

相反定理のきちんとした説明

ある外力 P_i のなした仕事は、その外力の作用点の作用方向の変位を λ_i とすると、式(9.1)から $P_i \lambda_i / 2$ で求めることができるが、 n 個の外力のなした仕事は一つ一つの外力のなした仕事の総和として求めることができるので

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j \quad (2)$$

で表すことができる。いま、 $P_i \rightarrow P_i + dP_i$ となったとき、 $\lambda_i \rightarrow \lambda_i + d\lambda_i$ となったとすると、仕事の変化分は図9.2を参照すると $P_i d\lambda_i$ であるが、 n 個の外力の変化分は

$$dW = \sum_{j=1}^n \lambda_j dP_j = \sum_{j=1}^n P_j d\lambda_j \quad (3)$$

である。式(1)の全微分

$$d\lambda_j = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_{ji} dP_i \quad (4)$$

を式(3)に代入すると

$$dW = \sum_{j=1}^n P_j \left(\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_{ji} dP_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{ji} P_j \right) dP_i \quad (5)$$

となる。一方、 $W=U$ であるのでひずみエネルギーの増加分 dU は

$$dU = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i dP_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_{ij} P_j \right) dP_i \quad (6)$$

である。仕事の変化分とひずみエネルギーの変化分が等しいので、式(5)と(6)が等しくなければならない。ゆえに

$$\bar{\lambda}_{ji} = \bar{\lambda}_{ij}$$

が得られる。