比率だけが必要なので，力のつりあい式は必要ない．もし，それぞれのバネが負担する荷重P_1，P_2を求める必要があれば，力のつりあい式

$$P_1+P_2=P$$

を追加してP_1，P_2を求める．

解説2：二つのバネの素線長が等しいとき，$2\pi a_1n_1=2\pi a_2n_2$が成立するので，最大せん断応力の比は

$$\frac{\tau_{1\max}}{\tau_{2\max}}=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\frac{d_1}{d_2}\frac{4a_1+d_1}{4a_2+d_2}$$

となる．

基本例題11.19 図11.31のような円錐状バネの長さの変化量を求めよ．密巻とする．

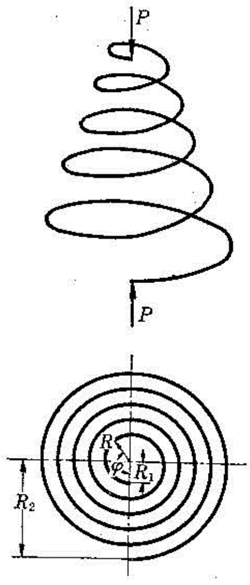


図11.31

解答 基本事項の式から，単位角度$d\varphi$あたりの変形量は

$$\frac{d\delta}{d\varphi}=\frac{Pa^3}{GI_p}$$

である．巻数をnとすると，図から$a=R=R_1+(R_2-R_1)\dfrac{\varphi}{2n\pi}$と表されるので，

$$\frac{d\delta}{d\varphi}=\frac{P}{GI_p}\left[R_1+(R_2-R_1)\frac{\varphi}{2n\pi}\right]^3$$

と表される．この式をφについて0から$2n\pi$まで積分すると，バネの長さの変化量は

$$\delta=\frac{n\pi P}{2GI_p}\frac{R_2^4-R_1^4}{R_2-R_1}$$

である．■

解説1：バネの長さの変化量δの式の$(R_2^4-R_1^4)/(R_2-R_1)$は

$$\frac{R_2^4-R_1^4}{R_2-R_1}=R_2^3+R_2^2R_1+R_2R_1^2+R_1^3=(R_2^2+R_1^2)(R_1+R_2)$$

のように変形できるが，この問題の場合は$R_2=R_1$の場合を考える必要がないので解答の式のほうが数値を入れて値を求める際に便利である.

解説2：もし，$R_1=R_2=a$なら，$(R_2^4-R_1^4)/(R_2-R_1)=4a^3$になるからバネの長さの変化量は

$$\delta=\frac{2n\pi Pa^3}{GI_p}$$

となり，上の**基本事項5**の密巻ばねの場合の式に一致する.

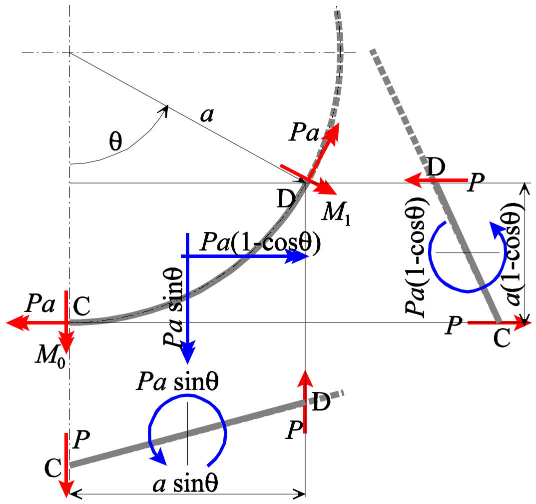


図11.32

さて，**基本例題11.09**以降で調べたように，面外の外力を受ける場合(図11.1(C))は曲げモーメントも発生するはずである. このことについて調べてみよう. 図11.32の左上はばねを上から見たもので，左下と右は横から見たものである. このときのモーメントのつりあいは，点CとDでの曲げモーメントをM_0とM_1で表すと，

$$-Pa+Pa\cos\theta+M_1\sin\theta+Pa(1-\cos\theta)=0$$

$$M_0+Pa\sin\theta-Pa\sin\theta+M_1\cos\theta=0$$

となる. 第1式から$M_1=0$が得られ，これを用いて第2式から$M_0=0$が得られる. つまり，ばねの系では，**基本例題11.09**以降で調べたような面外の外力を受ける曲りはりの場合とは異なって，ばねの素線には曲げモーメントが発生しないことになる. つまり，(「はりの章」の前にあるとしても，)「ねじりの章」で扱う妥当性はここにありそうである.

このことは，図11.29の分力NとFを用いて考えても同じことである. Nは素線軸方向の分力なのでモーメントを生じない. $F=P\cos\alpha$は素線軸に対して垂直なせん断力なのでモーメントを生ずる. モーメントの大きさは，左下の図の場合の作用線の間隔はCD間の長さ$\overline{CD}=a\dfrac{\sin\theta}{\cos\alpha}$であるので，生ずるモーメントは$F\cdot\overline{CD}=Pa\sin\theta$であり，右の図の場合も作用線の間隔は$\overline{CD}=a\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\alpha}$であるので，生ずるモーメントは$Pa(1-\cos\theta)$である. つまり，上に挙げた二つのモーメントのつりあい式は変わらない.

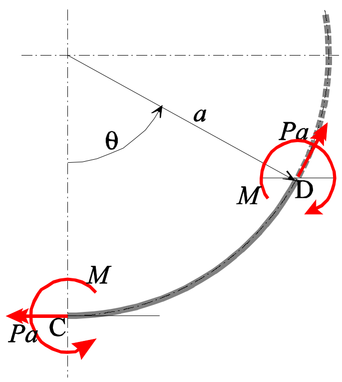


図11.33

図11.28に戻ろう. この図で表現されている曲げモーメントMを上から見て表現すると，図11.33のようになる. この図から，曲げモーメント$M=Pa\sin\alpha$はばねの半径aを増大させる向きであることがわかる. いま考えている系ではばねを縮める向きに負荷されているので，ばねの半径を増大させる. もし，ばねを伸ばす向きに負荷されるなら，ばねの半径は小さくなる.

＊ばねの場合，曲げモーメントは二つある. ここでは，素線軸を通り，これに垂直で荷重軸線に平行な軸まわりと，垂直な軸まわりにとっています. 図11.33の曲げモーメントは荷重軸線に平行な軸まわりのものです.

第12章　もう分類するのが面倒くさい

ここまで一人でいろいろやってくると，新たに例題を付け加えるとどこに入れてよいやらわけがわからなくなってくる．まあ，言ってみればそれだけ行き当たりばったりに事を進めている私が悪いのだが，・・・

というわけで，以下では，相変わらずの思い付き例題を，章のテーマとして決めずに，それこそ，テキトーに放り込むので，皆様はテキトーに目を通していただければよろしいかと・・・

不静定系の例題

例えば，第2章の弾性棒に係る不静定系の問題では，弾性棒に発生する内力を，ひたすら，正であると仮定せよと説いてきた．特に，**発展例題2.12**や**発展例題2.22**以降の剛体の棒に弾性棒がヒンジ接続されている例題では徹底している．その理由は，p.51の後半に書いてある．ひたすら，部材に発生する内力が正であるか負であるかを考えるのが面倒くさいし，考えたところでわかるわけもなく，下手に考えると間違えるし・・・．この手の問題はとにかく性質(「たち」と読んでください)が悪いのだ(ごめんなさい)．

発展例題2.12や**発展例題2.22**以降の剛体の棒に弾性棒がヒンジ接続されている例題で，「剛体棒」を「弾性はり」に替えても，答えがひたすら面倒くさい式になることを除けば，別にどうということはない．弾性はりに変わったことではりのたわみの正負が入ってくるだけである．剛体棒の際には，接続点は平行移動と回転移動である．コツは，回転移動について同じ側に移動すると考えて，接続点の移動量と弾性棒の(移動しない点を基準にした)「伸び」量との間の関係だった．「弾性はり」に化けたとしても，この思想を変える必要はなく，弾性棒との接続点のたわみが正であると仮定して弾性棒の(移動しない点を基準にした)「伸び」量との間の関係を規定してあげればよいのだ．

たとえば，p.48の**発展例題2.24**の剛体棒を弾性はりに替えてみよう．

発展例題12.01　図12.1のように，B', C', D'で回転支持されている長さl，引張剛性AE，線膨張係数αの弾性棒の点B，C，Dに長さ$3a$，曲げ剛性EI_z，単位長さあたりwの自重を持つ弾性はりを取り付けた．この系において弾性棒CC'にのみΔTの温度変化が生じた．次の設問に答えなさい．支点Aならびに弾性棒の両端はすべて回転支点である．

1)　弾性棒BB', CC', DD'に生ずる内力をN_1，N_2，N_3で表し，すべて正であると仮定する．剛体棒に関するフリーボディダイヤグラムを描き，静力学のつりあい式を書け．

2)　弾性棒BB', CC', DD'の<u>長さの変化量</u>δ_1，δ_2，δ_3の式を書き下せ．

3)　弾性はりの点B，C，Dの<u>たわみ量</u>をv_B，v_C，v_Dとして，弾性棒の長さの変化量δ_1，δ_2，δ_3との関係を示せ．

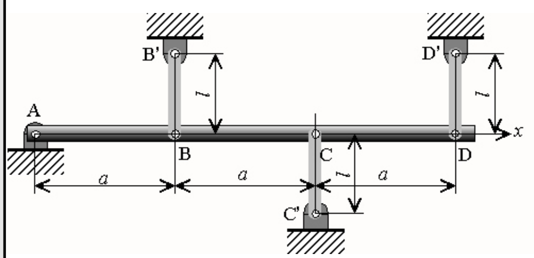


図12.1

解答　1) FBDは図12.2のようになる．弾性棒に生ずる正の内力と剛体棒に作用する力の関係は，たとえば，**発展例題2.11**の「解説」を参照のこと．弾性棒に生ずる内力を正に仮定するので，剛体棒のBとDには上向きの力N_1とN_3，Cには下向きの力N_2が作用すると考える．<u>これは，弾性棒に正の内力を生じさせる外力の反作用としてはりの点B，C，</u>

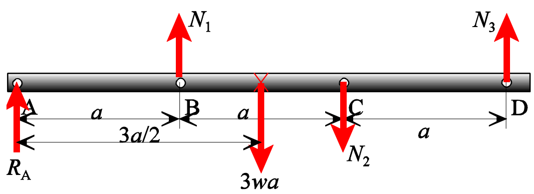


図12.2

Dに作用する横荷重である. Aでの反力を上向きにR_Aとすると, 静力学のつりあい式は

力のつりあい: $R_A+N_1-N_2+N_3-3wa=0$ (a)

モーメントのつりあい(Aまわり): $N_1a-2N_2a+3N_3a-\frac{9}{2}wa^2=0$ (b)

2) 弾性棒BB', CC', DD'の長さの変化量は

$$\delta_1=\frac{N_1 l}{AE},\quad \delta_2=\frac{N_2 l}{AE}+\alpha\Delta Tl,\quad \delta_3=\frac{N_3 l}{AE}$$

ここで, δ_1はB'を, δ_2はC'を, δ_3はD'を, それぞれ, 移動しない点としている.

3) 弾性はりの点B, C, Dのたわみ量v_B, v_C, v_Dがすべて正(はりのたわみは下向きに正としている)とすると, 弾性はりの点B, C, Dは下向きにv_B, v_C, v_Dだけ移動する. 一方, 弾性棒の長さの変化軸はB'を基準に下向き, C'を基準に上向き, D'を基準に下向きなので, v_i軸とδ_i軸の関係は

$$v_B=\delta_1,\quad v_C=-\delta_2,\quad v_D=\delta_3$$

である. ■

解説: 特に解説の必要もないだろうが・・・. この後は, 弾性はりの点B, C, Dのたわみ量v_B, v_C, v_Dをつくり, 3)の式を使って条件式を作ることになる. オジサンはこのあたりで手を引きますが, たわみ関数だけ書いておきましょう.

$$v_{AB}=\theta_A x-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}wx^4\right]$$

$$v_{BC}=\theta_A x-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}wx^4+\frac{1}{6}N_1(x-a)^3\right]$$

$$v_{CD}=\theta_A x-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}wx^4+\frac{1}{6}N_1(x-a)^3-\frac{1}{6}N_2(x-2a)^3\right]$$

ちなみに, $v_B=v_{AB}|_{x=a}$, $v_C=v_{BC}|_{x=2a}$, $v_D=v_{CD}|_{x=3a}$である.

発展例題12.02 図12.1の系で, R_A, N_1, N_2, N_3を求めるための式を誘導せよ.

解答 この系でわからない量はR_A, N_1, N_2, N_3, θ_Aの五つで, これらを決めるために必要な式は「**発展例題12.01**の**解答**の1)の二つの式(a)と(b)」+「3)の条件から得られる三つの式」の合計五つになる. 3)の条件から得られる三つの式は, **発展例題12.01**の**解説**の$v_B=v_{AB}|_{x=a}$, $v_C=v_{BC}|_{x=2a}$, $v_D=v_{CD}|_{x=3a}$を使って,

$$-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A-\frac{l}{AE}N_1+a\theta_A=-\frac{1}{24}\frac{wa^4}{EI_z} \quad \text{(c)}$$

$$-\frac{8}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_1+\frac{l}{AE}N_2+2a\theta_A=-\frac{16}{24}\frac{wa^4}{EI_z}-\alpha\Delta Tl \quad \text{(d)}$$

$$-\frac{27}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A-\frac{8}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_1+\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_2-\frac{l}{AE}N_3+3a\theta_A=-\frac{81}{24}\frac{wa^4}{EI_z} \quad \text{(e)}$$

である. ■

解説：R_A，N_1，N_2，N_3，θ_Aとかは自分で計算してみよう．とっても面倒くさくてコンピュータの力を借りたくなる．きっと．もっとも，いまどき手計算で頑張って式を書くことは美徳でもなんでもなく，間違えてしまえば元も子もないので，考え方だけしっかりしておきましょう．ましてや，きれいな答えにまとめるなんてバカげている．

発展例題12.03 図12.1の系で，R_A，N_1，N_2，N_3を，コンピュータ君の力を借りて求めよ．弾性はりと弾性棒は円形断面を持ち，その直径は 50 mm と 20 mm．はりと棒のヤング率はE= 206 GPa，はりの一区間の長さa= 2 m，弾性棒の長さl= 0.5 m，弾性棒の線膨張係数α=11.6×10^{-6} K^{-1}，弾性棒CC`の温度変化量ΔT= 100 K．弾性はりの単位長さ当たりの重量はw=ϱAgで表すものとし，，ϱ=7.874×10^3 kg/m^3 とする．

解答 効率的な計算のためには，たとえば，$p=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^3}{EI_z}$，$q=\dfrac{l}{AE}$，$r=\dfrac{1}{24}\dfrac{wa^4}{EI_z}$，$s=\alpha\Delta Tl$の値を計算しておいて，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -p & -q & 0 & 0 & a \\ -8p & -p & q & 0 & 2a \\ -27p & -8p & p & -q & 3a \end{bmatrix}\begin{pmatrix} R_A \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \theta_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3wa \\ 9wa/2 \\ -r \\ -16r-s \\ -81r \end{pmatrix}$$

の形の連立方程式に直して解くのが得(解く?)策でしょう．結果は，

R_A = 0.2231987E+03 N，N_1 = 0.5212997E+02 N，N_2 = -0.5897656E+03 N，N_3 = 0.4398683E+02 N

で，θ_A = 0.3153570E-02 rad である．ここで，たとえば，"E+03 "は"×10^3"を表している．■

Variation-1

発展例題2.24の答え(弾性はりが剛体の場合)の式に数値を代入して計算すると，

R_A = -0.6728128E+05 N，N_1 = -0.6750855E+05 N，N_2 = -0.3382246E+06 N，N_3 = -0.2025257E+06 N

で，θ= 0.4158504E-04 rad であった．ちなみに，この例題の弾性はりの曲げ剛性EI_zを10^{10}倍して計算すると，剛体の場合の答えに．工学的には問題ない程度の桁数で，一致する．ただし，弾性はりの場合のθ_Aは時計回りの角度変化量で，剛体の場合のθは反時計回りの角度変化量として定義しているので注意してほしい．ここで扱っている弾性はりの場合の定義に直すと，時計回りに -0.4158504E-04 rad ということになる．

ついでに，上に挙げた三つの式で曲げ剛性EI_zを無限大にすると，

$$-\frac{l}{AE}N_1+a\theta_A=0,\qquad \frac{l}{AE}N_2+2a\theta_A=-\alpha\Delta Tl,\qquad -\frac{l}{AE}N_3+3a\theta_A=0$$

になる．この式と1)の答えの二つの式で**発展例題2.24**の答えの式が出てくることは言うまでもない．

Variation-2

では，弾性棒の引張剛性AEが無限大のとき．このときは，弾性棒が弾性変形しない→支点BとDは動かない，支点Cにのみ強制的な変位$\alpha\Delta Tl$が生じている，という問題になる．$\alpha\Delta Tl$をδ_Cで表すと，先の三つの方程式(c), (d), (e)は

$$-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A+a\theta_A=-\frac{1}{24}\frac{wa^4}{EI_z}$$

$$-\frac{8}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_1+2a\theta_A=-\frac{16}{24}\frac{wa^4}{EI_z}-\delta_C$$

$$-\frac{27}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A-\frac{8}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_1+\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_2+3a\theta_A=-\frac{81}{24}\frac{wa^4}{EI_z}$$

になる.

さて, N_2とδ_Cの向きを逆にして(つまり, N_2は上向き, δ_Cは下方に移動), **発展例題12.01**の設問1)の式のモーメントのつりあい式を点D回りの式にかえると,

$$R_A+N_1+N_2+N_3=3wa$$

$$3R_Aa+2N_1a+N_2a=\frac{9}{2}wa^2$$

$$-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A+a\theta_A=-\frac{1}{24}\frac{wa^4}{EI_z}$$

$$-\frac{8}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_1+2a\theta_A=-\frac{16}{24}\frac{wa^4}{EI_z}+\delta_C$$

$$-\frac{27}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A-\frac{8}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_1-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_2+3a\theta_A=-\frac{81}{24}\frac{wa^4}{EI_z}$$

と書ける. 以上の五つの式から,

$$R_A=\frac{192}{480}wa-\frac{1152}{480}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,\ N_1=\frac{528}{480}wa+\frac{4032}{480}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,\ N_2=\frac{528}{480}wa-\frac{4608}{480}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,\ N_3=\frac{192}{480}wa+\frac{1728}{480}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,$$

$$\theta_A=\frac{288}{480}\frac{wa^3}{24EI_z}-\frac{192}{480}\frac{\delta_C}{a}\quad .$$

が得られる. 後々のために, 上のR_A, N_1, N_2, N_3を少し整理しておく.

$$R_A=\frac{2}{5}wa-\frac{12}{5}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,\ N_1=\frac{11}{10}wa+\frac{42}{5}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,\ N_2=\frac{11}{10}wa-\frac{48}{5}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,\ N_3=\frac{2}{5}wa+\frac{18}{5}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C.$$

なお, この場合の軸力は支点反力なので, N_1, N_2, N_3を, それぞれ, R_B, R_C, R_Dに置き換えればよい. ここで考えている系は, 図12.3に示すような系になっていて, 支点Cが, 本来あるべき位置から下にδ_Cだけずれた位置にあるため, はりがたわんだ状態で設置されている場合のようなものである.

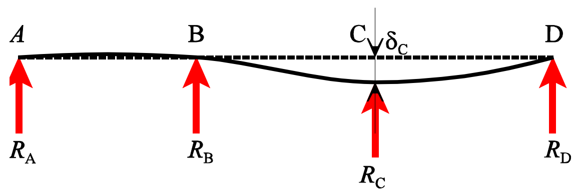


図12.3

発展例題12.01はめっちゃオイシイ問題！variationは多い！この中に入っている材料力学上の要素は,

軸力を受ける棒とはりの系のダブル不静定問題

はりの剛体に替えると, 軸力を受ける棒の不静定問題(**Variation-1**)

軸力を受ける棒の方を剛体に替えると, 四支点連続はり+支点の強制変位(**Variation-2**)

その他, はりや剛体棒の自重としての等分布荷重, 弾性棒の熱変形, 支点の強制変位が入っている. もちろん, 集中荷重や外力としてのモーメントなどを追加できる. しかも, 複数の構造要素間での力や変形に関する考え方などが必要で, 公式代入型の問題にない面白さがある. そのほか, たとえば, 支点Aをヒンジのまま上下に移動可能にするとか, 横部材がはりのままで支点Aを固定支点に替えるとか, 角度変化だけ拘束するとか, ･･･. おお！支点を一つ減らして少し簡単にすると, 定期試験の問題にうってつけ？定期試験に出ないことを祈りましょう.

ちなみに，数式処理ソフトで計算してみた結果は以下の通りです．ここでは，次のように置いています．

$$p=\frac{a^3}{6EI},\ q=\frac{l}{AE},\ r=\frac{wa^4}{24EI},\ s=\alpha\Delta Tl.$$

$$R_A=\frac{q((-93paw)-4s)+30q^2aw+9p^2aw+12ps+(568q+12p)r}{28q^2+104pq+30p^2},$$

$$N_1=-\frac{q(4s-234paw)-9q^2aw+54p^2aw+42ps+(524q-348p)r}{28q^2+104pq+30p^2},$$

$$N_2=\frac{q((-279paw)-20s)-18q^2aw-216p^2aw-48ps+(656q+732p)r}{28q^2+104pq+30p^2},$$

$$N_3=\frac{q((-108paw)-12s)+27q^2aw-81p^2aw-18ps+(612q+372p)r}{28q^2+104pq+30p^2},$$

$$\theta_A=-\frac{q(147p^2aw+46ps)+q^2(4s-264paw)-9q^3aw-9p^3aw-12p^3s+(552q^2-812pq+18p^2)r}{28q^2+104pq+30p^2}.$$

この結果を整理するのはゾッとしますが･･･．数式処理，恐るべし！

とは言うものの，簡単な確認をしてみましょう．まず，曲げ剛性が無限大($EI=\infty$)のとき，$p=0$，$r=0$とおくと，

$$R_A=\frac{15}{14}wa-\frac{1}{7}AE\alpha\Delta T,\ N_1=\frac{9}{28}wa-\frac{1}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_2=-\frac{9}{14}wa-\frac{5}{7}\alpha\Delta TAE,\ N_3=\frac{27}{28}wa-\frac{3}{7}\alpha\Delta TAE$$

となり，**発展例題2.24**の答えと同じであることがわかる．また，軸剛性無限大($AE=\infty$)のとき，$q=0$とおくと，

$$R_A=\frac{2}{5}wa+\frac{12}{5}\frac{EI_z}{a^3}\alpha\Delta Tl,\ N_1=\frac{11}{10}wa-\frac{42}{5}\frac{EI}{a^3}\alpha\Delta Tl,\ N_2=-\frac{11}{10}wa-\frac{48}{5}\frac{EI}{a^3}\alpha\Delta Tl,\ N_3=\frac{2}{5}wa-\frac{18}{5}\frac{EI_z}{a^3}\alpha\Delta Tl$$

となる．この式で，N_2の向きを上向きに，$\delta_C=\alpha\Delta Tl$として下向きにとると，

$$R_A=\frac{2}{5}wa-\frac{12}{5}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C,\ N_1=\frac{11}{10}wa+\frac{42}{5}\frac{EI}{a^3}\delta_C,\ N_2=\frac{11}{10}wa-\frac{48}{5}\frac{EI}{a^3}\delta_C,\ N_3=\frac{2}{5}wa+\frac{18}{5}\frac{EI_z}{a^3}\delta_C$$

となり，この答えは**Variation-2**と同じである．数式処理，恐るべし！

発展例題12.04　図12.4のように，水平に設置された二本の弾性はり(曲げ剛性EI_z)の中央をバネ定数Kのバネで接続した．バネに作用する力を求めよ．横荷重Pは上のはりの中央下向きに作用している．

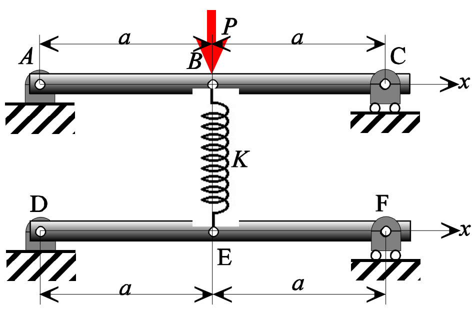


図12.4

解答　バネがはりに及ぼす力をQで表す．バネ自体が縮むとすると，この力は，上のはりに対して上向き，下のはりに対して下向きの力になる．したがって，上のはりは下向きに$P-Q$の横荷重を受け，下のはりは下向きにQの横荷重を受ける．フリーボディダイヤグラムを描くと図12.5のようになる．

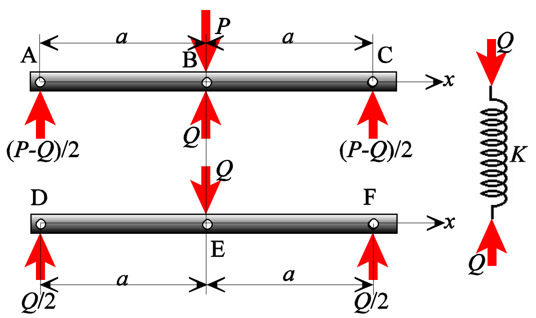


図12.5

このとき，上下のはりの中央点BとEのたわみは，

$$v_B=\frac{(P-Q)a^3}{6EI_z},\ v_E=\frac{Qa^3}{6EI_z}$$

であり，バネの伸縮量は$\delta=-\frac{Q}{K}$である．

中央点BとEのたわみの差がバネの伸縮量に等しい，つまり，$v_E - v_B = \delta$であることから，

$$\left(\frac{a^3}{3EI_z} + \frac{1}{K}\right) Q = \frac{Pa^3}{6EI_z}$$

が成り立ち，この式からQを求めることができる．ちゃんとした答えは，

大きさが$Q = \dfrac{Pa^3}{6EI_z}\left(\dfrac{a^3}{3EI_z} + \dfrac{1}{K}\right)^{-1}$の圧縮力

ですので，よろしく．■

さて，この例題の解答では，はりの中央に横荷重を受ける両端単純支持はりの荷重点たわみがわかっているとしている．「こんなもん憶えなくってもいいよ」と常日頃言っているオジサンとしては，別の解法を用意しなければならない．

さて，Qについて同じ設定で考えることにする．上下のはりは中央に集中横荷重を受けるはりなので，たわみ関数はごく簡単に求められるが，ここではひずみエネルギーを使うことにする．上のはり，下のはり，バネのひずみエネルギーをU_1，U_2，U_3で表すと，

$$U_1 = 2 \times \frac{1}{2EI_z}\int_0^a \left[\frac{1}{2}(P-Q)x\right]^2 dx = \frac{(P-Q)^2 l^3}{12EI_z}\ ,\ U_2 = 2 \times \frac{1}{2EI_z}\int_0^a \left[\frac{1}{2}Qx\right]^2 dx = \frac{Q^2 l^3}{12EI_z}\ ,\ U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{K}$$

である．系全体のひずみエネルギ$U = U_1 + U_2 + U_3$を不静定量Qで偏微分してゼロにおく，つまり，

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = 0$$

とする(「最小仕事の定理」でしたね？)と，出てくる．

もし，バネが縮むと考えずに，伸びると仮定すると，上下のはりの中央点BとEのたわみとバネの伸縮量は，

$$v_B = \frac{(P+Q)a^3}{6EI_z},\ v_E = -\frac{Qa^3}{6EI_z},\ \delta = \frac{Q}{K}$$

になるから，$Q = -\dfrac{Pa^3}{6EI_z}\left(\dfrac{a^3}{3EI_z} + \dfrac{1}{K}\right)^{-1}$が得られる(マイナス符号に注目!)．つまり，「大きさが$\dfrac{Pa^3}{6EI_z}\left(\dfrac{a^3}{3EI_z} + \dfrac{1}{K}\right)^{-1}$の圧縮力」というように答えが得られる．最小仕事の定理では，ひずみエネルギは

$$U_1 = 2 \times \frac{1}{2EI_z}\int_0^a \left[\frac{1}{2}(P+Q)x\right]^2 dx = \frac{(P+Q)^2 l^3}{12EI_z}\ ,\ U_2 = 2 \times \frac{1}{2EI_z}\int_0^a \left[\frac{1}{2}Qx\right]^2 dx = \frac{Q^2 l^3}{12EI_z}\ ,\ U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{K}$$

となり，同じように$Q = -\dfrac{Pa^3}{6EI_z}\left(\dfrac{a^3}{3EI_z} + \dfrac{1}{K}\right)^{-1}$が得られる(マイナス符号に注目!)．つまり，「大きさが$\dfrac{Pa^3}{6EI_z}\left(\dfrac{a^3}{3EI_z} + \dfrac{1}{K}\right)^{-1}$の圧縮力」である．

発展例題12.05　図12.1において，弾性棒DD`がなく，弾性棒CC`に熱変形が生じない場合の支点反力R_Aおよび弾性棒BB`およびCC`に生ずる内力N_1およびN_2を，最小仕事の定理を用いて求めよ．

解答(というか，面倒くさいことを示す)

図12.2を参照して，$N_3 = 0$とすると，静力学のつりあい式は

力のつりあい：$R_A + N_1 - N_2 - 3wa = 0$　　(a)

モーメントのつりあい(Aまわり)：$N_1 a - 2N_2 a - \dfrac{9}{2}wa^2 = 0$　　(b)

式(a), (b)から，不静定量をN_2として，

$$R_A = -N_2 - \frac{3}{2}wa,\ N_1 = 2N_2 + \frac{9}{2}wa.$$

系全体のひずみエネルギは

$$U = \frac{1}{2EI_z}\int_0^a M_{AB}^2 dx + \frac{1}{2EI_z}\int_a^{2a} M_{BC}^2 dx + \frac{1}{2EI_z}\int_{2a}^{3a} M_{CD}^2 dx + \frac{l}{2AE}\left(2N_2 + \frac{9}{2}wa\right)^2 + \frac{l}{2AE}N_2^2$$

ここではりの曲げモーメントは

$$M_{AB} = -\left(N_2 + \frac{3}{2}wa\right)x - \frac{1}{2}wx^2,$$

$$M_{BC} = -\left(N_2 + \frac{3}{2}wa\right)x + \left(2N_2 + \frac{9}{2}wa\right)(x-a) - \frac{1}{2}wx^2,$$

$$M_{CD} = -\left(N_2 + \frac{3}{2}wa\right)x + \left(2N_2 + \frac{9}{2}wa\right)(x-a) - N_2(x-2a) - \frac{1}{2}wx^2,$$

である. ひずみエネルギUをN_2で微分してゼロにおくと, ･･･. 途中の計算は省略するとして, 不静定量N_2は

$$N_2 = -\frac{\frac{4}{3}\frac{a^3}{EI_z} + 9\frac{l}{AE}}{\frac{2}{3}\frac{a^3}{EI_z} + 5\frac{l}{AE}}wa$$

として得られる. ■

一見簡単そうだが, 見える程度には簡単ではない. 系全体のひずみエネルギの式くらいまでならスラスラ書けるが, いざ, 曲げモーメントの式を代入して計算する段になると計算の大変さにしばし絶句する. この例題ですら絶句するのに, もし, 「**発展例題12.01**を最小仕事の定理を用いて解け!」と言われたら遠慮したい. 試験問題として出すとしたら, 必要な部品がちゃんとそろっていることをチェックする程度かなぁ.

ちなみに, 普通に解くと,

力のつりあい: $R_A + N_1 - N_2 - 3wa = 0$ (a)

モーメントのつりあい(Aまわり): $N_1 a - 2N_2 a - \frac{9}{2}wa^2 = 0$ (b)

の二式と

$$-\frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A - \frac{l}{AE}N_1 + a\theta_A = -\frac{1}{24}\frac{wa^4}{EI_z} \quad \text{(c)}$$

$$-\frac{8}{6}\frac{a^3}{EI_z}R_A - \frac{1}{6}\frac{a^3}{EI_z}N_1 + \frac{l}{AE}N_2 + 2a\theta_A = -\frac{16}{24}\frac{wa^4}{EI_z} \quad \text{(d)}$$

の二式を連立して解くことになり, こっちのほうがはるかに簡単である. 連続はり系の問題は素直に解くに限る. 最小仕事の定理は正しく使いましょう.

「クラペイロンの三モーメントの方法」を考える

材料力学の教科書や演習書をみると, 連続はりのところで, 「(クラペイロンの)三モーメントの方法」が紹介されている. この方法では, 各支点での反力やそこで発生している曲げモーメントを, 比較的簡単に, 求めることができる. ここでは, オジサン流に, この方法について解説することにする. ただし, 添字が面倒になることを覚悟してほしい. 書くほうも大変なのです.

連続はりの連なる三つの支点で構成される部分を考える. 三つの支点での反力と曲げモーメントを図12.6上のように表現する. ただし, 図では書かれていないが, 外力としての横荷重やモーメントは作用しているので注意してね.

発展例題12.05　三モーメントの方法の公式を導け

解答　図12.6上のような連続はりの n 番目と $n+1$ 番目の区間を考える．区間の長さと反力を図のようにとる．いま考えている三つの支点部分をばらして，系Aと系Bのように表現する．ここで，

系A：外力としての横荷重やモーメントは連続はりの対応する部分と同じ．ただし，両端単純支持になっている．(図12.6中)

系B：はりは系Aと同じく，両端単純支持になっているが，外力としての横荷重やモーメントは作用せず，単純支持点に外力としてのモーメントが作用している．(図12.6下)

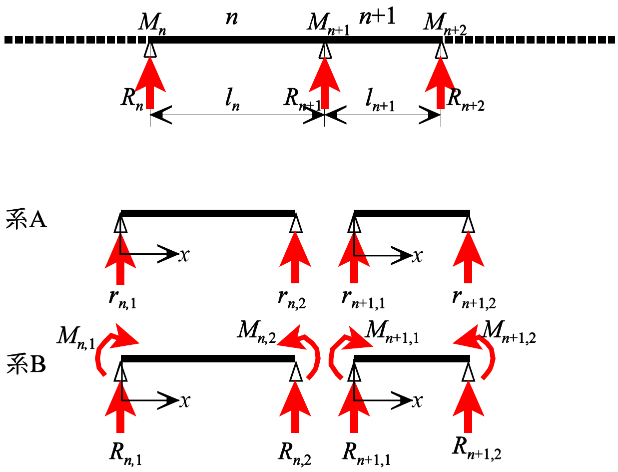


図12.6

この二つの系は，ともに静定系であることに気づくだろう．添字がやたらと出てくるので，ここでは次のルールに従って添字を付ける．

○　系の区別は，上添字による．

○　たわみ角は，スパンの番号(nとか$n+1$とか･･･)とスパンの左右の支点を表す1と2を使って区別する．

たとえば，$\theta^B_{n+1,2}$は，系Bの $n+1$ 番目のスパンの右支点のたわみ角，とか･･･

まず，系Aにおける左のはりの右支点のたわみ角を$\theta^A_{n,2}$で，右のはりの左支点のたわみ角を$\theta^A_{n+1,1}$で表す．これらは，静定系での量なので，何らかの方法でわかっている，か，計算できる．また，支点反力もわかっている．

系Bについて，

$$R_{n,1}=\frac{M_{n,2}-M_{n,1}}{l_n},\quad R_{n,2}=-\frac{M_{n,2}-M_{n,1}}{l_n} \qquad \text{(12.05-a)}$$

であることが直ちにわかる．次に，系Bの左のはりについて，たわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta^B_n=\theta^B_{n,1}-\frac{1}{EI}\left(M_{n,1}x+\frac{1}{2}R_{n,1}x^2\right)$$

$$v_n{}^B=\theta^B_{n,1}x-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{n,1}x^2+\frac{1}{6}R_{n,1}x^3\right)$$

となる．$x=l_n$でたわみがゼロであるから，式(12.05-a)の関係を用いて

$$\boxed{\theta^B_{n,1}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{n,1}l_n+\frac{1}{6}R_{n,1}l_n^2\right)=\frac{l_n}{6EI}(2M_{n,1}+M_{n,2})} \qquad \text{(12.05-b)}$$

となり，この値とたわみ角の式から右の単純支持点でのたわみ角は

$$\boxed{\theta^B_{n,2}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{n,1}l_n+\frac{1}{6}R_{n,1}l_n^2\right)-\frac{1}{EI}\left(M_{n,1}l_n+\frac{1}{2}R_{n,1}l_n^2\right)=-\frac{l_n}{6EI}(M_{n,1}+2M_{n,2})} \qquad \text{(12.05-c)}$$

となる．

さて，もとの連続はりで支点 $n+1$ ではたわみ角が連続でなければならないから，系Aと系Bとを重ね合わせて，

$$\theta^A_{n,2}+\theta^B_{n,2}=\theta^A_{n+1,1}+\theta^B_{n+1,1}$$

が成立しなければならないから，これより，

$$\theta^B_{n+1,1}-\theta^B_{n,2}=\theta^A_{n,2}-\theta^A_{n+1,1}$$

となる．$\theta^B_{n+1,1}$は，式(12.05-b)でnを$n+1$として$\theta^B_{n+1,1}=\dfrac{l_{n+1}}{6EI}(2M_{n+1,1}+M_{n+1,2})$と書けるから

$$l_n(M_{n,1}+2M_{n,2})+l_{n+1}(2M_{n+1,1}+M_{n+1,2})=6EI(\theta^A_{n,2}-\theta^A_{n+1,1})$$

さらに，$M_{n,1}=M_n$，$M_{n,2}=M_{n+1,1}=M_{n+1}$，$M_{n+1,2}=M_{n+2}$なので，

$$\boxed{l_nM_n+2(l_n+l_{n+1})M_{n+1}+l_{n+1}M_{n+2}=6EI(\theta^A_{n,2}-\theta^A_{n+1,1})} \qquad \text{(A)}$$

と書ける．反力の式(a)は

$$\boxed{R_{n,1}=\frac{M_{n+1}-M_n}{l_n},\ R_{n,2}=-\frac{M_{n+1}-M_n}{l_n}} \qquad \text{(12.05-a1)}$$

である．系全体の反力の式は，たとえば，

$$\boxed{R_{n+1}=r_{n,2}+r_{n+1,1}+R_{n,2}+R_{n+1,1}} \qquad \text{(12.05-d)}$$

である．■

解説：x座標のとり方に気をつける必要がある．この稿ではx座標を図12.6のようにとっているが，他の材料力学の教科書や演習書，たとえば，「中原，材料力学(上)，養賢堂」，「尾田・三好，演習　材料力学，サイエンス社」，「高橋・町田・角，基礎　材料力学，培風館」ではx座標は図12.7のようにとられている．この稿と同じ座標系をとった場合の式は「中原，材料力学(上)，養賢堂」の脚注に書かれている．

図12.7のように座標系を考えた場合，上述の式(A)は

$$l_nM_n+2(l_n+l_{n+1})M_{n+1}+l_{n+1}M_{n+2}=-6EI(\theta^A_{n,2}+\theta^A_{n+1,1})$$

のようになる．三モーメントの式は使いやすいが，座標系を確認せずに使うととんでもない答えが出そうだ．また，座標系が明記されていない場合があるので気をつけてください．

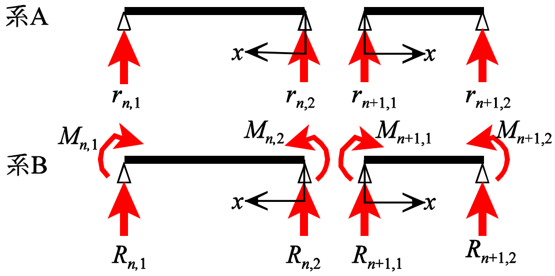


図12.7

発展例題12.06　図12.1の系において，すべての弾性棒の軸剛性が無限大とし，強制変位もないものとする．このときの支点反力を，三モーメントの方法を用いて求めよ．単位長さあたりの自重をwとする．

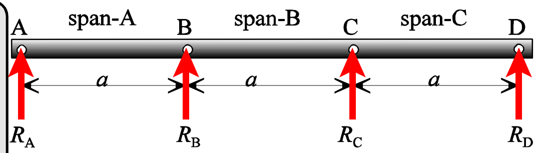


図12.8

解答　FBDは図12.8のとおり．支点番号の代わりにをA，B，C，Dで表す．また，支点A，B間のはりの部分を，「スパンA」などと表すことにする．まず，系Aの量として任意のスパンの両端のたわみ角は

$$\theta^A_{n,1}=\frac{wa^3}{24EI},\ \theta^A_{n,2}=-\frac{wa^3}{24EI}$$

であるから，式(A)を適用すると

$$aM_A \quad +4aM_B \quad +aM_C \qquad\qquad = -\frac{1}{2}wa^3$$

$$aM_B \quad +4aM_C \quad +aM_D \quad = -\frac{1}{2}wa^3$$

の二つの式ができる．支点AとDははりの端点なので，$M_A=M_D=0$ であることから，

$$M_B=M_C=-\frac{1}{10}wa^2$$

この結果を式(12.05-a1)に代入すると，

$$R_{A,1}=\frac{M_B-M_A}{a}=-\frac{1}{10}wa,\ R_{A,2}=-\frac{M_B-M_A}{a}=\frac{1}{10}wa$$

$$R_{B,1}=\frac{M_C-M_B}{a}=0,\ R_{B,2}=-\frac{M_C-M_B}{a}=0$$

$$R_{C,1}=\frac{M_D-M_C}{a}=\frac{1}{10}wa,\ R_{C,2}=-\frac{M_D-M_C}{a}=-\frac{1}{10}wa$$

となる．一方，系Aにおける反力はすべて上向きで $\frac{1}{2}wa$ であるから，式(d)を用いて

$$R_A=\frac{1}{2}wa-\frac{1}{10}wa=\frac{2}{5}wa,\ R_B=\frac{1}{2}wa+\frac{1}{2}wa+\frac{1}{10}wa=\frac{11}{10}wa\,,$$

$$R_C=\frac{1}{2}wa+\frac{1}{2}wa+\frac{1}{10}wa=\frac{11}{10}wa,\ R_D=\frac{1}{2}wa-\frac{1}{10}wa=\frac{2}{5}wa$$

となる．■

これらの結果は，**発展例題12.01**の**Variation-2**で $\delta_C=0$ とおいた答えと一致している．

発展例題12.07 三モーメントの方法を，支点に強制変位がある場合について拡張せよ．

解答 各支点での変位(たわみ?)に同じ添字ルールを適用すると，系Bの左のはりについて，たわみ角の式とたわみ関数は

$$\theta_n^B=\theta_{n,1}^B-\frac{1}{EI}\left(M_{n,1}x+\frac{1}{2}R_{n,1}x^2\right)$$

$$v_n^B=v_{n,1}^B+\theta_{n,1}^B x-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{n,1}x^2+\frac{1}{6}R_{n,1}x^3\right)$$

となる．$x=l_n$ でたわみを $v_{n,2}^B$ とすると，

$$\theta_{n,1}^B=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{n,1}l_n+\frac{1}{6}R_{n,1}l_n^2\right)+\frac{v_{n,2}^B-v_{n,1}^B}{l_n}$$

となり，この値とたわみ角の式から右の支点でのたわみ角は

$$\theta_{n,2}^B=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}M_{n,1}l_n+\frac{1}{3}R_{n,1}l_n^2\right)+\frac{v_{n,2}^B-v_{n,1}^B}{l_n}$$

さらに，

$$\theta_{n,2}^B=-\frac{l_n}{6EI}(M_{n,1}+2M_{n,2})+\frac{v_{n,2}^B-v_{n,1}^B}{l_n}$$

同様にして，

$$\theta^B_{n+1,1}=\frac{l_{n+1}}{6EI}(2M_{n+1,1}+M_{n+1,2})+\frac{v^B_{n+1,2}-v^B_{n+1,1}}{l_{n+1}}$$

となる．いま，系Aがない場合を考えると，たわみ角は次の条件を満たす必要がある．

$$\theta^B_{n+1,1}-\theta^B_{n,2}=0$$

この式から，最終的に，

$$l_nM_n+2(l_n+l_{n+1})M_{n+1}+l_{n+1}M_{n+2}=6EI\left(\frac{v^B_{n,2}-v^B_{n,1}}{l_n}-\frac{v^B_{n+1,2}-v^B_{n+1,1}}{l_{n+1}}\right)$$

さらに，$v^B_{n,2}=v^B_{n+1,1}=v^B_{n+1}$ であり，$v^B_{n,1}=v^B_n$，$v^B_{n+1,2}=v^B_{n+2}$ とおいてもよいので，

$$\boxed{l_nM_n+2(l_n+l_{n+1})M_{n+1}+l_{n+1}M_{n+2}=6EI\left(\frac{v^B_{n+1}-v^B_n}{l_n}-\frac{v^B_{n+2}-v^B_{n+1}}{l_{n+1}}\right)} \qquad \text{(B)}$$

と書ける．式(B)が，支点に強制変位がある場合の三モーメントの方法の式である．■

発展例題12.08 図12.1の系において，すべての弾性棒の軸剛性が無限大で，点Cのみ下方にδ_Cだけずれている．このときの支点反力を，三モーメントの方法を用いて求めよ．ただし，δ_Cの影響のみ考慮するために，はりの自重を考えないものとする．

解答 wの項を入れなければ，$v_C=\delta_C$として，それ以外の支点の変位はゼロであるから，式(B)を適用すると

$$aM_A+4aM_B+aM_C=-6EI\frac{\delta_C}{a}$$

$$aM_B+4aM_C+aM_D=12EI\frac{\delta_C}{a}$$

の二つの式ができる．支点AとDははりの端点なので，$M_A=M_D=0$ であるから，

$$M_B=-\frac{12}{5}\frac{\delta_C}{a^2}EI,\ M_C=\frac{18}{5}\frac{\delta_C}{a^2}EI$$

この結果を使うと，

$$R_{A,1}=\frac{M_B-M_A}{a}=-\frac{12}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI,\ R_{A,2}=-\frac{M_B-M_A}{a}=\frac{12}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI$$

$$R_{B,1}=\frac{M_C-M_B}{a}=\frac{30}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI,\ R_{B,2}=-\frac{M_C-M_B}{a}=-\frac{30}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI$$

$$R_{C,1}=\frac{M_D-M_C}{a}=-\frac{18}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI,\ R_{C,2}=-\frac{M_D-M_C}{a}=\frac{18}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI$$

となり，支点反力として

$$R_A=R_{A,1}=-\frac{12}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI,\qquad R_B=R_{A,2}+R_{B,1}=\frac{12}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI+\frac{30}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI=\frac{42}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI$$

$$R_C=R_{B,2}+R_{C,1}=-\frac{30}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI-\frac{18}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI=-\frac{48}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI,\qquad R_D=R_{C,2}=\frac{18}{5}\frac{\delta_C}{a^3}EI$$

が得られる．これらは，**発展例題12.01**の**Variation-2**のR_A，N_1，N_2，N_3の答えの二項目と同じである．■

解説:外力が作用し，かつ，支点に強制変位がある場合の最終的な式は，上述の式(A)と(B)を重ね合わせて，

$$l_n M_n + 2(l_n + l_{n+1})M_{n+1} + l_{n+1}M_{n+2} = 6EI(\theta^A_{n,2} - \theta^A_{n+1,1}) + 6EI\left(\frac{v^B_{n+1}-v^B_n}{l_n} - \frac{v^B_{n+2}-v^B_{n+1}}{l_{n+1}}\right) \qquad \text{(C)}$$

が最終的な式になる．反力の式は式(a1)，系全体の反力の式は，式(d)である．

式(C)では支点の強制変位を系Bに入れているが，実際には系全体の話なので，

$$\boxed{l_n M_n + 2(l_n + l_{n+1})M_{n+1} + l_{n+1}M_{n+2} = 6EI(\theta^A_{n,2} - \theta^A_{n+1,1}) + 6EI\left(\frac{v_{n+1}-v_n}{l_n} - \frac{v_{n+2}-v_{n+1}}{l_{n+1}}\right)} \qquad \text{(D)}$$

で構わない．しかし，たわみ角に関しては系Aの量であることを注意してほしい．また，系全体の反力の式(式(12.05-d))の小文字の量は系Aの量である．もう一つ気付いたことと思うが，式(D)の右辺の第二項のカッコ内のそれぞれの量は，はりの各スパンの剛体としての傾斜角である．であれば，右辺第一項のたわみ角の中に組み込んでしまっても構わないのである．しかし，たぶん，式(D)のほうが使いやすいと思う．

発展例題12.09　図12.9のFBDの系において，端点Dのたわみ角をθ_{D0}にしたい．端点Dに加える外力のモーメントM_{D0}を，三モーメントの方法を用いて，求めよ．はりの曲げ剛性をEI，単位長さあたりの分布荷重を下向きにwとする．

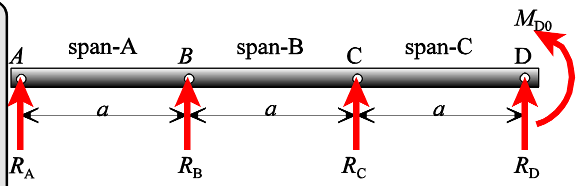


図12.9

解答　いま，Dのたわみ角がθ_{D0}になるような外力のモーメントM_{D0}を求めたいのだが，Dは端点なので三モーメントの式を使うためにはスパンCの右隣にスパンが必要である．しかし，ここではM_{D0}がわかっているものとして計算して，Dのたわみ角がθ_{D0}になるようにする．

発展例題12.06で得られた式

$$aM_A + 4aM_B + aM_C = -\frac{1}{2}wa^3$$

$$aM_B + 4aM_C + aM_D = -\frac{1}{2}wa^3$$

で，$M_A=0$，$M_D=M_{D0}$とおくと，

$$4aM_B + aM_C = -\frac{1}{2}wa^3$$

$$aM_B + 4aM_C = -\frac{1}{2}wa^3 - aM_{D0}$$

これより，

$$M_B = -\frac{1}{10}wa^2 + \frac{1}{15}M_{D0},\quad M_C = -\frac{1}{10}wa^2 - \frac{4}{15}M_{D0}.$$

θ_Dは，

$$\theta_D = \theta^A_{C,2} + \theta^B_{C,2} = -\frac{1}{40}\frac{wa^3}{EI} - \frac{13}{45}\frac{M_{D0}a}{EI}$$

である．このθ_Dがθ_{D0}に等しいことから

$$M_{D0}=-\frac{45}{13}\frac{EI}{a}\theta_{D0}-\frac{9}{104}wa^2$$

が得られる．

もし，$\theta_{D0}=0$，つまり，端点Dが固定支持点であれば，

$$M_{D0}=-\frac{9}{104}wa^2$$

つまり，固定モーメントは，大きさが $\frac{9}{104}wa^2$ で時計回りのモーメントである．もし，$M_{D0}=0$ なら，つまり，端点Dが外力のモーメントが作用しない単純支持点であれば，

$$\theta_{D0}=-\frac{1}{40}\frac{wa^3}{EI}$$

である．■

解説：解答が正しいことを確認してみよう．式が煩雑にならないために，分布荷重をゼロにして，M_{D0} の影響のみ考えることにする．M_{D0} による支点反力は

$$R_A=\frac{1}{15}\frac{M_{D0}}{a},\quad R_B=-\frac{6}{15}\frac{M_{D0}}{a},\quad R_C=\frac{24}{15}\frac{M_{D0}}{a},\quad R_D=-\frac{19}{15}\frac{M_{D0}}{a}$$

である．これらの値は，静力学的つりあい条件を満たす．

次に，支点Aでのたわみ角は，たわみ角の式に代入して，$\theta_{D0}=-\frac{13}{45}\frac{M_{D0}a}{EI}$ であるから，

$$\theta_A=-\frac{13}{45}\frac{M_{D0}a}{EI}+\frac{1}{2EI}\left[R_A\times(3a)^2+R_B\times(2a)^2+R_Ca^2\right]=-\frac{13}{45}\frac{M_{D0}a}{EI}+\frac{3}{10}\frac{M_{D0}a}{EI}=\frac{1}{90}\frac{M_{D0}a}{EI}$$

となる(式(b)を使うと $\theta^B_{A,1}=\frac{a}{6EI}(2M_A+M_B)=\frac{1}{90}\frac{M_{D0}a}{EI}$ が直ちに得られる)．以上で得られた量のうち，R_A，R_B，R_C，θ_A をたわみ関数に代入して計算される支点Dのたわみがゼロであることが示されればよい．実際，点Dのたわみ関数に代入すると

$$v_D=\theta_A\times(3a)-\frac{1}{6EI}\left[R_A\times(3a)^3+R_B\times(2a)^3+R_Ca^3\right]=0$$

となり，正しいことがわかる．

発展例題12.10　図12.10の系において，各支点A，B，Cでの曲げモーメントと支点反力を求めよ．支点A，B，Cは上下に移動しない．はりの曲げ剛性をEIとし，自重は考えない．

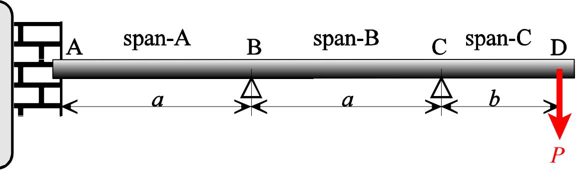


図12.10

解答　この場合のFBDは図12.11のようである．三モーメントの式は，支点Bに関するものだけである．$M_C=-Pb$ で，M_A が既知であるものとすると，

$$M_A+4M_B+M_C=0$$

より，

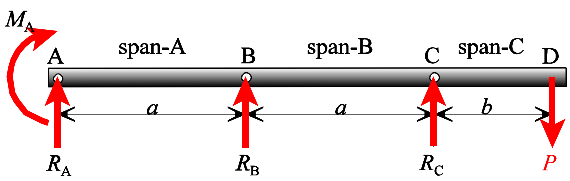


図12.11

$$M_B=-\frac{1}{4}M_A+\frac{1}{4}Pb$$

である．θ_Aは式(12.05-b)を用いて

$$\theta_A=\frac{a}{6EI}(2M_A+M_B)=0$$

であるから，これより

$$\theta_A=\frac{7}{24}\frac{M_Aa}{EI}+\frac{1}{24}\frac{Pab}{EI}=0$$

ゆえに，

$$M_A=-\frac{1}{7}Pb$$

となり，$M_B=\frac{2}{7}Pb$も得られる．

各支点反力は式(12.05-d)を用いて

$$R_A=\frac{M_B-M_A}{a}+0=\frac{3}{7}\frac{b}{a}P,\quad R_B=-\frac{M_B-M_A}{a}+\frac{M_C-M_B}{a}+0+0=-\frac{8}{7}\frac{b}{a}P,\quad R_C=-\frac{M_C-M_B}{a}+P=\left(\frac{5}{8}\frac{b}{a}+1\right)P$$

である．■

解説:この例題のような固定支点をもつ系に三モーメントの方法を適用する場合は，固定支点について鏡像になる系を加える．この例題の場合だと，固定支点Aに鏡をおいたとして，Aに着目した式は

$$M_B+4M_A+M_B=0$$

すなわち，

$$2M_A+M_B=0$$

Bに着目した式は

$$M_A+4M_B=Pb$$

であるから，直ちに

$$M_A=-\frac{1}{7}Pb,\quad M_B=\frac{2}{7}Pb$$

が得られる．

発展例題12.11 図12.1の系において，三モーメントの方法によって，各支点A，B，C，Dでの曲げモーメントと支点反力を求めよ．

解答 まず，$v_A=0$，$v_B=\delta_1=\frac{N_1l}{AE}$，$v_C=-\delta_2=-\frac{N_2l}{AE}-\alpha\Delta Tl$，$v_D=\delta_3=\frac{N_3l}{AE}$であるから，

$$v_B-v_A=\frac{N_1l}{AE},\quad v_C-v_B=-\frac{N_1l}{AE}-\frac{N_2l}{AE}-\alpha\Delta Tl,\quad v_D-v_C=\frac{N_2l}{AE}+\frac{N_3l}{AE}+\alpha\Delta Tl.$$

棒の軸力とはりが受ける反力との関係から

$$v_B-v_A=\frac{R_Bl}{AE},\quad v_C-v_B=-\frac{R_Bl}{AE}+\frac{R_Cl}{AE}-\alpha\Delta Tl,\quad v_D-v_C=-\frac{R_Cl}{AE}+\frac{R_Dl}{AE}+\alpha\Delta Tl.$$

式(D)から,

$$aM_A + 4aM_B + aM_C = -\frac{1}{2}wa^3 + 6\frac{EIl}{AEa}(2R_B - R_C) + 6EI\alpha\Delta T\frac{l}{a}$$

$$aM_B + 4aM_C + aM_D = -\frac{1}{2}wa^3 + 6\frac{EIl}{AEa}(-R_B + 2R_C - R_D) - 12EI\alpha\Delta T\frac{l}{a}$$

式(12.05-d)と(12.05-a1)から, 支点AとDははりの端点なので, $M_A = M_D = 0$ であることを用いて,

$$R_A = \frac{M_B - M_A}{a} = \frac{M_B}{a},\ R_B = -\frac{M_B - M_A}{a} + \frac{M_C - M_B}{a} = \frac{-2M_B + M_C}{a},$$

$$R_C = -\frac{M_C - M_B}{a} + \frac{M_D - M_C}{a} = \frac{M_B - 2M_C}{a},\ R_D = -\frac{M_D - M_C}{a} = \frac{M_C}{a}$$

であるから,

$$4aM_B + aM_C = -\frac{1}{2}wa^3 + 6\frac{EIl}{AEa^2}(-5M_B + 4M_C) + 6EI\alpha\Delta T\frac{l}{a}$$

$$aM_B + 4aM_C = -\frac{1}{2}wa^3 + 6\frac{EIl}{AEa^2}(4M_B - 6M_C) - 12EI\alpha\Delta T\frac{l}{a}$$

右辺の M_B, M_C の項を左辺に移して整理すると

$$(4AEa^3 + 30EIl)M_B + (AEa^3 - 24EIl)M_C = -\frac{1}{2}AEwa^5 + 6EIl\cdot AEa\cdot\alpha\Delta T$$

$$(AEa^3 - 24EIl)M_B + (4AEa^3 + 36EIl)M_C = -\frac{1}{2}AEwa^5 - 12EIl\cdot AEa\cdot\alpha\Delta T$$

となり, この連立一次方程式から M_B と M_C の式を求めることができる. しかし, 数式処理ソフトで計算した結果から想像できるように, 解はそれなりに複雑になりそうなので, 次のような簡単な場合について検討する.

弾性棒の軸剛性が無限大.

両辺を AEa^3 で割って $AE\to\infty$ とすると,

$$4M_B + M_C = -\frac{1}{2}wa^2 + 6\frac{EI}{a^2}\cdot\alpha\Delta Tl$$

$$M_B + 4M_C = -\frac{1}{2}wa^2 - 12\frac{EI}{a^2}\cdot\alpha\Delta Tl$$

この連立方程式は, **発展例題12.06**と**発展例題12.08**の連立方程式を重ね合わせたものなので, 正しい. ただし, **発展例題12.08**では, $\alpha\Delta Tl$ に相当する δ_C は下向きであるのに対して, ここでの $\alpha\Delta Tl$ は上向きなので, 符号が逆であることに気をつけること.

発展例題12.12 図12.12(A)に示す5部材からなるトラス構造の節点Cをはずしたところ, (B)のように $\overline{C_1C_2} = \Delta$ の隙間が生じた. 次の問いに答えよ. Δ は微小であるとし, 状態(A), (B)間で部材のなす角度の変化は無視できるほど小さいものとする. 部材ACの長さを L とし, 全部材の引張剛性を AE とする. 構造は左右対称である.

1) 図12.12(A)の状態で各部材に生じていた内力を, Δ を用いて表せ.

2) 図12.12(A)の状態で点Dに下向き荷重 P を加えて部材ADとBDの内力がゼロにしたい. 荷重 P の大きさを求めよ.

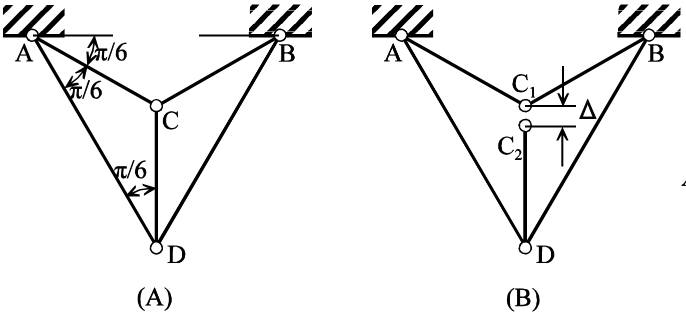


図12.12

解答 1) 図12.12(A)の状態で節点に発生している力をfとすると，図12.13のようになっている．

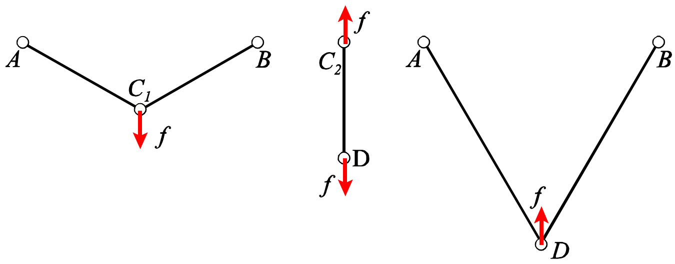


図12.13

図12.13の左の図から，部材ACとBCの内力N_{AC}とN_{BC}は，対称性から$N_{AC}=N_{BC}$であり，$2N_{AC}\sin\frac{\pi}{6}-f=0$から$N_{AC}=N_{BC}=f$.部材CDの内力は$N_{CD}=f$. 部材ADとBDの内力$N_{AD}$と$N_{BD}$も対称性から$N_{AD}=N_{BD}$であり，$2N_{AD}\sin\frac{\pi}{3}+f=0$から$N_{AD}=N_{BD}=-\frac{1}{\sqrt{3}}f$ である．系のひずみエネルギは

$$U_{ACB}=\frac{1}{2}\frac{N_{AC}^2L}{AE}+\frac{1}{2}\frac{N_{BC}^2L}{AE}=\frac{f^2L}{AE},\ U_{CD}=\frac{1}{2}\frac{N_{CD}^2L}{AE}=\frac{1}{2}\frac{f^2L}{AE},\ U_{ADB}=\frac{1}{2}\frac{N_{AD}^2\sqrt{3}L}{AE}+\frac{1}{2}\frac{N_{BD}^2\sqrt{3}L}{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{f^2l}{AE}.$$

これより，C_1の移動量は下向きに$\Delta_1=2\frac{fL}{AE}$，C_2Dの長さの変化量は$\Delta_2=\frac{fL}{AE}$，Dの変位は上向きに$\Delta_3=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{fL}{AE}$. Δは，図12.14のように，これらを加えて，

$$\Delta=2\frac{fL}{AE}+\frac{fL}{AE}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{fL}{AE}=\left(3+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\frac{fL}{AE}=\frac{2+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\frac{fL}{AE}$$

である．こらから，fは

$$f=\frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}AE\frac{\Delta}{L}$$

となり，各部材内力は

$$N_{AC}=N_{BC}=N_{CD}=f=\frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}AE\frac{\Delta}{L},\quad N_{AD}=N_{BD}=-\frac{1}{\sqrt{3}}f=-\frac{1}{2+3\sqrt{3}}AE\frac{\Delta}{L}$$

である．

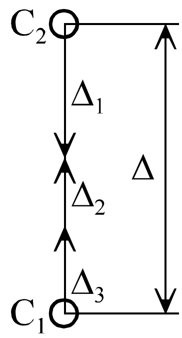


図12.14

2) いま，fはとりあえず除外し，図12.13(A)の不静定系における部材内力を図12.15のように，$n_{CD}=n_{AC}=n_{BC}=Q$とおく．点Dでの力のつりあい$2n_{AD}\sin\frac{\pi}{3}+Q-P=0$から

$$n_{AD}=n_{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}(P-Q).$$

部分構造ADBの点Dの垂直方向の移動量は$\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{(P-Q)L}{AE}$であり，Y字型の構造の垂直方向の移動量は$3\frac{QL}{AE}$である．これらが等しいことから，

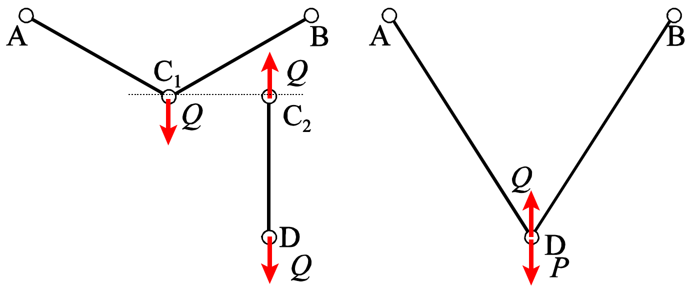


図12.15

$$3\frac{QL}{AE}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{(P-Q)L}{AE}$$

これより，$P=\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)Q$が得られる．ゆえに，部材ADとBDの内力は$n_{AD}=n_{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}(P-Q)=\frac{3}{2}Q$．これに1)の状態を重ね合わせて(つまり，1)の答えを加えて)部材ADとBDの内力をゼロにおくと，$\frac{3}{2}Q-\frac{1}{\sqrt{3}}f=0$．$P$と$Q$の関係式に代入すると，

$$P=\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)Q=\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\frac{2}{3\sqrt{3}}f=\left(1+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)f=\frac{1}{3}AE\frac{\Delta}{L}$$

となる．■

解説:この例題の2)の場合，次のように考えることもできる．

図12.15の左の二つと図12.13の左の二つはQとfの違いだけなので，これらをまとめて$f+Q$と表現して，この力による変位量がΔに等しいとおくと，

$$\Delta=3\frac{(f+Q)L}{AE}$$

これから，$Q=\frac{1}{3}AE\frac{\Delta}{L}-f$が得られる．

図12.15の右端の図に注目すると，部材ADとBDの内力がゼロであるから，$P-Q-f=0$でなければならない．このことからPは

$$P=Q+f=\left(\frac{1}{3}AE\frac{\Delta}{L}-f\right)+f=\frac{1}{3}AE\frac{\Delta}{L}$$

となって，同じ答が得られる．

またはり系の不静定問題に戻ります．

発展例題12.13 図12.16の系における点BとCのたわみをv_Bとv_Cとするとき，図12.17の系における点Cのたわみv_C^*とする．v_C^*を図12.16の系のv_Bとv_Cを用いて表せ．部材の曲げ剛性をEI，ねじり剛性をGI_pとする．部材CDの長さはaである．

―この問題は某大学の大学院入試に出たものらしいです．シンプルな式になります．いい問題だなぁ．エレガントだなぁ．―

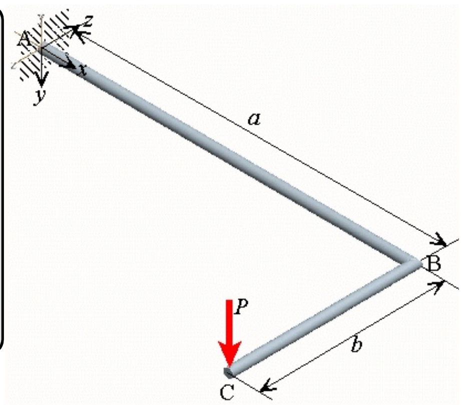


図12.16

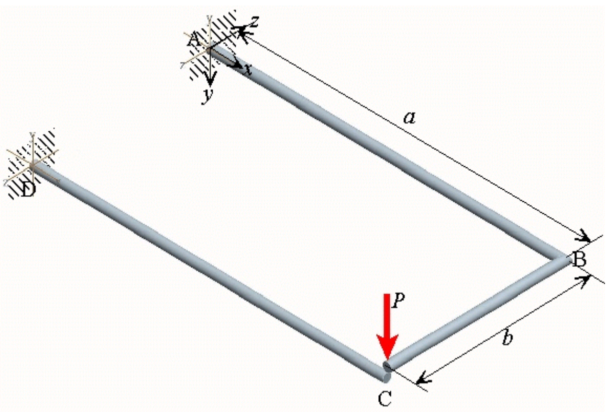


図12.17

解答 図12.16の系において，

$$v_B=\frac{Pa^3}{3EI},\quad v_C=v_B+\frac{Pb^3}{3EI}+\frac{Pab^2}{GI_p}=\frac{P(a^3+b^3)}{3EI}+\frac{Pab^2}{GI_p}$$

である．

問題の図12.17の系において，部材CDの点Cに作用する力を下向きにQとすると，点Cのたわみは

$$v_C^*=\frac{Qa^3}{3EI}.$$

このとき，部材ABCの点Cにおけるたわみは点Cに下向きの力

$P-Q$が作用することになるので，図12.16の系のv_Cの式のPを$P-Q$に置き換えると

$$v_C^* = \frac{(P-Q)(a^3+b^3)}{3EI} + \frac{(P-Q)ab^2}{GI_p}$$

これらが等しいことから

$$\frac{Q}{3EI}(2a^3+b^3) + \frac{Qab^2}{GI_p} = \frac{P(a^3+b^3)}{3EI} + \frac{Pab^2}{GI_p}$$

この式の右辺はv_Cに等しいことに着目してQをv_Cを用いて表現するとv_C^*は

$$v_C^* = \frac{Qa^3}{3EI} = \frac{a^3}{3EI}\frac{v_C}{\frac{1}{3EI}(2a^3+b^3)+\frac{1}{GI_p}ab^2}$$

この式の分母分子にPをかけると

$$v_C^* = \frac{Pa^3}{3EI}\frac{v_C}{\frac{Pa^3}{3EI}+\left[\frac{P}{3EI}(a^3+b^3)+\frac{P}{GI_p}ab^2\right]} = \frac{v_B v_C}{v_B+v_C}$$

■

解説：この問題はひずみエネルギを用いても計算できるが，おそらく，オーソドックスな方法が適切なような気がする．

発展例題12.14　図12.18の構造のバネに生ずる力を求めよ．バネは固定されていて垂直方向に伸縮する．部材の曲げ剛性をEI，ねじり剛性をGI_pとする．

－この問題は某大学の大学院入試に出たものらしいです．ただし，少し難しくしています．ただ，刺繍的な式は面倒なだけです．－

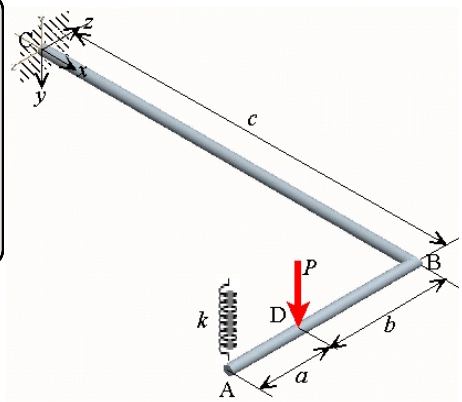


図12.18

解答　バネは構造に上向きの力Qをおよぼすものとする．点Bのたわみは

$$v_B = \frac{(P-Q)c^3}{3EI}$$

BのCに対するねじり角は

$$\varphi_B - \varphi_C = \frac{bP-(a+b)Q}{GI_p}c$$

である．

点Aのたわみは

$$v_A = \frac{(P-Q)c^3}{3EI} + \frac{bP-(a+b)Q}{GI_p}c(a+b) + \frac{Pb^3}{3EI} + \frac{Pb^2}{2EI}a - \frac{Q(a+b)^3}{3EI}$$

であるから，まとめると

$$v_A = \left[\frac{c^3}{3EI} + \frac{(3a+2b)b^2}{6EI} + \frac{(a+b)bc}{GI_p}\right]P - \left[\frac{c^3}{3EI} + \frac{(a+b)^3}{3EI} + \frac{(a+b)^2c}{GI_p}\right]Q.$$

一方，$v_A = Q/k$であるから，バネに生ずる力Qは

$$\left[\frac{1}{k}+\frac{c^3}{3EI}+\frac{(a+b)^3}{3EI}+\frac{(a+b)^2c}{GI_p}\right]Q=\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(3a+2b)b^2}{6EI}+\frac{(a+b)bc}{GI_p}\right]P$$

から求めることができる.(最終的な答えではないが,ここまでで十分でしょう)■

解説1:以上二つの例題は基本的なはり,特に片持ちはりの自由端のたわみとたわみ角を覚えておくと便利な問題である.片持ちはりと中央に集中力を受ける両端支持はりの中央点たわみくらいは頭に入れておいて損はない.

解説2: $v_A=\frac{(P-Q)c^3}{3EI}+\frac{bP-(a+b)Q}{GI_p}c(a+b)+\frac{Pb^3}{3EI}+\frac{Pb^2}{2EI}a-\frac{Q(a+b)^3}{3EI}$の各項は次のとおり.

第一項:横荷重$P-Q$によるBのCに対するたわみ

第二項:BのCに対する角度変化$\varphi_B-\varphi_C=\frac{bP-(a+b)Q}{GI_p}c$によって生ずるAの垂直方向移動量

第三項:横荷重PによるDのBに対するたわみ

第四項:横荷重PによるDのBに対するたわみ角$\frac{Pb^2}{2EI}$によって生ずるAの垂直方向移動量

第五項:横荷重QによるAのBに対するたわみ

発展例題12.15 図12.18の構造のバネに生ずる力を,カスティリアノの定理を用いて求めよ.バネは固定されていて垂直方向に伸縮する.部材の曲げ剛性をEI,ねじり剛性をGI_pとする.

解答 フリーボディダイヤグラムは図12.19のとおり.

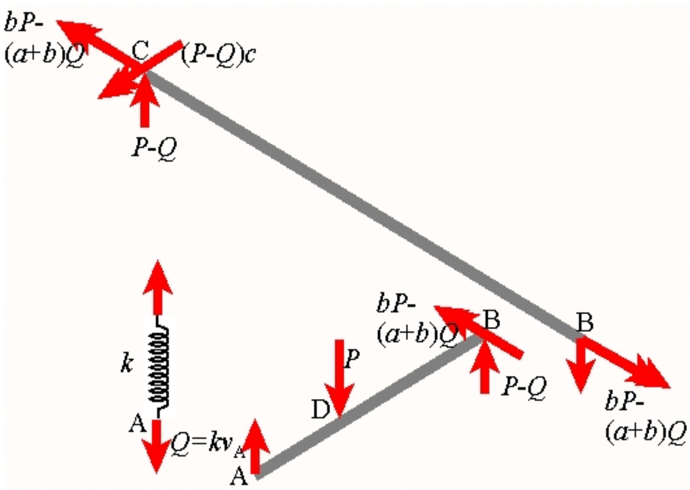


図12.19

x_1軸をAからBに向かってとると,曲げモーメントは,フリーボディダイヤグラムを参照して,

$$M_{AD}=Qx_1$$

$$M_{DB}=Qx_1-P(x_1-a)$$

BC間においてねじりモーメントは

$$T_{CB}=Pb-Q(a+b)$$

曲げモーメントは,CからBに向かってx_2軸をとると

$$M_{CB}=-(P-Q)c+(P-Q)x_2$$

バネの弾性エネルギ以外のひずみエネルギU_{ABC}は

$$U_{ABC}=\frac{Q^2}{2EI}\int_0^a x_1^2dx_1+\frac{1}{2EI}\int_a^{a+b}[Qx_1-P(x_1-a)]^2dx_1+\frac{[Pb-Q(a+b)]^2}{2GI_p}\int_0^c dx_2+\frac{(P-Q)^2}{2EI}\int_0^c(x_2-c)^2dx_2$$

となり，点Aの変位δ_Aは

$$\delta_A=\frac{\partial U_{ABC}}{\partial Q}=-\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(3a+2b)b^2}{6EI}+\frac{(a+b)bc}{GI_p}\right]P+\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(a+b)^3}{3EI}+\frac{(a+b)^2c}{GI_p}\right]Q$$

である．この変位は荷重Qの向きの変位であるから，上向きである．バネの変形量は，バネの上端基準に下向きにQ/kであり，δ_Aと符号を変えて等しいことから

$$-\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(3a+2b)b^2}{6EI}+\frac{(a+b)bc}{GI_p}\right]P+\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(a+b)^3}{3EI}+\frac{(a+b)^2c}{GI_p}\right]Q=-\frac{Q}{k}$$

となる．この式からバネに生ずる力Qは

$$\left[\frac{1}{k}+\frac{c^3}{3EI}+\frac{(a+b)^3}{3EI}+\frac{(a+b)^2c}{GI_p}\right]Q=\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(3a+2b)b^2}{6EI}+\frac{(a+b)bc}{GI_p}\right]P$$

から求めることができる．(最終的な答えではないが，ここまでで十分でしょう)■

解説：バネの弾性エネルギは

$$U_k=\frac{1}{2}k\delta_A^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{k}$$

である．この式からバネの変形量は$\dfrac{\partial U_k}{\partial Q}=\dfrac{Q}{k}$となる．さて，式

$$-\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(3a+2b)b^2}{6EI}+\frac{(a+b)bc}{GI_p}\right]P+\left[\frac{c^3}{3EI}+\frac{(a+b)^3}{3EI}+\frac{(a+b)^2c}{GI_p}\right]Q=-\frac{Q}{k}$$

は，

$$\frac{\partial U_{ABC}}{\partial Q}=-\frac{\partial U_k}{\partial Q}$$

と書き直すことができ，さらに，

$$\frac{\partial(U_{ABC}+U_k)}{\partial Q}=0$$

となる．ここで$U_{ABC}+U_k$はバネの弾性エネルギを含めた系全体のひずみエネルギを表しており，Qは未知の不静定量である．この式は，系全体のひずみエネルギを不正定量で微分すれば不静定量Qを決めるための式が得られることを示している．この関係を使った例題をいくつか示そう．

発展例題12.16　基本例題8.23を，系全体のひずみエネルギを不静定量で微分すれば不静定量を決めるための式が得られるということを用いて解け．

解答　N_1を不静定量として，系の全ひずみエネルギは

$$U=2\times\frac{1}{2AE}N_2^2\frac{l}{\cos\theta}+\frac{1}{2AE}N_1^2l=\frac{l}{2AE}\left[\frac{(P-N_1)^2}{2\cos^3\theta}+N_1^2\right]$$

これをN_1で微分してゼロにおくと，

$$\frac{\partial U}{\partial N_1}=\frac{1}{AE}\left(-\frac{P-N_1}{2\cos^3\theta}+N_1\right)=0$$

これより，

$$N_1=\frac{P}{1+2\cos^3\theta}$$

である．■

発展例題12.17　図12.20の構造において，部材ABが負担する横荷重はどれだけか．部材ABの曲げ剛性をEI_1，部材CDの曲げ剛性をEI_2とする．

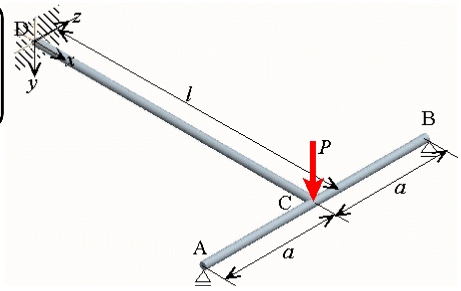


図12.20

解答　荷重Pのうち，部材ABが負担する横荷重をP_1とする．このとき，部材CDが負担する荷重は$P-P_1$であり，いずれも下向きである．

系全体のひずみエネルギはx_1軸をAからBに向かって，x_2軸をDからCに向かってそれぞれとると

$$U=\frac{1}{2EI_1}\int_0^a\left(\frac{P_1}{2}x_1\right)^2dx_1+\frac{1}{2EI_1}\int_a^{2a}\left[\frac{P_1}{2}x_1-P_1(x_1-a)\right]^2dx_1+\frac{1}{2EI_2}\int_0^l[(P-P_1)(l-x_2)]^2dx_2$$

P_1で微分してゼロにおくと，

$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=\frac{P_1a^3}{12EI_1}+\frac{P_1a^3}{12EI_1}-\frac{(P-P_1)l^3}{3EI_2}=0$$

以上から，

$$\left(\frac{a^3}{6EI_1}+\frac{l^3}{3EI_2}\right)P_1=\frac{Pl^3}{3EI_2}$$

これからP_1を求めることができる．■

解説：たわみの関係からの解法は以下のとおり．

部材ABの中点Cのたわみ量は$R_A=\dfrac{P_1}{2}$であるから$\dfrac{P_1a^3}{6EI_1}$，部材CDの点Cのたわみ量は$\dfrac{(P-P_1)l^3}{3EI_2}$である．これらが等しいことから，

$$\left(\frac{a^3}{6EI_1}+\frac{l^3}{3EI_2}\right)P_1=\frac{Pl^3}{3EI_2}$$

これからP_1を求めることができる．

発展例題12.18　図12.21の構造において，部材ABが負担する横荷重はどれだけか．部材ABの曲げ剛性をEI_1，部材CDの曲げ剛性をEI_2，バネ定数をkとする．

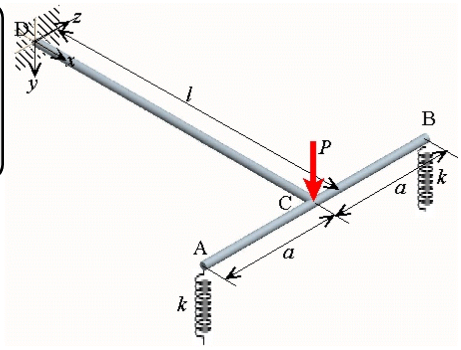


図12.21

解答　前の例題のひずみエネルギに加えてバネの弾性エネルギが加わる．弾性エネルギは

$$U_k = 2\times\frac{1}{2}kv_A^2$$

である．ここでv_Aは点Aのたわみ(垂直方向の移動量としたほうがわかりやすいが，系全体ではたわみ)である．

$R_A = \dfrac{P_1}{2} = kv_A$であるから，$v_A = \dfrac{P_1}{2k}$を用いてバネの弾性エネルギの式を書き直すと

$$U_k = \frac{P_1^2}{4k}$$

となる．この弾性エネルギを加えると，系のひずみエネルギは

$$U = \frac{1}{2EI_1}\int_0^a\left(\frac{P_1}{2}x_1\right)^2dx_1 + \frac{1}{2EI_1}\int_a^{2a}\left[\frac{P_1}{2}x_1 - P_1(x_1-a)\right]^2dx_1 + \frac{1}{2EI_2}\int_0^l[(P-P_1)(x_2-l)]^2dx_2 + \frac{P_1^2}{4k}$$

P_1で微分してゼロにおくと，

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{P_1a^3}{12EI_1} + \frac{P_1a^3}{12EI_1} - \frac{(P-P_1)l^3}{3EI_2} + \frac{P_1}{2k} = 0$$

以上から，

$$\left(\frac{a^3}{6EI_1} + \frac{l^3}{3EI_2} + \frac{1}{2k}\right)P_1 = \frac{Pl^3}{3EI_2}$$

これからP_1を求めることができる．■

発展例題12.19　図12.22の構造において，部材ABが負担する横荷重はどれだけか．部材ABの曲げ剛性をEI_1，部材CDの曲げ剛性をEI_2とする．

指針：この場合は$a \neq b$なので部材ABの点Cにおけるたわみ角はゼロではない．そのため，部材CDにはねじりモーメント(部材ABにとっては集中モーメント)が生じることを考慮する必要がある．

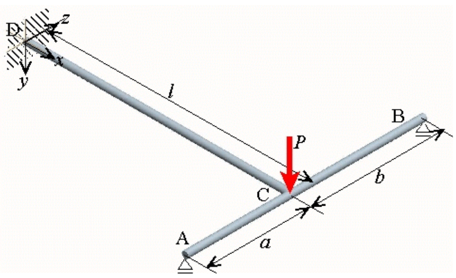


図12.22

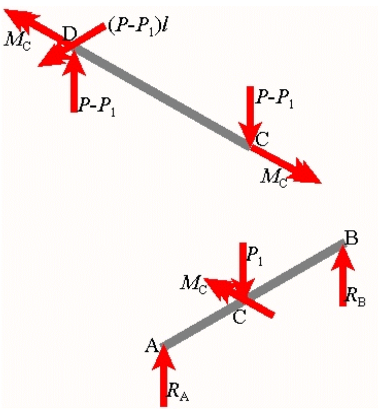


図12.23

解答　荷重Pのうち，部材ABが負担する横荷重をP_1とする．このとき，部材CDが負担する荷重は$P-P_1$であり，いずれも下向きである．部材DCの図のx軸まわりに作用するねじりモーメントを（CからDを見たときに）時計回りにM_Cとする．このM_Cは部材ABにとっては外力のモーメントになり，反時計回りのモーメントである．フリーボディダイヤグラムは図12.23のとおりである．

部材ABについて考えると，支点Aに生ずる反力は

$$R_A = \frac{bP_1 - M_C}{a+b}$$

であるから部材ABのひずみエネルギは

$$U_{AB}=\frac{1}{2EI_1}\int_0^a\left(\frac{bP_1-M_C}{a+b}\right)^2x_1^2dx_1+\frac{1}{2EI_1}\int_a^{a+b}\left[\frac{bP_1-M_C}{a+b}x_1-P_1(x_1-a)+M_C\right]^2dx_2$$

であり，部材CDのひずみエネルギは，ねじり剛性をGI_pで表すと

$$U_{CD}=\frac{1}{2EI_2}\int_0^l(P-P_1)^2(x_2-l)^2dx_2+\frac{1}{2GI_p}\int_0^lM_C^2dx_2$$

である．ここで不静定量はP_1とM_Cであるから，全ひずみエネルギ$U=U_{AB}+U_{CD}$をP_1とM_Cで微分してゼロにおいて整理すると次式が得られる．

$$\frac{\partial U}{\partial P_1}=0 \quad\rightarrow\quad -\frac{ab(a-b)}{3EI_1(a+b)}M_C+\left[\frac{a^2b^2}{3EI_1(a+b)}+\frac{l^3}{3EI_2}\right]P_1=\frac{l^3}{3EI_2}P$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_C}=0 \quad\rightarrow\quad \left[\frac{l}{GI_p}+\frac{a^2-ab+b^2}{3EI_1(a+b)}\right]M_C-\frac{ab(a-b)}{3EI_1(a+b)}P_1=0$$

この二つの式からP_1とM_Cを求めることができる．■

解説：前の例題で支点AとBのバネのバネ定数が異なる場合，すなわち，$k_A\neq k_B$の場合はどうなるだろうか．この場合，バネ定数が異なることによって支点AとBの移動量が異なることになる．そのため，部材ABは傾斜するのでこの例題のようにモーメントM_Cを追加する必要がある．M_Cを図8.54のようにおくと，支点AとBの反力は

$$R_A=k_Av_A=\frac{P_1}{2}-\frac{M_C}{2a},\quad R_B=\frac{P_1}{2}+\frac{M_C}{2a}$$

である．追加されるバネの弾性エネルギは $U_k=\frac{1}{2k_A}R_A^2+\frac{1}{2k_B}R_B^2=\frac{1}{8k_A}\left(P_1-\frac{M_C}{a}\right)^2+\frac{1}{8k_B}\left(P_1+\frac{M_C}{a}\right)^2$ となる．なお，U_{AB}とU_{CD}はこの例題の式で$a=b$とおけばよい．