例題9.9　例題9.8においてQがAB間にあるときのQの作用点Dと自由端Cでのたわみを求めよ．ただし，Qは仮想荷重ではない．

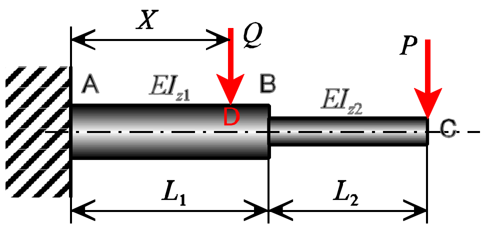

図1

解　図1のような系において．QがAB間にあるとき，Qが作用する点をDとし固定支点からXの距離にあるものとすると，曲げモーメントの式は例題9.8から

$$M_{AD}(x<X)=-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x$$

$$M_{DB}(X<x<L_1)=-P(L_1+L_2)+Px$$

$$M_{BC}(L_1<x)=-P(L_1+L_2)+Px$$

なので全ひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2}\int_0^X\frac{M_{AD}^2}{EI_{z1}}dx+\frac{1}{2}\int_X^{L_1}\frac{M_{DB}^2}{EI_{z1}}dx+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_1+L_2}\frac{M_{BC}^2}{EI_{z2}}dx$$

である．ひずみエネルギUは明らかにPとQの関数なので以下では常微分の代わりに偏微分を使うことにすると，荷重点$D\in AB$のたわみは，カスティリアノの定理から

$$v_{D\in AB}=\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^X M_{AD}\frac{\partial M_{AD}}{\partial Q}dx+\frac{1}{EI_{z1}}\int_X^{L_1}M_{DB}\frac{\partial M_{DB}}{\partial Q}dx+\frac{1}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{L_1+L_2}M_{BC}\frac{\partial M_{BC}}{\partial Q}dx$$

で求めることができ，ここで，

$$\frac{\partial M_{AD}}{\partial Q}=-X+x,\quad \frac{\partial M_{DB}}{\partial Q}=0,\quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial Q}=0$$

であるので，

$$v_{D\in AB}=\frac{\partial U}{\partial Q}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^X\left[-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x\right](-X+x)dx$$

Qが仮想荷重ではない(ゼロではない)とすると，

$$v_{D\in AB}=\frac{1}{EI_{z1}}\left[\frac{X^2}{6}[3(L_1+L_2)-X]P+\frac{1}{3}X^3Q\right]\qquad\text{(A)}$$

となる．PとQが作用した状態での点Cでたわみは，カスティリアノの定理から

$$v_C=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^X M_{AD}\frac{\partial M_{AD}}{\partial P}dx+\frac{1}{EI_{z1}}\int_X^{L_1}M_{DB}\frac{\partial M_{DB}}{\partial P}dx+\frac{1}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{L_1+L_2}M_{BC}\frac{\partial M_{BC}}{\partial P}dx$$

で求めることができ，

$$\frac{\partial M_{AD}}{\partial P}=\frac{\partial M_{DB}}{\partial P}=\frac{\partial M_{BC}}{\partial P}=-(L_1+L_2)+x$$

であるので，v_Cは

$$v_C=\frac{P}{EI_{z1}}\int_0^{L_1}[x-(L_1+L_2)]^2dx+\frac{P}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{L_1+L_2}[x-(L_1+L_2)]^2dx+\frac{Q}{EI_{z1}}\int_0^{X}[x-(L_1+L_2)](x-X)dx$$

と書き直すことができる．最初の二つの積分は例題9.7から，最後の積分は例題9.8から

$$\int_0^{L_1}[x-(L_1+L_2)]^2dx=\frac{1}{3}\Big[[x-(L_1+L_2)]^3\Big]_0^{L_1}=\frac{1}{3}(L_1+L_2)^3-\frac{1}{3}L_2^3$$

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2}[x-(L_1+L_2)]^2dx=\frac{1}{3}\Big[[x-(L_1+L_2)]^3\Big]_{L_1}^{L_1+L_2}=\frac{1}{3}L_2^3$$

$$\int_0^{X}\Big[x-(L_1+L_2)\Big](x-X)dx=\frac{X^2}{6}\Big[3(L_1+L_2)-X\Big]$$

なので，

$$v_C=\frac{P}{3EI_{z1}}\Big[(L_1+L_2)^3-L_2^3\Big]+\frac{PL_2^3}{3EI_{z2}}+\frac{Q}{6EI_{z1}}\Big[3(L_1+L_2)-X\Big]X^2 \qquad \text{(B)}$$

となる．