第13章　チモシェンコはり要素についての疑問(20240126)

はりの有限要素解析において，主として，ベルヌーイ・オイラー(「オイラー・ベルヌーイ」ともいう)はり要素とチモシェンコはり要素が用いられる．前者についてはp.295以降に書いてあるので省略することにする．ここでは，チモシェンコはり要素にかかわるオジサンの素直な謎について述べる．ただし，この稿は正しいかどうか怪しいので，興味ある人はいろいろと調べてほしい．

チモシェンコはり要素は，ベルヌーイ・オイラーはり要素にせん断変形の影響を入れて定式化したものである．せん断変形自体は，たいていのはり要素に書かれているように，はりの高さが大きいか短いはりの場合に影響を及ぼす．以下では，チモシェンコはり要素を用いた定式化について追っかけてみよう．

せん断変形を考慮した要素

いま，節点 i と j を両端点にもつ要素 ij を考え，x，y 方向変位を $U_{ij}(x,y)$，$V_{ij}(x,y)$ で表すものとする．はりのたわみ関数を $v_{ij}(x)$，せん断変形に伴う横断面の角度変化を $\varphi_{zij}(x)$ で表すものとして，$U_{ij}(x,y)$，$V_{ij}(x,y)$ を

$$U_{ij}(x,y)=-y\left(\frac{dv_{ij}}{dx}+\varphi_{zij}\right),\quad V_{ij}(x,y)=v_{ij}(x)$$

で表す．このとき，ひずみは

$$\varepsilon_x=\frac{\partial U_{ij}}{\partial x}=-y\left(\frac{d^2v_{ij}}{dx^2}+\frac{d\varphi_{zij}}{dx}\right),\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial U_{ij}}{\partial y}+\frac{\partial V_{ij}}{\partial x}=-\varphi_{zij}$$

となり，応力は

$$\sigma_x=E\varepsilon_x,\quad \tau_{xy}=\kappa_y G\gamma_{xy}$$

となる．ここで，κ_y はせん断応力に関する「有効せん断係数」と呼ばれる．

いま，要素長さを L_{ij} で表すと，この要素のひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{L_{ij}}\left\{EI_z\left(\frac{d^2v_{ij}}{dx^2}+\frac{d\varphi_{zij}}{dx}\right)^2+GA_{sy}\varphi_{zij}^2\right\}dx$$

である．ここで，$A_{sy}=\kappa_y A$ であり，「せん断力に対する有効せん断面積」と呼ばれる．

たわみ関数 $v_{ij}(x)$ をエルミート三次補間関数を用いて近似し，$\varphi_{zij}(x)$ を

$$\varphi_{zij}(x)=\left(1-\frac{x}{L_{ij}}\right)\varphi_{zi}+\frac{x}{L_{ij}}\varphi_{zj}$$

のように線形近似してひずみエネルギを計算し，仮想仕事の原理を適用すると要素剛性方程式は次のようになる．

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_{ij} & 0 & -12 & 6L_{ij} & 0 \\ 6L_{ij} & 4L_{ij}^2 & L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & -L_{ij}^2 \\ 0 & L_{ij}^2 & L_{ij}^2+\frac{1}{3}\frac{GA_{sy}}{EI_z}L_{ij}^4 & 0 & -L_{ij}^2 & -L_{ij}^2+\frac{1}{3}\frac{GA_{sy}}{EI_z}L_{ij}^4 \\ -12 & -6L_{ij} & 0 & 12 & -6L_{ij} & 0 \\ 6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & -L_{ij}^2 & -6L_{ij} & 4L_{ij}^2 & L_{ij}^2 \\ 0 & -L_{ij}^2 & -L_{ij}^2+\frac{1}{3}\frac{GA_{sy}}{EI_z}L_{ij}^4 & 0 & L_{ij}^2 & L_{ij}^2+\frac{1}{3}\frac{GA_{sy}}{EI_z}L_{ij}^4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ \varphi_{zi} \\ v_j \\ \theta_j \\ \varphi_{zj} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{yi} \\ M_i \\ M_i* \\ P_{yj} \\ M_j \\ M_j* \end{pmatrix}$$

ここで，M_i* と M_j* は角度変化 φ_{zi} と φ_{zj} に対応する量であるから，仕事の概念から考えて，これらはモーメントでなければならない．

上の要素剛性方程式を使って片持ちはりのたわみと角度変化を求めてみよう．節点iを固定端とすると，$v_i=0$，$\theta_i=0$，$\varphi_{zi}=0$であり，$P_{yj}=P$，$M_j=0$，$M_j*=0$とおいて計算すると，

$$v_j=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\frac{EI_z}{GA_{sy}}\frac{1}{L_{ij}^2}\right)\frac{PL_{ij}^3}{EI_z},\quad \theta_j=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{EI_z}{GA_{sy}}\frac{1}{L_{ij}^2}\right)\frac{PL_{ij}^2}{EI_z},\quad \varphi_{zj}=-\frac{3}{2}\frac{EI_z}{GA_{sy}}\frac{1}{L_{ij}^2}\cdot\frac{PL_{ij}^2}{EI_z}$$

となる．自由端のたわみv_jはベルヌーイ･オイラーはりのたわみ$\frac{1}{3}\frac{PL_{ij}^3}{EI_z}$より大きくなっていてせん断変形の影響が表れているようだが，角度変化量はどうだろうか．もともと角度変化量は$U_{ij}(x,y)$の定義における$\frac{dv_{ij}}{dx}+\varphi_{zij}$である．この量を片持ちはりの自由端で評価すると$\theta_j+\varphi_{zj}$である．得られた解から$\theta_j+\varphi_{zj}$を計算すると，$\theta_j+\varphi_{zj}=\frac{1}{2}\frac{PL_{ij}^2}{EI_z}$となり，ベルヌーイ･オイラーはりの自由端のたわみ角$\frac{1}{2}\frac{PL_{ij}^2}{EI_z}$に等しいことになる．あれ？

第一の疑問：M_i*，M_j*は外力によってどのように表されるのか．M_i，M_jとの関係は？

第二の疑問：せん断変形における角度変化はこれでいいの？

さて，「$\theta_j+\varphi_{zj}=\frac{1}{2}\frac{PL_{ij}^2}{EI_z}=$ベルヌーイ･オイラーはりの自由端のたわみ角」という関係が得られた点につき，次のような考え方がある．つまり，固定端において，$\theta_i=0$，$\varphi_{zi}=0$としたことがそもそもの間違いで，$\theta_i+\varphi_{zi}=0$としなければならない．ゆえに，$U_{ij}(x,y)=-y\left(\frac{dv_{ij}}{dx}+\varphi_{zij}\right)$の定義において，$\psi_{zij}=\frac{dv_{ij}}{dx}+\varphi_{zij}$とおくべきである．このように考えると，$M_i*$，$M_j*$に関する第一の疑問は解消される．つまり，$M_i*$，$M_j*$を単独で評価する必要もなくなるのである．つまり，<u>第一の疑問は解消</u>．以下，引き続き定式化を進めてみよう．

いま，曲げモーメントMとせん断力Fとの間の関係

$$F=\frac{dM}{dx}$$

に着目する．ここで，

$$M=\iint y\sigma_x dA,\quad F=\iint \tau_{xy} dA$$

である．先に求めたひずみを使って曲げモーメントとせん断力を計算すると，

$$M=-EI_z\left[\left(-\frac{6}{L_{ij}^2}+\frac{12x}{L_{ij}^3}\right)v_i+\left(-\frac{4}{L_{ij}}+\frac{6x}{L_{ij}^2}\right)\theta_i-\frac{1}{L_{ij}}\varphi_{zi}+\left(\frac{6}{L_{ij}^2}-\frac{12x}{L_{ij}^3}\right)v_j+\left(-\frac{2}{L_{ij}}+\frac{6x}{L_{ij}^2}\right)\theta_j+\frac{1}{L_{ij}}\varphi_{zj}\right],$$

$$F=-GA_{sy}\left[\left(1-\frac{x}{L_{ij}}\right)\varphi_{zi}+\frac{x}{L_{ij}}\varphi_{zj}\right]$$

となり，$F=\frac{dM}{dx}$の関係から，

$$GA_{sy}\left[\left(1-\frac{x}{L_{ij}}\right)\varphi_{zi}+\frac{x}{L_{ij}}\varphi_{zj}\right]=\frac{12EI_z}{L_{ij}^3}\left(v_i+\frac{L_{ij}}{2}\theta_i-v_j+\frac{L_{ij}}{2}\theta_j\right)$$

となる. この式の右辺は定数で, 左辺はxの一次関数であることがわかる. あれ？この等式成り立つ？

第三の疑問: 上式が等式として成立するためには, 左辺のxの一次の項の係数がゼロ, つまり, $\varphi_{zi}=0$, $\varphi_{zj}=0$でなければならない. このとき, 左辺のxに無関係の項はφ_{zi}であるが, $\varphi_{zi}=0$であるから, 左辺はゼロ. ゆえに, 右辺もゼロでなければ等式は成立しないことになる. 右辺はゼロかしら. え？

第三の疑問を残したまま, とりあえず定式化を進めていくと, 最終的に得られる要素剛性方程式は次のようになる[1].

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3(1+\mu_y)}\begin{bmatrix}12 & 6L_{ij} & -12 & 6L_{ij}\\ 6L_{ij} & (4+\mu_y)L_{ij}^2 & -6L_{ij} & (2-\mu_y)L_{ij}^2\\ -12 & -6L_{ij} & 12 & -6L_{ij}\\ 6L_{ij} & (2-\mu_y)L_{ij}^2 & -6L_{ij} & (4+\mu_y)L_{ij}^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_i\\ \psi_{zi}\\ v_j\\ \psi_{zj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{yi}\\ M_i\\ P_{yj}\\ M_j\end{pmatrix}$$

ここで, $\psi_{zi}=\theta_i+\varphi_{zi}$, $\psi_{zj}=\theta_j+\varphi_{zj}$であり, $\mu_y=\dfrac{12EI_z}{GA_{sy}L_{ij}^2}$である.

上の要素剛性方程式を使って片持ちはりのたわみと角度変化を求めてみよう. 節点iを固定端として, $v_i=0$, $\psi_{zi}=0$とおき, $P_{yj}=P$, $M_j=0$とおいて計算すると,

$$v_j=\left(\frac{1}{3}+\frac{\mu_y}{12}\right)\frac{PL_{ij}^3}{EI_z},\quad \psi_{zj}=\theta_j+\varphi_{zj}=\frac{1}{2}\frac{PL_{ij}^2}{EI_z}$$

となる.

この答えで, $\psi_{zj}=\theta_j+\varphi_{zj}$はベルヌーイ・オイラーはりの自由端のたわみ角$\dfrac{1}{2}\dfrac{PL_{ij}^2}{EI_z}$に等しくなっている. φ_{zj}はせん断応力による角度変化であるから, もし, $\varphi_{zj}>0$なら$\theta_j=\psi_{zj}-\varphi_{zi}<\dfrac{PL_{ij}^2}{2EI_z}$になる. ありゃりゃ？これってなんか変じゃない？第二の疑問は残ったまま.

この原稿を読んでいる方は, 自分の手で式の展開をやってみてほしい. オジサンはしょっちゅうミスをするので, 信用されては困る. 普段から疑り深く, 注意深くなってほしい.

以下では, どこでおかしくなったのか考えてみよう. まず, せん断ひずみの考え方である. せん断応力ははりの横断面に平行に発生している応力なので, そもそも$\dfrac{dv}{dx}$のようなz軸回りの横断面の回転を伴う角度変化を起こさず, ただ横断面がずれるだけである. この材料力学演習のファイルで見るなら, 図1.14がせん断のイメージである. このイメージをはりの問題に適用するなら, せん断ひずみは, 要素両端のたわみの差を長さで割ったものでなければならない. つまり,

$$\gamma_{xy}=\frac{v_j-v_i}{L_{ij}}$$

である. この考え方が正しいかどうか, 別の定式化を参考に見ていくことにしよう.

[1]詳細な定式化の手順を書くと出典がわかってしまうかもしれないのでぼかしておきます.

弾性力学からの解

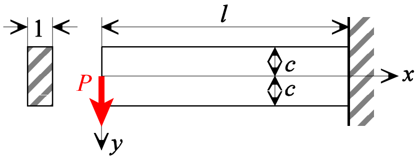

図1

Timoshenko,S.P. and Goodier,J.N., Theory of Elasticity[2] によれば，片持ちはりモデルとして，右図のように考えると，せん断変形を考慮した片持ちはりのx軸方向変位u_xとy方向変位u_yは，

$$u_x = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6IG} + \frac{Pl^2y}{2EI},$$

$$u_y = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} - \frac{Pc^2x}{2IG} - \frac{Pl^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{2EI} + \frac{Pc^2l}{2IG}$$

整理すると

$$u_x = -\frac{\nu P}{6EI}y^3 + \frac{P}{6IG}y^3 + \frac{P}{2EI}(l^2 - x^2)y,\quad u_y = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}(2l^3 - 3l^2x + x^3) + \frac{Pc^2}{2IG}(l - x)$$

となる．ここで，$2c$ではりの高さを表しており，はりの自由端は$x=0$である．

この式から，u_xの第3項はu_yの第2項に起因する項であり，また，u_yにおいてGを含む項はu_xに無関係であることがわかる．ひずみ成分を求めると，

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{P}{EI}xy,\quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\nu P}{EI}xy,\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{P}{2IG}(y^2 - c^2)$$

である．せん断ひずみはu_xの第2項とu_yの第3項が寄与する．

ベルヌーイ･オイラーはり要素においては，せん断ひずみを使わないので，u_xの式の第三項で$\frac{P}{2EI}(l^2 - x^2)$がたわみ関数の微係数であることから$U_{ij}(x,y) = -y\frac{dv_{ij}}{dx}$で表される．$u_x$の式の第一，第二項は$x$に無関係なのでチモシェンコはり要素の最初の$U_{ij}(x,y) = -y\left(\frac{dv_{ij}}{dx} + \varphi_{zij}\right)$における$\varphi_{zij}(x)$の置き方は不自然である，一方，第二の$V_{ij}(x,y) = v_{ij}(x)$において，$v_{ij}(x)$はベルヌーイ･オイラーはりのたわみ関数を前提としているが，上に挙げたu_yの式の第三項にせん断弾性係数を含むことから，$V_{ij}(x,y) = v_{ij}(x)$は$V_{ij}(x,y) = v_{ij}(x) + \varphi_{zij}(x)$とおかれるべきである．

後のために，上に挙げた弾性力学からの式を少し整理しておく．せん断変形を考慮した片持ちはりの自由端のたわみは，

$$v|_{x=0,y=0} = u_y|_{x=0,y=0} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pc^2l}{2IG}$$

で表される．$c = \frac{h}{2}$として，

$$v|_{x=0,y=0} = u_y|_{x=0,y=0} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Ph^2l}{8IG} = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Ph^2l}{4EI}(1+\nu) = \frac{Pl^3}{3EI}\left[1 + \frac{3}{4}(1+\nu)\frac{h^2}{l^2}\right]$$

である．自由端における角度変化量は

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0,y=0} = \left.\frac{du_y}{dx}\right|_{x=0,y=0} = -\left[\frac{Pl^2}{2EI_z} + (1+\nu)\frac{Ph^2}{4EI_z}\right]$$

である．

$v|_{x=0,y=0}$の第二項に注目して$\frac{v_{x=l,y=0} - v_{x=0,y=0}}{l}$を計算してみると，$v|_{x=l,y=0} = 0$であるから

[2]See pp.41-46.

$$\frac{v|_{x=l,y=0}-v|_{x=0,y=0}}{l}=-(1+\nu)\frac{Ph^2}{4EI_z}$$

となる．この量は $\left.\dfrac{dv}{dx}\right|_{x=0,y=0}$ の第二項と同じであることがわかるだろう．つまり，片持ちはりのいたるところ，せん断によって同じ量のずれが生じていることになる．

新定式化

上述の，弾性力学からの解を参考に，はりの横断面内のせん断ひずみを次のように仮定する．

$$\gamma_{xy}=\frac{v_j^*-v_i^*}{L_{ij}}f(y)$$

ここで，v_i^* と v_j^* はせん断によってのみ生ずる y 方向変位(たわみ関数ではない)である．また，$f(y)$ は無次元の関数であるが，特に定めない．ただし，$f(0)=1$ であるような関数であるとする．

せん断応力によるひずみエネルギを U_2 で表すと，

$$U_2=\frac{G}{2}\frac{(v_j^*-v_i^*)^2}{L_{ij}^2}\int_V f(y)^2dV=\frac{G}{2}\frac{(v_j^*-v_i^*)^2}{L_{ij}}\int_A f(y)^2dA$$

となる．ここで $A_1=\int_A f(y)^2dA$ (この量は，先の定式化で $A_{sy}=\kappa_y A$，つまり「せん断力に対する有効せん断面積」に相当する)と表すと，

$$U_2=\frac{1}{2}GA_1\frac{(v_j^*-v_i^*)^2}{L_{ij}}$$

変分をとると，

$$\delta U_2=(\delta v_j^*-\delta v_i^*)\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\left(\frac{GA_1}{EI_z}\right)L_{ij}^2(v_j^*-v_i^*)$$

となるから，仮想仕事の原理において，節点変位ベクトルとその変分を

$$(v)^T=\begin{pmatrix}v_i & \theta_i & v_i^* & v_j & \theta_j & v_j^*\end{pmatrix},\ (\delta v)^T=\begin{pmatrix}\delta v_i & \delta\theta_i & \delta v_i^* & \delta v_j & \delta\theta_j & \delta v_j^*\end{pmatrix}$$

と表すと，$k=\dfrac{GA_1}{EI_z}$ として，仮想内部仕事は

$$\delta U=(\delta v)^T\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\begin{bmatrix}12 & 6L_{ij} & 0 & -12 & 6L_{ij} & 0\\ & 4L_{ij}^2 & 0 & -6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & 0\\ & & kL_{ij}^2 & 0 & 0 & -kL_{ij}^2\\ & & & 12 & -6L_{ij} & 0\\ SYM & & & & 4L_{ij}^2 & 0\\ & & & & & kL_{ij}^2\end{bmatrix}(v)$$

となる．仮想外部仕事は

$$\delta W=\delta v_iF_i+\delta\theta_iM_i+\delta v_i^*F_i^*+\delta v_jF_j+\delta\theta_jM_j+\delta v_j^*F_j^*$$

ある．ここで，v_i^* と v_j^* に対応して F_i^* と F_j^* を導入している．

要素剛性方程式は

$$\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L_{ij} & 0 & -12 & 6L_{ij} & 0 \\ & 4L_{ij}^2 & 0 & -6L_{ij} & 2L_{ij}^2 & 0 \\ & & kL_{ij}^2 & 0 & 0 & -kL_{ij}^2 \\ & & & 12 & -6L_{ij} & 0 \\ SYM & & & & 4L_{ij}^2 & 0 \\ & & & & & kL_{ij}^2 \end{bmatrix}(v)=\begin{pmatrix} F_i \\ M_i \\ F_i^* \\ F_j \\ M_j \\ F_j^* \end{pmatrix}$$

と書ける.

図1の片持ちはりの場合, $F_i=P$, $M_i=0$, $F_i^*=P$, $v_j=0$, $\theta_j=0$, $v_j^*=0$となるので, 解くべき連立方程式は

$$\begin{bmatrix} 12 & 6L_{ij} & 0 \\ 6L_{ij} & 4L_{ij}^2 & 0 \\ 0 & 0 & kL_{ij}^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_i^* \end{pmatrix}=\frac{L_{ij}^3}{EI_z}\begin{pmatrix} P \\ 0 \\ P \end{pmatrix}$$

となり, これからv_i^*は

$$v_i^*=\frac{PL_{ij}^3}{EI_z}\frac{1}{kL_{ij}^2}=\left(\frac{EI_z}{GA_1}\frac{1}{L_{ij}^2}\right)\frac{PL_{ij}^3}{EI_z}=2(1+\nu)\left(\frac{I_z}{A_1}\frac{1}{L_{ij}^2}\right)\frac{PL_{ij}^3}{EI_z}$$

と得られる, さらに, $A_1=\frac{2}{3}bh$, $I_z=\frac{bh^3}{12}$とおいて, $E=2(1+\nu)G$を用いると

$$v_i^*=\frac{PL_{ij}^3}{3EI_z}\frac{3}{4}(1+\nu)\left(\frac{h}{L_{ij}}\right)^2$$

となる. $v_i=\frac{PL_{ij}^3}{3EI_z}$と計算できるので, 最終的に, 全体としてのはりの自由端のたわみは

$$v_i+v_i^*=\frac{PL_{ij}^3}{3EI_z}\left[1+\frac{3}{4}(1+\nu)\left(\frac{h}{L_{ij}}\right)^2\right]$$

となり, 弾性力学からの解に一致する.

自由端$x=0$でのたわみ角は$\theta_i=-\frac{PL_{ij}^2}{2EI_z}$と計算できるが, これに$\frac{v_j^*-v_i^*}{L_{ij}}=-\frac{PL_{ij}^2}{2EI_z}\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{h}{L_{ij}}\right)^2$を加えると, 全体としての自由端での角度変化が得られ,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0}+\frac{v_j^*-v_i^*}{L_{ij}}=-\frac{PL_{ij}^2}{2EI_z}\left[1+\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{h}{L_{ij}}\right)^2\right]$$

が得られる. 以上のことから, ここで述べた「**新定式化**」では弾性力学の解と矛盾しないことがわかる.

F_jとM_jは

$$F_j=\frac{EI_z}{L_{ij}^3}(-12v_i-6L_{ij}\theta_i)=-P,\ M_j=\frac{EI_z}{L_{ij}^3}(6L_{ij}v_j+2L_{ij}^2\theta_i)=PL_{ij},\ F_j^*=\frac{EI_z}{L_{ij}^3}\cdot kL_{ij}^2\cdot v_j^*=P$$

と計算できる.

ついでに, せん断変形がどの程度の影響を与えるか調べてみよう. 上に挙げた$v_i+v_i^*$の式の[ ]内を調べる. たとえば, L_{ij}=1 m. h=100 mmのかなり太短いはりの場合, $(h/L_{ij})^2=10^{-2}$なので, ざっくり1 %程度である. 一般のはりでは, $h \ll L_{ij}$なので, せん断変形の影響はごく小さい. このようなごく小さい影響が問題になるような系についての知識がない

のでわからないが，普通の構造物では問題になりそうもないような気がする．

とはいっても，せっかくがんばったので第6章の例題をひとつ．

基本例題6.29　図6.25のような両端が壁に固定されているはりの途中の点Cに荷重Pが作用している．A, Bでの反力と固定モーメントを求めよ．

指針　A, Bでの反力をR_A，R_B，固定モーメントをM_A，M_Bとして図6.26のようなフリーボディダイヤグラムで考える．

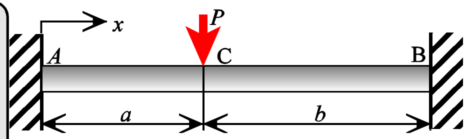

図2

解答　AC間とCB間の方程式は

$$\frac{EI_z}{a^3}\begin{bmatrix} 12 & 6a & 0 & -12 & 6a & 0 \\ & 4a^2 & 0 & -6a & 2a^2 & 0 \\ & & ka^2 & 0 & 0 & -ka^2 \\ & & & 12 & -6a & 0 \\ SYM & & & & 4a^2 & 0 \\ & & & & & ka^2 \end{bmatrix}(v_{AC})=\begin{pmatrix} F_A \\ M_A \\ F_A^* \\ F_C \\ M_C \\ F_C^* \end{pmatrix},\quad \frac{EI_z}{b^3}\begin{bmatrix} 12 & 6b & 0 & -12 & 6b & 0 \\ & 4b^2 & 0 & -6b & 2b^2 & 0 \\ & & kb^2 & 0 & 0 & -kb^2 \\ & & & 12 & -6b & 0 \\ SYM & & & & 4b^2 & 0 \\ & & & & & kb^2 \end{bmatrix}(v_{CB})=\begin{pmatrix} F_C \\ M_C \\ F_C^* \\ F_B \\ M_B \\ F_B^* \end{pmatrix}$$

である．ここで，$(v_{AC})^T=\begin{pmatrix} v_A & \theta_A & v_A^* & v_C & \theta_C & v_C^* \end{pmatrix}$，$(v_{CB})^T=\begin{pmatrix} v_C & \theta_C & v_C^* & v_B & \theta_B & v_B^* \end{pmatrix}$である．

両端での境界条件を考慮して上の二つの方程式を合成すると，

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{a^3}+\frac{12}{b^3} & -\frac{6}{a^2}+\frac{6}{b^2} & 0 \\ & \frac{4}{a}+\frac{4}{b} & 0 \\ SYM & & \frac{k}{a}+\frac{k}{b} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_C \\ \theta_C \\ v_C^* \end{pmatrix}=\frac{1}{EI_z}\begin{pmatrix} F_C \\ M_C \\ F_C^* \end{pmatrix}$$

となる．外力の条件は$F_C=P$，$M_C=0$，$F_C^*=P$であるから，

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{a^3}+\frac{12}{b^3} & -\frac{6}{a^2}+\frac{6}{b^2} & 0 \\ & \frac{4}{a}+\frac{4}{b} & 0 \\ SYM & & \frac{k}{a}+\frac{k}{b} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_C \\ \theta_C \\ v_C^* \end{pmatrix}=\frac{1}{EI_z}\begin{pmatrix} P \\ 0 \\ P \end{pmatrix}$$

この方程式を解くと

$$v_C=\frac{P}{3EI_z}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^3,\quad \theta_C=-\frac{P}{2EI_z}\frac{a^2b^2(a-b)}{(a+b)^3},\quad v_C^*=\frac{P}{kEI_z}\frac{ab}{a+b}$$

となり，荷重点Cでの最終的なたわみは

$$v_C+v_C^*=\frac{P}{3EI_z}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^3\left[1+\frac{3}{k}\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2\right]$$

となる．ここで，前に定義した通り$k=\dfrac{GA_1}{EI_z}$であり，上式の[ ]内の第二項，すなわち，v_C^*がせん断変形量である．

AC間の要素剛性方程式から支点反力と固定モーメントは

$$F_A=\frac{EI_z}{a^3}(-12v_C+6a\theta_C)=-\frac{(3a+b)b^2}{(a+b)^3}P,\ M_A=\frac{EI_z}{a^3}(-6av_C+2a^2\theta_C)=-\frac{ab^2}{(a+b)^2}P,\ F_A^*=\frac{EI_z}{a^3}(-ka^2)v_C^*=-\frac{b}{a+b}P$$

となる．$l=a+b$を使って書き直すと，

$$F_A=-\frac{(3a+b)b^2}{l^3}P,\ M_A=-\frac{ab^2}{l^2}P,\ F_A^*\equiv-\frac{b}{l}P$$

となり，第6章の**基本例題6.29**の答えと一致する．が，F_A^*が出てくる．これは何者なのだろうか．なお，F_AならびにF_A^*の符号がマイナスになっているのは下向き外力を正にしているため，上向きの力が負になっているためである．

このFF_A^*は第6章の**基本例題6.01**(also see 第4章の**基本例題4.16**)の両端回転支持(または，両端単純支持)はりの支点反力であることに気づくだろう．AC間の内力(せん断力)は$-F_A^*$で，この値はスパン方向に変化しないので，この力によるせん断応力は$-\frac{F_A^*}{A_1}$，せん断ひずみは$-\frac{F_A^*}{GA_1}$であるので，たわみ量は$-\frac{F_A^*}{GA_1}a$になる．F_A^*の値を代入すると$\frac{P}{GA_1}\frac{ab}{l}$になる．$F_B^*$の値は$F_B^*\equiv-\frac{a}{l}P$なので，これによるたわみ量も$\frac{P}{GA_1}\frac{ab}{l}$になっている．なんとなく矛盾していないような感じである．■

まとめにならないまとめ

ここでは，「チモシェンコはり要素」と呼ばれるはり要素に関する疑問についていろいろ考えてきた．機械系ではこの種の要素をあまり使っていないように思うが，たまたまこの要素を目にしたので定式化を追っかけてみただけである．ここで考えてきたことは100%正しいわけではないだろう．オジサンはそれなりの高齢者なので，高齢者独特の思い込みや考え違いなどあると思う．そう考えてこの雑文を読んでほしい．

上述したような新たな角度変化を導入する考え方は，Timoshenko,S.P. and Gere,J.M. によるTheory of Elastic Stabilityのpp.132-135の「2.17. The Effect of Shearing Force on the Critical Load」にある．もっとも，著者はこれ以外詳細な文献検索を行っていないので，興味ある読者は探してほしい．

座屈の問題は材料力学の中では特殊で，第7章で扱ったように変形後の状態を考えて式を立てる必要がある．そのため角度変化が生ずると考えてもよい．一方，材料力学や構造力学など線形問題として微小変形を扱う場合は通常，変形後の状態を考えないので，横断面がたわみ角変化に加えてせん断力あるいはせん断応力によって角度変化すると仮定すると矛盾が生じてくる．これが，上述の**第三の疑問**である．

微小変形の範囲内では，せん断によって生ずるのは横断面の「ずれ」であるので，材料力学のはりの問題でこのずれが入ってこないことに問題があるかもしれないが，はりは横断面の寸法に比べてスパンが十分長いためずれの影響はほとんどない．実際，上に述べた例題の前の「かなり太短いはり」の例からみても想像できるだろう．あえて「チモシェンコはり要素」に変わる(?)要素は上に述べた「**新定式化**」で，弾性力学の解と矛盾しない．

ついで

さて，$A_1=\frac{2}{3}bh$とした．A_1は有効せん断面積に対応すると書いた．つまり，長方形断面の場合の有効せん断面積は，断面積bhの$\frac{2}{3}$倍であるという．いま，$\bar{\tau}$で平均せん断応力を表すと，$\bar{\tau}=\frac{P}{A}$である．一方，長方形横断面内ではせん断応力は放物線状の分布をし，その最大値は$\tau_{max}=\frac{3}{2}\bar{\tau}$である(教科書，p.55，例題4.4参照)．いま，$\tau_{max}A_1=\bar{\tau}A$を考える

と，$A_1=\dfrac{\bar{\tau}}{\tau_{\max}}A=\dfrac{2}{3}A=\dfrac{2}{3}bh=\dfrac{2}{3}(2bc)$ということになる.

特に定めないと書いた関数$f(y)$をあえて定めると次のようである．$A_1=\int_A f(y)^2 dA=\dfrac{2}{3}(2bc)$から，$dA=b\,dy$であるので，

$$\frac{2}{3}(2bc)=b\int_{-c}^{c} f^2(y)dy$$

この関係を満たす$f^2(y)$の候補は，たとえば，

$$f^2(y)=1-\left(\frac{y}{c}\right)^2=1-\left(2\frac{y}{h}\right)^2$$

つまり，

$$f(y)=\sqrt{1-\left(\frac{y}{c}\right)^2}=\sqrt{1-\left(2\frac{y}{h}\right)^2}$$

となる. この関数は，この「**新定式化**」の最初の式で導入した「せん断力に対する有効せん断面積」に相当する面積を導くための調整のための関数であるので，今のところ物理的意味は考えないことにする. 他の断面形状においても特に定める必要もないだろう. しかし，教科書，p.55，例題4.4の解答に書いた[ ]内の関数にちょっと似ている.