例題11.4　図1(A)のような構造を構成する縦部材の座屈荷重を決める式を求めなさい．ただし，縦部材の曲げ剛性をEI_z，横部材の曲げ剛性を$(EI_z)_1$とする．

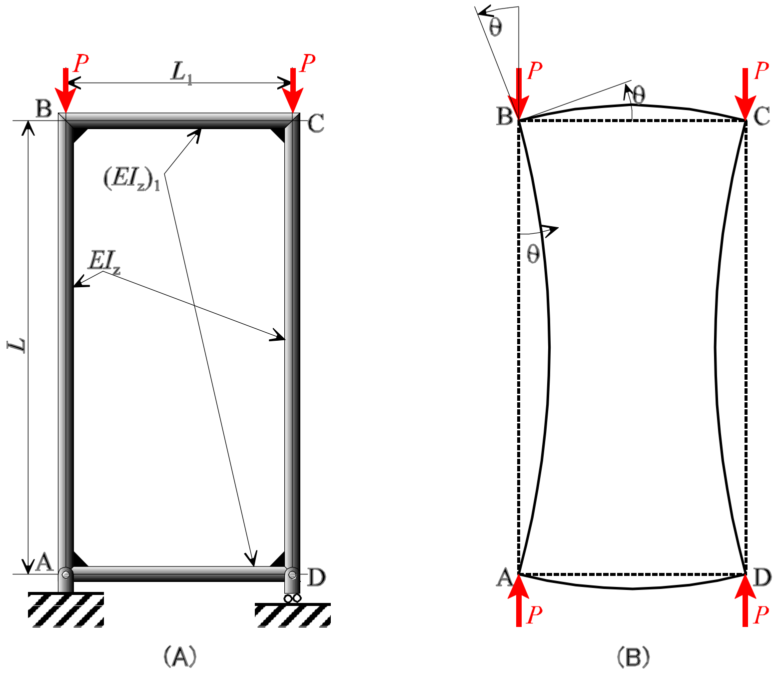

図1

解　最も簡単な座屈時の形状は図1(B)のように考えられる．

まず，縦部材ABについて考える．縦部材は図2のような外力(赤)と内力(青)の関係になる．ここで，M_0は横部材存在することによって縦部材の両端にはたらく外力のモーメントである．曲げモーメントをM_{AB}で表すと，モーメントのつりあい$M_{AB}-Pv-M_0=0$から

$$M_{AB}=Pv+M_0$$

である．したがって，たわみの基礎方程式は

$$\frac{d^2v}{dx^2}=-\frac{M_{AB}}{EI_z}=-\frac{1}{EI_z}(Pv+M_0)$$

となり，たわみ曲線の式は$\lambda^2=P/(EI_z)$として

$$v=a\cos\lambda x+b\sin\lambda x-\frac{M_0}{P}$$

である．係数aとbは$x=0$と$x=L$で$v=0$でなければならないことから

$$a=\frac{M_0}{P},\quad b=\frac{M_0}{P}\frac{1-\cos\lambda L}{\sin\lambda L}$$

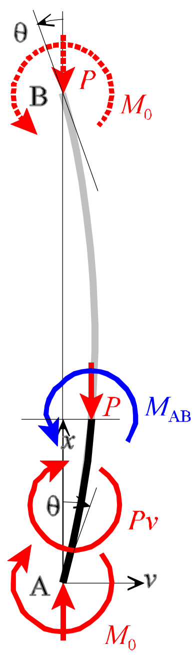

図2

が得られ，これらを代入するとたわみ曲線の式は次式のようになる．

$$v=\frac{M_0}{P}\left(\cos\lambda x+\frac{1-\cos\lambda L}{\sin\lambda L}\sin\lambda x-1\right)$$

端点Bでのたわみ角はたわみ曲線をxで微分して$x=L$とすれば次式のように表される．

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=L}=\frac{M_0}{P}\lambda\left(-\sin\lambda L+\frac{1-\cos\lambda L}{\sin\lambda L}\cos\lambda L\right)=\theta \qquad \text{(A)}$$

横部材BCの曲げモーメントをM_{BC}で表すと，図3[1]を参照してモーメントのつりあい $-M_0+M_{BC}=0$から

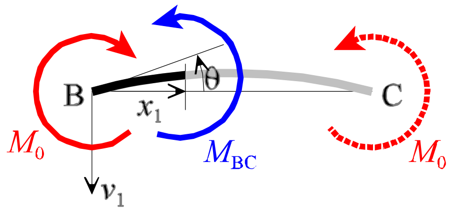

図3

$$M_{BC}=M_0$$

である．たわみの基礎方程式

$$\frac{d^2v_1}{dx_1^2}=-\frac{M_0}{(EI_z)_1}$$

から，たわみ角の式とたわみ関数は

$$\frac{dv_1}{dx_1}=-\frac{M_0}{(EI_z)_1}x_1+\theta_B$$

$$v_1=-\frac{M_0}{2(EI_z)_1}x_1^2+\theta_B x_1+v_B$$

となる．θ_Bとv_Bは$x_1=0$と$x_1=L_1$で$v_1=0$[2]でなければならないことから

$$v_B=0,\ \theta_B=\frac{M_0}{2(EI_z)_1}L_1 \qquad \text{(B)}$$

となる．式(A)のθと式(B)のθ_Bは等しくなければならないので

$$\frac{M_0}{P}\lambda\left(-\sin\lambda L+\frac{1-\cos\lambda L}{\sin\lambda L}\cos\lambda L\right)=\frac{M_0}{2(EI_z)_1}L_1$$

両辺に$\dfrac{P}{M_0}\dfrac{\sin\lambda L}{\lambda}$を乗じ，$P=\lambda^2 EI_z$を代入すると

$$-\sin^2\lambda L+(1-\cos\lambda L)\cos\lambda L=\frac{1}{2}\frac{EI_z}{(EI_z)_1}\lambda L_1\sin\lambda L$$

---

[1]図2の点BにはたらくモーメントM_0とこの図の点BにはたらくモーメントM_0の向きが逆になっていることに注意．

[2]$x_1=L_1/2$で$dv_1/dx_1=0$の条件を使ってもよい．

となり，p.143にあげた三角関数の公式を用いると

$$-\tan\left(\frac{1}{2}\lambda L\right)=\frac{EI_z}{(EI_z)_1}\left(\frac{1}{2}\lambda L_1\right) \quad \text{(C)}$$

となる．式(C)が満足されるようにλが計算されると，$P=\lambda^2 EI_z$から縦部材の座屈荷重を求めることができる．

別解　ここでは部材ABとADの関係を用いる．まず，縦部材ABのたわみ曲線の式は$\lambda^2=P/(EI_z)$として

$$v=a\cos\lambda x+b\sin\lambda x-\frac{M_0}{P}$$

である．係数aとbを$x=0$で$v=0$でなければならないこととたわみ関数の対称性から$x=L/2$で$dv/dx=0$でなければならないことを利用するして決める．最初の条件から

$$a=\frac{M_0}{P}$$

が得られる．二番目の条件を使うためにxで微分すると

$$\frac{dv}{dx}=-\lambda\frac{M_0}{P}\sin\lambda x+\lambda b\cos\lambda x$$

であるから，この式に$x=L/2$を代入して$dv/dx=0$とすると

$$b=\frac{M_0}{P}\tan\left(\frac{1}{2}\lambda L\right)$$

となる．得られた係数aとbを用いるとたわみ曲線の式は次式のようになる．

$$v=\frac{M_0}{P}\left[\cos\lambda x+\tan\left(\frac{1}{2}\lambda L\right)\sin\lambda x-1\right]$$

$x=0$でのたわみ角は

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0}=\frac{M_0}{P}\lambda\tan\left(\frac{1}{2}\lambda L\right)=\theta \quad \text{(D)}$$

である．

横部材ADの曲げモーメントをM_{AD}で表すと，図4を参照してモーメントのつりあい$M_0+M_{AD}=0$から

$$M_{AD}=-M_0$$

である．たわみの基礎方程式

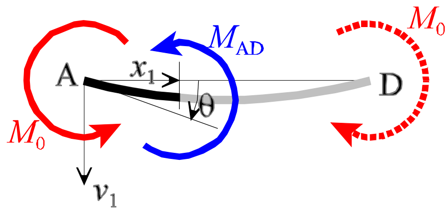

図4

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = \frac{M_0}{(EI_z)_1}$$

から，たわみ角の式とたわみ関数は

$$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{M_0}{(EI_z)_1} x_1 + \theta_A$$

$$v_1 = \frac{M_0}{2(EI_z)_1} x_1^2 + \theta_A x_1 + v_A$$

となる．θ_Aとv_Aは$x_1=0$と$x_1=L_1$で$v_1=0$でなければならないことから

$$v_A = 0,\ \theta_A = -\frac{M_0}{2(EI_z)_1} L_1 \quad \text{(E)}$$

式(D)のθと式(E)のθ_Aは等しくなければならないので

$$\frac{M_0}{P} \lambda \tan\left(\frac{1}{2}\lambda L\right) = -\frac{M_0}{2(EI_z)_1} L_1$$

両辺にP/M_0を乗じ，$P = \lambda^2 EI_z$を代入すると

$$\tan\left(\frac{1}{2}\lambda L\right) = -\frac{EI_z}{(EI_z)_1}\left(\frac{1}{2}\lambda L_1\right) \quad \text{(F)}$$

となる．この式は式(C)と同じ式である．■