例題9.7　図6.27のはりの荷重点Cのたわみを求めよ.

解　まず曲げモーメントの式を求める. 片持ちはりであるので, 固定支点Aでは上向きの反力Pと大きさが$P(L_1+L_2)$の反時計回りの反モーメントを考慮しなければならない. 固定支点から右向きにx軸をとると, 曲げモーメントの式は

$$M=-P(L_1+L_2)+Px$$

である. このはりのひずみエネルギUは, 途中で断面二次モーメントが変わるので二つに分けて

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\frac{M^2}{EI_{z1}}dx+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_1+L_2}\frac{M^2}{EI_{z2}}dx$$

から求めることができる. いま求めたいのは荷重点Cのたわみであるので, カスティリアノの定理から

$$v_C=\frac{dU}{dP}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^{L_1}M\frac{dM}{dP}dx+\frac{1}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{L_1+L_2}M\frac{dM}{dP}dx$$

で求められる. ここで,

$$\frac{dM}{dP}=x-(L_1+L_2)$$

であるから,

$$v_C=\frac{P}{EI_{z1}}\int_0^{L_1}[x-(L_1+L_2)]^2dx+\frac{P}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{L_1+L_2}[x-(L_1+L_2)]^2dx$$

この式で第一および第二の積分は, それぞれ,

$$\int_0^{L_1}[x-(L_1+L_2)]^2dx=\frac{1}{3}\Big[[x-(L_1+L_2)]^3\Big]_0^{L_1}=\frac{1}{3}(L_1+L_2)^3-\frac{1}{3}L_2^3$$

$$\int_{L_1}^{L_1+L_2}[x-(L_1+L_2)]^2dx=\frac{1}{3}\Big[[x-(L_1+L_2)]^3\Big]_{L_1}^{L_1+L_2}=\frac{1}{3}L_2^3$$

と計算できるから, 結局v_Cは

$$v_C=\frac{P}{3EI_{z1}}\Big[(L_1+L_2)^3-L_2^3\Big]+\frac{P}{3EI_{z2}}L_2^3 \qquad \text{(A)}$$

となる. さて, この式を確認してみよう. いま, 問題6.2の解答のv_{BC}の式で$x=L_1+L_2$を代入すると,

$$v_C=\frac{PL_1^2}{6EI_{z1}}(2L_1+3L_2)+\frac{PL_1}{2EI_{z1}}(L_1+2L_2)L_2+\frac{PL_2^3}{3EI_{z2}}$$

となり, この式を整理すると

$$v_C=\frac{PL_1}{6EI_{z1}}\Big[2L_1^2+3L_1L_2+3L_1L_2+6L_2^2\Big]+\frac{PL_2^3}{3EI_{z2}}=\frac{PL_1}{3EI_{z1}}\Big[L_1^2+3L_1L_2+3L_2^2\Big]+\frac{PL_2^3}{3EI_{z2}}$$

が得られ, (A)と同じであることがわかる.

例題9.8　図6.27のはりのたわみ角の式とたわみ関数を求めよ.

解　まず，たわみ関数から求める．たわみ関数を求めるためには，任意のxの位置に仮想荷重を作用させる必要がある．仮想荷重をQで表す．はりはBで断面二次モーメントが変わるので，QがAB間にあるときとBC間にあるときの二つに分けて考える．図1のようにQがAB間にあるとき，Qが作用する点をDとし固定支点からXの距離にあるものとすると，曲げモーメントの式は

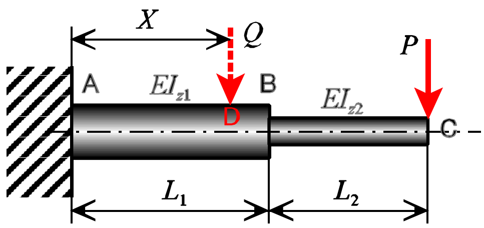

図1

$$M_{AD}(x<X)=-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x$$

$$M_{DB}(X<x<L_1)=-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x-Q(x-X)=-P(L_1+L_2)+Px$$

$$M_{BC}(L_1<x)=-P(L_1+L_2)+Px$$

と書くことができる．全ひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2}\int_0^X\frac{M_{AD}^2}{EI_{z1}}dx+\frac{1}{2}\int_X^{L_1}\frac{M_{DB}^2}{EI_{z1}}dx+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_1+L_2}\frac{M_{BC}^2}{EI_{z2}}dx$$

である．いま求めたいのは荷重点$D\in AB$のたわみであるので，カスティリアノの定理から

$$v_{D\in AB}=\frac{dU}{dQ}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^X M_{AD}\frac{dM_{AD}}{dQ}dx+\frac{1}{EI_{z1}}\int_X^{L_1}M_{DB}\frac{dM_{DB}}{dQ}dx+\frac{1}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{L_1+L_2}M_{BC}\frac{dM_{BC}}{dQ}dx$$

で求めることができる．ここで，

$$\frac{dM_{AD}}{dQ}=-X+x,\qquad \frac{dM_{DB}}{dQ}=0,\qquad \frac{dM_{BC}}{dQ}=0$$

であるので，

$$v_{D\in AB}=\frac{dU}{dQ}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^X\left[-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x\right](-X+x)dx$$

となる．一方，Qは仮想荷重であることからこれをゼロに置くと

$$v_{D\in AB}=\left.\frac{dU}{dQ}\right|_{Q\to 0}=\frac{P}{EI_{z1}}\int_0^X\left[-(L_1+L_2)+x\right](-X+x)dx=\frac{PX^2}{6EI_{z1}}\left[3(L_1+L_2)-X\right] \qquad \text{(A)}$$

となる．この式でXはAB間の任意点である．

図2のようにQがBC間にあるとき，曲げモーメントの式は

$$M_{AB}(x<L_1)=-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x$$

$$M_{BD}(L_1<x<X)=-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x$$

$$M_{DC}(X<x<L_1+L_2)=-P(L_1+L_2)+Px$$

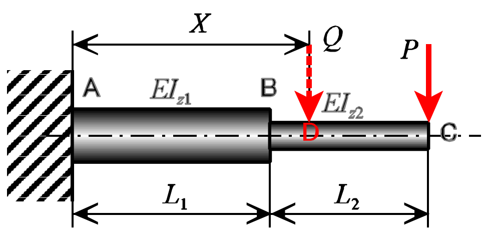

図2

全ひずみエネルギは

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\frac{M_{AB}^2}{EI_{z1}}dx+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{X}\frac{M_{BD}^2}{EI_{z1}}dx+\frac{1}{2}\int_{X}^{L_1+L_2}\frac{M_{DC}^2}{EI_{z2}}dx$$

である. カスティリアノの定理から

$$v_{D\in BC}=\frac{dU}{dQ}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^{L_1}M_{AB}\frac{dM_{AB}}{dQ}dx+\frac{1}{EI_{z1}}\int_{L_1}^{X}M_{BD}\frac{dM_{BD}}{dQ}dx+\frac{1}{EI_{z2}}\int_{X}^{L_1+L_2}M_{DC}\frac{dM_{DC}}{dQ}dx$$

で求めることができる. ここで,

$$\frac{dM_{AB}}{dQ}=-X+x,\quad \frac{dM_{BD}}{dQ}=-X+x,\quad \frac{dM_{DC}}{dQ}=0$$

であるので,

$$v_{D\in BC}=\frac{dU}{dQ}=\frac{1}{EI_{z1}}\int_0^{L_1}\left[-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x\right](-X+x)dx$$
$$+\frac{1}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{X}\left[-P(L_1+L_2)-QX+(P+Q)x\right](-X+x)dx$$

一方, Qは仮想荷重であることからこれをゼロに置くと

$$v_{D\in BC}=\left.\frac{dU}{dQ}\right|_{Q\to 0}=\frac{P}{EI_{z1}}\int_0^{L_1}\left[-(L_1+L_2)+x\right](-X+x)dx+\frac{P}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{X}\left[-(L_1+L_2)+x\right](-X+x)dx$$

となり, 積分は

$$\int_0^{L_1}\left[-(L_1+L_2)+x\right](-X+x)dx=\frac{1}{6}\left[-L_1^3-3L_1^2L_2+3L_1^2X+6L_1L_2X\right]$$

$$\int_{L_1}^{X}\left[-(L_1+L_2)+x\right](-X+x)dx=\frac{1}{2}L_2(X-L_1)^2-\frac{1}{6}(X-L_1)^3$$

であるから, これらを代入して整理すると

$$v_{D\in BC}=\frac{PL_1^2}{6EI_{z1}}(2L_1+3L_2)+\frac{PL_1}{2EI_{z1}}(L_1+2L_2)(X-L_1)+\frac{P}{6EI_{z2}}\left[3L_2(X-L_1)^2-(X-L_1)^3\right] \qquad \text{(B)}$$

となる. この式でXはBC間の任意点である.

たわみ角の式は式(A)と(B)をXで微分すればよいので

$$\theta_{D\in AB}=\frac{PX}{2EI_{z1}}\left[2(L_1+L_2)-X\right] \qquad \text{(C)}$$

$$\theta_{D\in BC}=\frac{PL_1}{2EI_{z1}}(L_1+2L_2)+\frac{P}{2EI_{z2}}\left[2L_2(X-L_1)-(X-L_1)^2\right] \qquad \text{(D)}$$

であるが, ここでは仮想モーメントM_0を加えてたわみ角の式を求める. M_0がAB間にあるときと

BC間にあるときの二つに分けて考える．M_0がAB間にあるとき(図3)，M_0が作用する点をDとし固定支点からXの距離にあるものとし，M_0は時計回りであるものとすると，曲げモーメントの式は

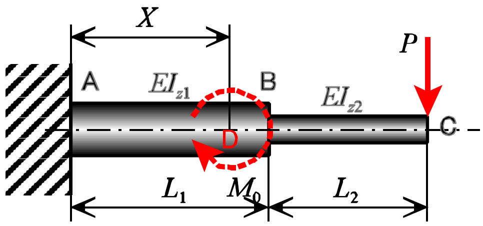

図3

$$M_{AD}(x<X) = -M_0 - P(L_1+L_2) + Px$$

$$M_{DB}(X<x<L_1) = -M_0 - P(L_1+L_2) + Px + M_0$$
$$= -P(L_1+L_2) + Px$$

$$M_{BC}(L_1<x) = -P(L_1+L_2) + Px$$

と書くことができる．いま求めたいのは荷重点$D \in AB$のたわみ角であるので，カスティリアノの定理から

$$\theta_{D \in AB} = \frac{dU}{dM_0} = \frac{1}{EI_{z1}}\int_0^X M_{AD}\frac{dM_{AD}}{dM_0}dx + \frac{1}{EI_{z1}}\int_X^{L_1} M_{DB}\frac{dM_{DB}}{dM_0}dx + \frac{1}{EI_{z2}}\int_{L_1}^{L_1+L_2} M_{BC}\frac{dM_{BC}}{dM_0}dx$$

で求めることができる．ここで，

$$\frac{dM_{AD}}{dM_0} = -1, \quad \frac{dM_{DB}}{dM_0} = 0, \quad \frac{dM_{BC}}{dM_0} = 0$$

であるので，

$$\theta_{D \in AB} = \frac{dU}{dM_0} = \frac{1}{EI_{z1}}\int_0^X \left[-M_0 - P(L_1+L_2) + Px\right](-1)dx$$

となる．一方，M_0は仮想モーメントであることからこれをゼロに置くと

$$\theta_{D \in AB} = \left.\frac{dU}{dM_0}\right|_{M_0 \to 0} = \frac{P}{EI_{z1}}\int_0^X \left[(L_1+L_2) - x\right]dx$$

この式から明らかに式(C)が得られる．

M_0がBC間にあるとき(図4)，曲げモーメントの式は

$$M_{AB}(x<L_1) = -M_0 - P(L_1+L_2) + Px$$

$$M_{BD}(L_1<x<X) = -M_0 - P(L_1+L_2) + Px$$

$$M_{DC}(X<x<L_1+L_2) = -P(L_1+L_2) + Px$$

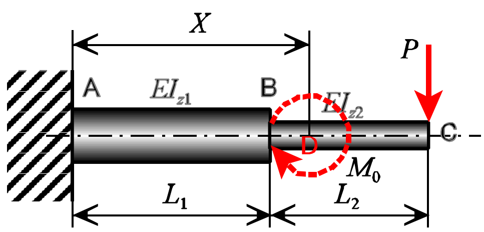

図4

となるので$\theta_{D \in BC}$は

$$\theta_{D \in BC} = \left.\frac{dU}{dM_0}\right|_{M_0 \to 0} = \frac{P}{EI_{z1}}\int_0^{L_1} \left[(L_1+L_2) - x\right]dx + \frac{P}{EI_{z2}}\int_{L_1}^X \left[(L_1+L_2) - x\right]dx$$

から

$$\theta_{D\in BC}=\frac{PL_1}{2EI_{z1}}(L_1+2L_2)+\frac{P}{2EI_{z2}}\left[2L_2(X-L_1)-(X-L_1)^2\right]$$

となり，式(D)と同じ式が得られる．