

例題9.9の式(A)を P で偏微分し、式(B)を Q で偏微分すると、

$$\frac{\partial v_{D \in AB}}{\partial P} = \frac{X^2}{6EI_{z1}} [3(L_1 + L_2) - X] = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{\partial U}{\partial Q} \right]$$

$$\frac{\partial v_C}{\partial Q} = \frac{X^2}{6EI_{z1}} [3(L_1 + L_2) - X] = \frac{\partial}{\partial Q} \left[\frac{\partial U}{\partial P} \right]$$

となり、等しいことがわかる。前者は P の $v_{D \in AB}$ への寄与を、後者は Q の v_C への寄与を、それぞれ、表しており、これらが等しいと言っている。このような、ひずみエネルギーの荷重に関する二階微係数を**影響係数(influence coefficient)**と呼んでいる。

一般に、線形系において、 n 個の一般化力 P_i ($i=1,2,\dots,n$)が作用するとき j 番目の力の作用点におけるその力の作用方向の一般化変位 λ_j はすべての一般化力の影響を受けるので、

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_{ji} P_i \quad (1)$$

と書くことができる。ここで、 $\bar{\lambda}_{ji}$ は i 番目の単位一般化力が j 番目の力の作用点の一般化変位に及ぼす影響を表す影響係数である。例題9.9の式(A)

$$v_{D \in AB} = \frac{1}{EI_{z1}} \left[\frac{X^2}{6} [3(L_1 + L_2) - X] P + \frac{1}{3} X^3 Q \right]$$

の

$$\frac{X^2}{6EI_{z1}} [3(L_1 + L_2) - X], \frac{X^3}{3EI_{z1}}$$

が影響係数となる。影響係数は一般化力を含んでいないことに注意しておこう。

さて、影響係数の間に成り立つ関係式として**相反定理(reciprocal theorem)**というのがある。この定理について説明しておこう。一言で書いてしまうと相反定理は、上に述べた影響係数の間に

$$\bar{\lambda}_{ji} = \bar{\lambda}_{ij}$$

という関係式が成立するということである。言葉で表現すると、「 i 番目の単位一般化力の j 番目の一般化力の作用点の一般化変位に対する影響係数 $\bar{\lambda}_{ji}$ は j 番目の単位一般化力の i 番目の一般化力の作用点の一般化変位に対する影響係数 $\bar{\lambda}_{ij}$ に等しい。」となる。この定理を**Betti-Rayleighの相反定理(Betti-Rayleigh reciprocal relation)**という¹。

まずは、例題9.10で確認してみよう。

¹変位の影響係数の対称性を**Maxwellの相反関係(Maxwell's reciprocal relation)**という。Betti-Rayleighの相反定理はMaxwellの相反関係を一般化力と一般化変位との間の関係に一般化したものと考えられる。