例題8.6　弾性体のある点が図1左のような応力状態であるとする．このとき，同図右の二つの座標系について主応力軸を求めなさい．ただし，垂直応力①と②の大小関係は「垂直応力①＞垂直応力②」であるものとする．

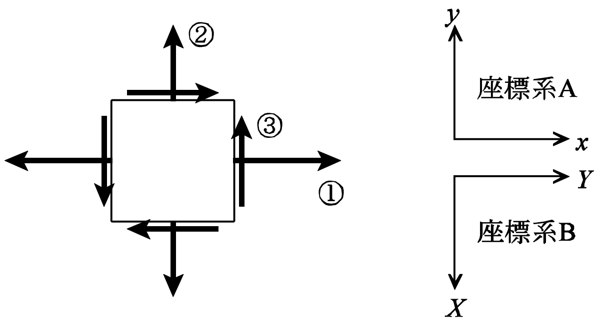

図1

解　まず，座標系Aについて考える．①，②，③の応力成分はσ_x，σ_y，τ_{xy}で，これらの応力成分はすべて正である(応力成分の名前と正負の定義を思い出して確認しておくこと)．座標系Aの場合主応力軸がx軸と反時計回りになす角θ_nは式(8.5)から

$$2\theta_n = \tan^{-1}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

である．

座標系Bでは，①，②，③の応力成分はσ_Y，σ_X，τ_{XY}で，σ_Yとσ_Xは正，τ_{XY}は負である．座標系Bの場合主応力軸がX軸と反時計回りになす角θ_Nは

$$2\theta_N = \tan^{-1}\frac{2\tau_{XY}}{\sigma_X - \sigma_Y}$$

である．

θ_nとθ_Nについて考えてみよう．まず，座標系Aでは$\sigma_x - \sigma_y > 0$かつ$\tau_{xy} > 0$なので$2\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y) > 0$となり，座標系Bでは$\sigma_X - \sigma_Y < 0$かつ$\tau_{XY} < 0$なので$2\tau_{XY}/(\sigma_X - \sigma_Y) > 0$となり，$\theta_n = \theta_N$である．しかし，ちょっと待てよ･･･

座標系Bの場合を考えてみると，$\sigma_X - \sigma_Y < 0$かつ$\tau_{XY} < 0$なので角度$2\theta_N$は第三象限の角度を表しているはずである．一方角度$2\theta_n$は$\sigma_x - \sigma_y > 0$かつ$\tau_{xy} > 0$なので第一象限の角度を表す．ゆえに，$2\theta_N = 2\theta_n + \pi$でなければならないことになる．このことを図で表すと図2に赤で表示した角のようになる．以上のことから，座標系Aでは主応力軸はx軸から反時計回りにθ_nの角をなし，座標系BではX軸から反時計回りに$\theta_n + \pi/2$の角をなす．座標系Bは座標系Aを時計回りに$\pi/2$回転させたものなので，二つの主応力軸は一致する．

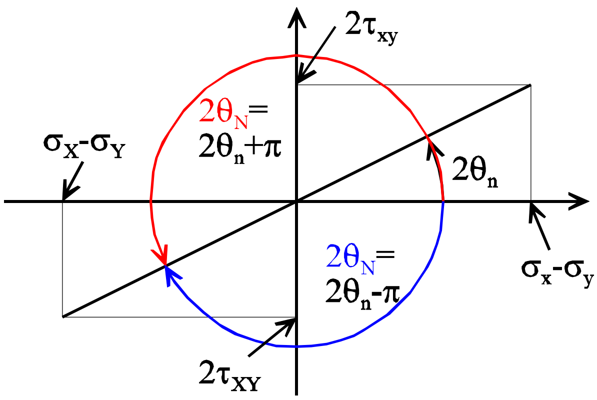

図2

もう一つの考え方は，第三象限の角度を表すならば，$2\theta_N = 2\theta_n - \pi$としてもよい．この角は図2に青で表示した角になる．つまり，「反時計回りに$2\theta_n - \pi$の角度をなす」とは「時計回りに$\pi - 2\theta_n$の角度

をなす」ということと同じである．この考え方に基づくと，座標系Bでの主軸はX軸と時計回りに$\pi/2-\theta_n$の角度をなすことになる．この主軸は，先に述べたX軸から反時計回りに$\theta_n+\pi/2$の角をなす主軸とちょうどπだけずれていて，一直線上にある．

上に述べた三つの角度を図3に示しておくので，関係を確認しておいてほしい．なお，図中主応力軸に沿った赤い実線の矢印は第一主応力で赤い破線の矢印は第二主応力．

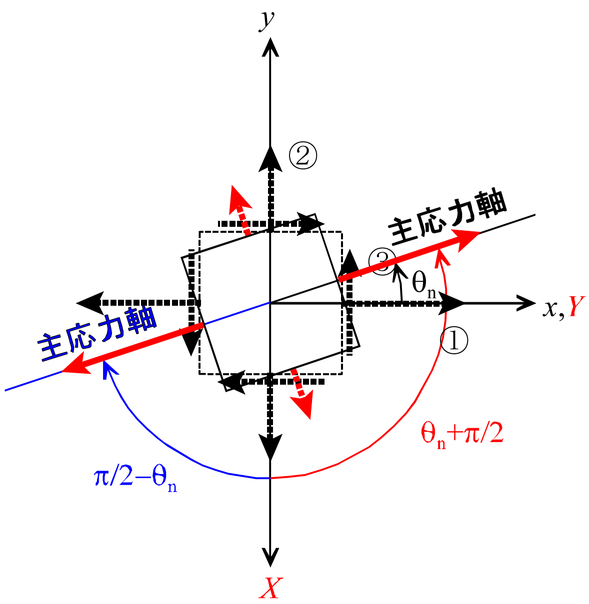

図3