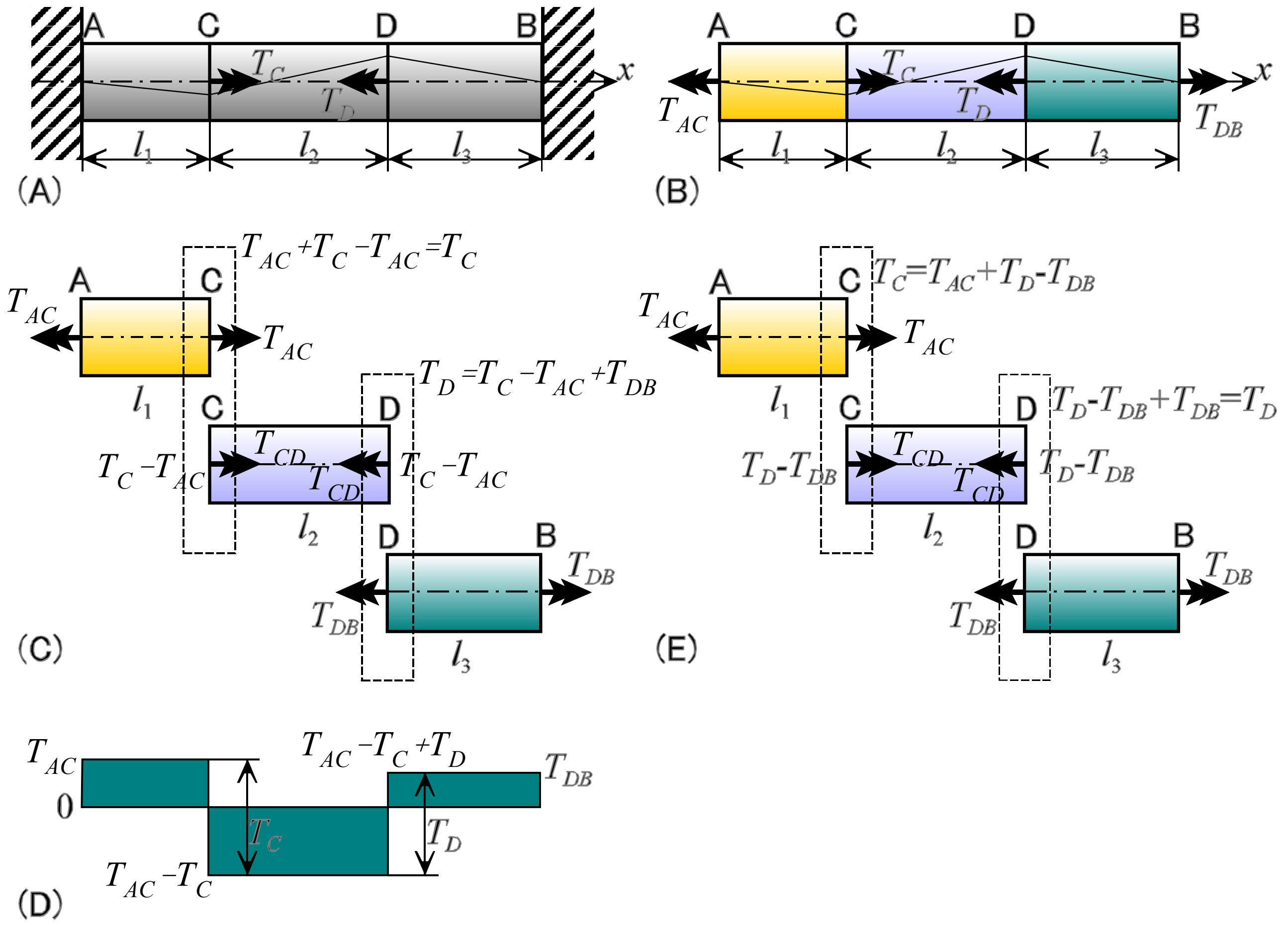

図1

例題7.4　図1(A)のような，両端A，Bが壁に固定された棒の途中C，DにねじりモーメントT_C，T_Dが作用するときのAC間，CD間，DB間にはたらくねじりモーメントを求めよ．

解　AC間，CD間，DB間にはたらくねじりモーメントをT_{AC}，T_{CD}，T_{DB}とする．棒が壁から受ける反モーメントはT_{AC}，T_{DB}に等しいので，これらを外力のように考えると図1(A)と等価な系は図1(B)のようになる．図1(B)の系をC，Dで分割して図1(C)のように考える．まず，AC間では図1(C)左上のようにT_{AC}のみがはたらく．次に，CD間のねじりモーメントT_{CD}を矢印の向きに仮定すると

$T_C=T_{AC}+T_{CD}$　・・・ねじりモーメントT_{AC}とT_{CD}の代数和がT_Cに等しい

でなければならないので

$T_{CD}=T_C-T_{AC}$

が得られる．したがって，図1(C)中央のようになる．DB間ではT_{DB}なのでDでは

$T_D=T_{CD}+T_{DB}=T_C-T_{AC}+T_{DB}$　・・・ねじりモーメントT_{CD}とT_{DB}の代数和がT_Dに等しい

となるから，

$T_{AC}-T_{DB}=T_C-T_D$　　　　(A)

となる．この式で未知量はT_{AC}とT_{DB}なので式が一つ不足する[1]．不足する式はねじり角の条件から求める．まず，AC間で

$$\varphi_C - \varphi_A = \frac{T_{AC} l_1}{G I_p}$$ ・・・断面Cの断面Aに対するねじり角

CD間で

$$\varphi_D - \varphi_C = \frac{-T_{CD} l_2}{G I_p}$$ ・・・T_{CD}の向きはT_{AC}の向きの逆なので，マイナス(-)を付けている．

DB間で

$$\varphi_B - \varphi_D = \frac{T_{DB} l_3}{G I_p}$$

である．棒の両端は剛体壁で回転できないので$\varphi_B - \varphi_A = 0$である必要がある．したがって，

$$\varphi_B - \varphi_A = (\varphi_B - \varphi_D) + (\varphi_D - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_A) = 0$$

から，

$$T_{AC}(l_1 + l_2) + T_{DB} l_3 = T_C l_2 \qquad \text{(B)}$$

となる．なお，$T_{CD} = T_C - T_{AC}$の関係を用いた．式(A)と(B)を連立方程式として解くと

$$T_{AC} = \frac{T_C(l_2 + l_3) - T_D l_3}{l_1 + l_2 + l_3}, \qquad T_{DB} = \frac{-T_C l_1 + T_D(l_1 + l_2)}{l_1 + l_2 + l_3}$$

となり，$T_{CD} = T_C - T_{AC}$の関係から

$$T_{CD} = \frac{T_C l_1 + T_D l_3}{l_1 + l_2 + l_3} \qquad \text{(C)}$$

のように求めることができる．図1(D)にねじりモーメント線図の一例を示す．

例題7.5　上の例題のCD間のねじりモーメントの向きを図2のように図1(C)の逆の向きに仮定してAC間，CD間，DB間にはたらくねじりモーメントを求めよ．

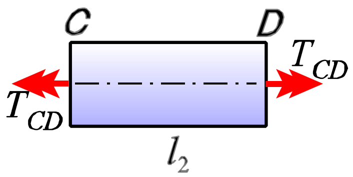

図2

解　さて，T_{CD}の向きを図1(C)の逆であると考えてみよう．このとき，

$$T_C = T_{AC} - T_{CD}$$ ・・・ねじりモーメントT_{AC}とT_{CD}の代数和がT_Cに等しい

---

[1]ねじりモーメントのつりあい式はいくつでもつくることが可能であるが，結局この式に帰着する．たとえば，図1(E)のように考えてもまったく同じ式が得られる．

でなければならないので

$$T_{CD}=-T_C+T_{AC}$$

となる. DB間ではT_{DB}なのでDでは

$$T_D=-T_{CD}+T_{DB}=T_C-T_{AC}+T_{DB}$$

となるから,

$$T_{AC}-T_{DB}=T_C-T_D \qquad \text{(A')}$$

となる. この式は式(A)と同じである. もっとも, T_{CD}を消去した式になっているので当然であるが・・・.

ねじり角の条件を求めてみよう. まず, AC間で

$$\varphi_C-\varphi_A=\frac{T_{AC}l_1}{GI_p}$$

CD間で

$$\varphi_D-\varphi_C=\frac{T_{CD}l_2}{GI_p}$$ ・・・ T_{CD}の向きはT_{AC}と同じ向き

DB間で

$$\varphi_B-\varphi_D=\frac{T_{DB}l_3}{GI_p}$$

である. $\varphi_B-\varphi_A=0$の条件から

$$T_{AC}(l_1+l_2)+T_{DB}l_3=T_Cl_2 \qquad \text{(B')}$$

となり, これも式(B)と同じである. したがって, T_{AC}とT_{DB}は

$$T_{AC}=\frac{T_C(l_2+l_3)-T_Dl_3}{l_1+l_2+l_3}, \quad T_{DB}=\frac{-T_Cl_1+T_D(l_1+l_2)}{l_1+l_2+l_3}$$

となって同じになるが, T_{CD}は$T_{CD}=-T_C+T_{AC}$の関係から

$$T_{CD}=-T_C+T_{AC}=-\frac{T_Cl_1+T_Dl_3}{l_1+l_2+l_3}$$

となり, 式(C)の三番目の式と比べると正負がひっくり返っている. これは当たり前で, 図2で仮定した仮定したねじりモーメントの向きが逆になっているので当然である.

補足 さて, 実はこの例題ではCとDで分割したと考えたときのAC間, CD間, DB間にはたらくねじりモーメントT_{AC}, T_{CD}, T_{DB}を外力のモーメントと考えている. この点は, 第4章から6章までで扱ってきた内力としての曲げモーメントの考え方と異なるので若干混乱する. 次に, 各部AC間, CD間, DB間にはたらくねじりモーメントを内力のモーメントして考えてみよう.

第4章から6章までで述べた正の面と負の面の考え方を思い出そう．正の内力のモーメントは正の面では右向きの二重矢印であらわすことができ，負の面では左向きの二重矢印で表すことができる．いま，すべての内力のモーメントを正を仮定すると，図3のように表すことができる．

図3では内力としてのねじりモーメントを青い矢印と文字で表し，外力としてのねじりモーメントを赤い矢印と文字で表現している．

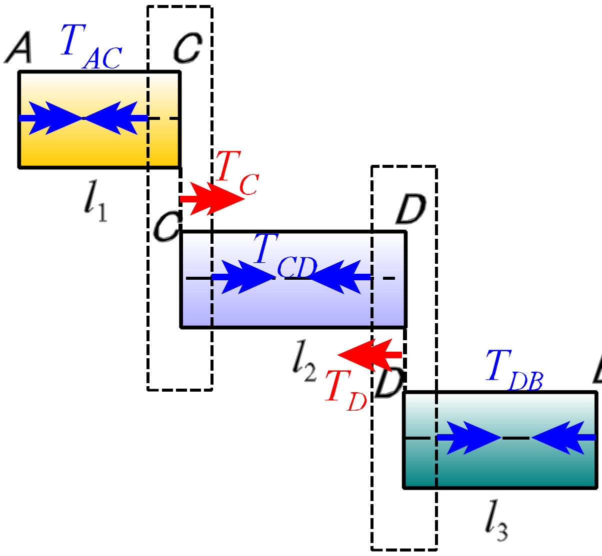

図3

C近傍でのモーメントのつりあいは破線で囲った領域に注目して

$$T_C+T_{CD}-T_{AC}=0$$

から

$$T_{CD}=T_{AC}-T_C$$

が成り立つ．D近傍でのモーメントのつりあいも

$$-T_D-T_{CD}+T_{DB}=0$$

となり，$T_{CD}=T_{AC}-T_C$を代入すると

$$T_{AC}-T_{DB}=T_C-T_D$$

が得られる．この式は前の例題の式(A’)と同じである．

相対的ねじり角をCD間を例にして考えてみよう．すべての内力のモーメントが正であると考えているので，この区間内の長さdxの微小区間で図4のように考えることができる．図4に示した内力のモーメントは長さdxの微小区間にとっては正の外力のモーメントなので，CD間の$d\varphi/dx$は式(7.5)から

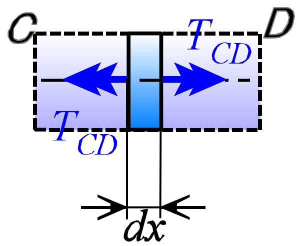

図4

$$\frac{d\varphi_{CD}}{dx}=\frac{T_{CD}}{GI_p}$$

と書ける．$d\varphi_{CD}/dx$は断面Cを基準としたφの変化であることに注意すると，断面Dの断面Cに対する角度変化$\varphi_D-\varphi_C$は

$$\varphi_D-\varphi_C=\int_{l_1}^{l_1+l_2}\frac{T_{CD}}{GI_p}dx=\frac{T_{CD}l_2}{GI_p}$$

と書くことができる．他の区間においても同じように書くことができる．