例題9.10 例題9.8の片持ちはりで，自由端の集中荷重の点Dのたわみ角に対する影響係数と，点Dの集中モーメントの自由端でのたわみに対する影響係数をそれぞれ求め，これらが等しいことを示せ．

解 自由端に作用する集中荷重Pの点$D\in AB$のたわみ角に対する影響係数は，例題9.8の式(C)をPで偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial P}\theta_{D\in AB}=\frac{X}{2EI_{z1}}\left[2(L_1+L_2)-X\right]$$

である．一方，点$D\in AB$に集中モーメントが作用したときの自由端のたわみは例題9.8のPを仮想荷重と考えてたわみを求めると

$$v_C=\left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{P\to 0}=\frac{M_0}{EI_{z1}}\int_0^X-[x-(L_1+L_2)]dx=-\frac{M_0}{2EI_{z1}}[x-(L_1+L_2)]^2\Big|_0^X=\frac{M_0X}{2EI_{z1}}\left[2(L_1+L_2)-X\right]$$

これをM_0で偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial M_0}v_C=\frac{X}{2EI_{z1}}\left[2(L_1+L_2)-X\right]$$

ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial P}\theta_{D\in AB}=\frac{\partial}{\partial M_0}v_C$$

となり，一般化力と一般化変位との間にもMaxwellの相反関係がなりたつ．すなわち，Betti-Rayleighの相反定理を確認することができた.