カスティリアノの定理における仮想荷重の考え方

本ではさらりと流したが，少し説明を加えてみることにする．N個の一般化力がはたらいている系のひずみエネルギをUとする．I番目の一般化力P_Iの作用点の一般化変位λ_Iは影響係数を用いて

$$\lambda_I = \frac{\partial U}{\partial P_I} = \sum_{j=1}^{N} \bar{\lambda}_{Ij} P_j$$

と書けることは了解していると思う．この式でI番目の一般化力P_Iをゼロにしてもλ_Iが消えるわけではないことはすぐにわかる．

ひずみエネルギをP_Iで偏微分した時点で系にはたらいているすべての一般化力P_jのλ_Iへの寄与を表す影響係数$\bar{\lambda}_{Ij}$がすべて得られていることになる．ここで

$$\lambda_I = \frac{\partial U}{\partial P_I} = \sum_{j=1}^{N} \bar{\lambda}_{Ij} P_j$$

のP_Iをゼロにしたとしても影響係数$\bar{\lambda}_{Ij}$はゼロにはならないので，P_Iを除く$N-1$個の一般化力による変位を計算することができる．

逆に，λ_Iを除くすべての一般化変位

$$\lambda_{i(i \neq I)} = \frac{\partial U}{\partial P_{i(i \neq I)}} = \sum_{j=1}^{N} \bar{\lambda}_{ij} P_j$$

においてP_Iをゼロにすると，$\lambda_{i(i \neq I)}$の式中のP_Iに関する項$\bar{\lambda}_{iI} P_I$がゼロになるのでP_Iが元々はたらいていないことと同じになる．

以上のことを確認してみよう．本の例題で確認できるように例題9.9を少し単純化する．例題9.9で$L_1 = L_2 = l/2$，$EI_{z1} = EI_{z2} = EI_z$としてXをaに置き換えると例題9.9の式 (A), (B) は

$$v_{D \in AB} = \frac{a^3}{3EI_z} Q + \frac{(3l-a)a^2}{6EI_z} P$$

$$v_C = \frac{(3l-a)a^2}{6EI_z} Q + \frac{a^3}{3EI_z} P$$

となる．ここで$P=0$とおくと$v_{D \in AB}$の式はp.73からの**例題6.1**のv_Bの式に一致し，v_Cの式は同じ例題のv_{BC}の式で$x=l$とおいた式に一致する．前者はQの作用点でのたわみに対するPの影響がなくなったことになり，Pが元々はたらいていないことと同じである，後者は仮想荷重Pの作用点(元々横荷重がはたらいていない点)でたわみに対してQの寄与が残ることになる．