例題6.16　下図に示す連続はりの各支点反力を求めなさい．

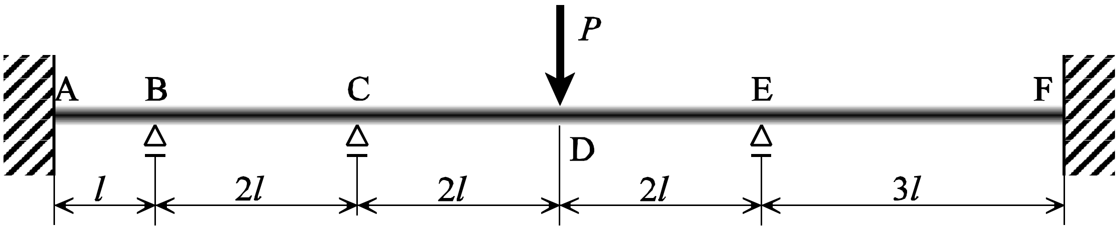


図1

解答　図1の連続はりと等価な系は図2のようになる．固定支点では反力と反モーメントを，その他

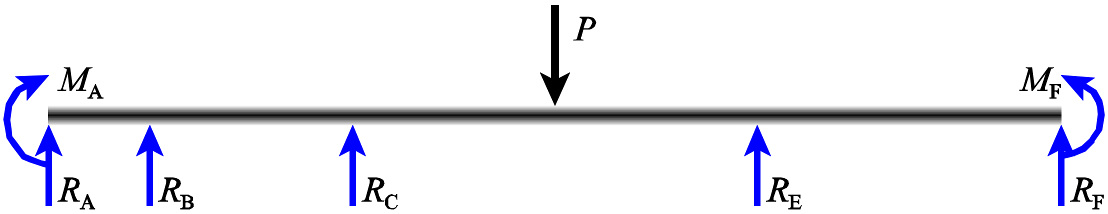


図2

の支点では反力を，それぞれ青い矢印で表現している．図2の系について，力のつりあい式は下向きの力にプラス(+)符号を付けて

$$-R_A-R_B-R_C-R_E-R_F+P=0$$

となるから，

$$R_A+R_B+R_C+R_E+R_F=P \qquad \text{(A)}$$

が成り立つ．モーメントのつりあい式は反時計回りのモーメントに(+)符号を付けて，点Fまわりで

$$-M_A-10R_Al-9R_Bl-7R_Cl+5Pl-3R_El+M_F=0$$

となるから，

$$M_A+10R_Al+9R_Bl+7R_Cl+3R_El-M_F=5Pl \qquad \text{(B)}$$

が成り立つ．

未知の量は全部で7個あるが，二つしか式がないので残りの5個を変形に関する条件から求める．その前に，各区間での曲げモーメントの式を書き下しておくと

AB間　$M_{AB}(x)=M_A+R_Ax$

BC間　$M_{BC}(x)=M_A+R_Ax+R_B(x-l)$

CD間　$M_{CD}(x)=M_A+R_Ax+R_B(x-l)+R_C(x-3l)$

DE間　$M_{DE}(x)=M_A+R_Ax+R_B(x-l)+R_C(x-3l)-P(x-5l)$

EF間　$M_{EF}(x)=M_A+R_Ax+R_B(x-l)+R_C(x-3l)-P(x-5l)+R_E(x-7l)$

である．

たわみ角の式は各区間で

AB間 $$\theta_{AB}(x)=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2\right]$$

BC間 $$\theta_{BC}(x)=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2+\frac{1}{2}R_B(x-l)^2\right]$$

CD間 $$\theta_{CD}(x)=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2+\frac{1}{2}R_B(x-l)^2+\frac{1}{2}R_C(x-3l)^2\right]$$

DE間 $$\theta_{DE}(x)=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2+\frac{1}{2}R_B(x-l)^2+\frac{1}{2}R_C(x-3l)^2-\frac{1}{2}P(x-5l)^2\right]$$

EF間 $$\theta_{EF}(x)=\theta_A-\frac{1}{EI_z}\left[M_Ax+\frac{1}{2}R_Ax^2+\frac{1}{2}R_B(x-l)^2+\frac{1}{2}R_C(x-3l)^2-\frac{1}{2}P(x-5l)^2+\frac{1}{2}R_E(x-7l)^2\right]$$

と表すことができる. たわみ関数は

AB間 $$v_{AB}(x)=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3\right]$$

BC間 $$v_{BC}(x)=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3+\frac{1}{6}R_B(x-l)^3\right]$$

CD間 $$v_{CD}(x)=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3+\frac{1}{6}R_B(x-l)^3+\frac{1}{6}R_C(x-3l)^3\right]$$

DE間 $$v_{DE}(x)=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3+\frac{1}{6}R_B(x-l)^3+\frac{1}{6}R_C(x-3l)^3-\frac{1}{6}P(x-5l)^3\right]$$

EF間 $$v_{EF}(x)=v_A+\theta_Ax-\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_Ax^2+\frac{1}{6}R_Ax^3+\frac{1}{6}R_B(x-l)^3+\frac{1}{6}R_C(x-3l)^3-\frac{1}{6}P(x-5l)^3+\frac{1}{6}R_E(x-7l)^3\right]$$

となる. たわみ角の式ならびにたわみ関数は点B, C, D, Eでのたわみ角ならびのたわみの連続条件を満たす.

支点での条件は

点A($x=0$)で$\theta_{AB}(0)=0$, $v_{AB}(0)=0$ (C)

点B($x=l$)で$v_{AB}(l)=0$ (D)

点C($x=3l$)で$v_{BC}(3l)=0$ (E)

点E($x=7l$)で$v_{DE}(7l)=0$ (F)

点F($x=10l$)で$\theta_{EF}(10l)=0$, $v_{EF}(10l)=0$ (G)

である. まず, 式(C)から$\theta_A=0$, $v_A=0$が得られ, 式(D)から

$$3M_A l^2 + R_A l^3 = 0 \rightarrow 3M_A + R_A l = 0 \qquad \text{(H)}$$

式(E)から

$$\frac{1}{2}M_A(3l)^2 + \frac{1}{6}R_A(3l)^3 + \frac{1}{6}R_B(2l)^3 = 0 \rightarrow 27M_A + 27R_A l + 8R_B l = 0 \qquad \text{(I)}$$

式(F)から

$$\frac{1}{2}M_A(7l)^2 + \frac{1}{6}R_A(7l)^3 + \frac{1}{6}R_B(6l)^3 + \frac{1}{6}R_C(4l)^3 - \frac{1}{6}P(2l)^3$$

$$\rightarrow 147M_A + 343R_A l + 216R_B l + 64R_C l = 8Pl \qquad \text{(J)}$$

式(G)の一番目の式から

$$M_A(10l) + \frac{1}{2}R_A(10l)^2 + \frac{1}{2}R_B(9l)^2 + \frac{1}{2}R_C(7l)^2 - \frac{1}{2}P(5l)^2 + \frac{1}{2}R_E(3l)^2 = 0$$

$$\rightarrow 20M_A + 100R_A l + 81R_B l + 49R_C l + 9R_E l = 25Pl \qquad \text{(K)}$$

式(G)の二番目の式から

$$\frac{1}{2}M_A(10l)^2 + \frac{1}{6}R_A(10l)^3 + \frac{1}{6}R_B(9l)^3 + \frac{1}{6}R_C(7l)^3 - \frac{1}{6}P(5l)^3 + \frac{1}{6}R_E(3l)^3 = 0$$

$$\rightarrow 300M_A + 1000R_A l + 729R_B l + 343R_C l + 27R_E l = 125Pl \qquad \text{(L)}$$

が得られ，式(H)から(L)が式(A)と(B)に追加される式となり，全部で7個の式ができるので解くことができる．

さて，式(H)から(L)を見るとR_FとM_Fを含んでいないので5個の未知量(M_A，R_A，R_B，R_C，R_E）に対して5個の方程式がたっていて，式(H)から(L)はこれだけで閉じた式系になっている．まず，式(H)から(L)の解を求めることにする．いろいろな解き方があるが，ここでは単純な方法で解くことにする．

まず，式(L)と(K)からR_Eを消去すると

$$120M_A + 350R_A l + 243R_B l + 98R_C l = 25Pl \qquad \text{(M)}$$

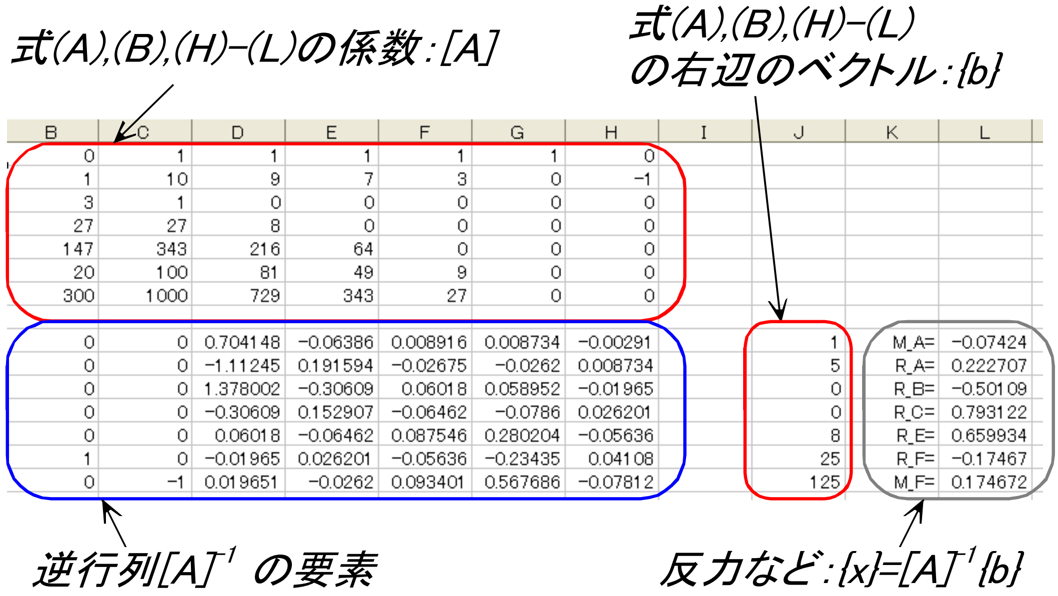
さらに，式(J)と(M)からR_Cを消去すると，

$$3363M_A + 5607R_A l + 2808R_B l = -408Pl \qquad \text{(N)}$$

式(H)，(I)，(N)から

$$M_A = -\frac{17}{229}Pl,\ R_A = \frac{51}{229}P,\ R_B = -\frac{459}{916}P$$

が得られ，これらを式(M)，(L)に代入するとR_CとR_Eが得られ，さらに式(A)と(B)を用いるとR_FとM_Fが求められるが，結果は省略する．実際，これらの表示式はかなり面倒な分数式になるので手で解くことはあきらめたほうがよいかもしれない．それより，式(A)，(B)，(H)-(L)までを正しく求めるこ



B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
0	1	1	1	1	1	0				
1	10	9	7	3	0	−1				
3	1	0	0	0	0	0				
27	27	8	0	0	0	0				
147	343	216	64	0	0	0				
20	100	81	49	9	0	0				
300	1000	729	343	27	0	0				
0	0	0.704148	−0.06386	0.008916	0.008734	−0.00291		1	M_A=	−0.07424
0	0	−1.11245	0.191594	−0.02675	−0.0262	0.008734		5	R_A=	0.222707
0	0	1.378002	−0.30609	0.06018	0.058952	−0.01965		0	R_B=	−0.50109
0	0	−0.30609	0.152907	−0.06462	−0.0786	0.026201		0	R_C=	0.793122
0	0	0.06018	−0.06462	0.087546	0.280204	−0.05636		8	R_E=	0.659934
1	0	−0.01965	0.026201	−0.05636	−0.23435	0.04108		25	R_F=	−0.17467
0	−1	0.019651	−0.0262	0.093401	0.567686	−0.07812		125	M_F=	0.174672

図3

とができればあとはどうとでもなりそうである．ちなみに，表計算ソフトを使って計算した反力などの数値を図3に示す．反力などを未知ベクトル$\{x\}$，式(A)，(B)，(H)-(L)の係数をマトリックス$[A]$，右辺の値をベクトル$\{b\}$と表すと連立方程式$[A]\{x\}=\{b\}$で表されるので，ベクトル$\{x\}$は$[A]$の逆行列

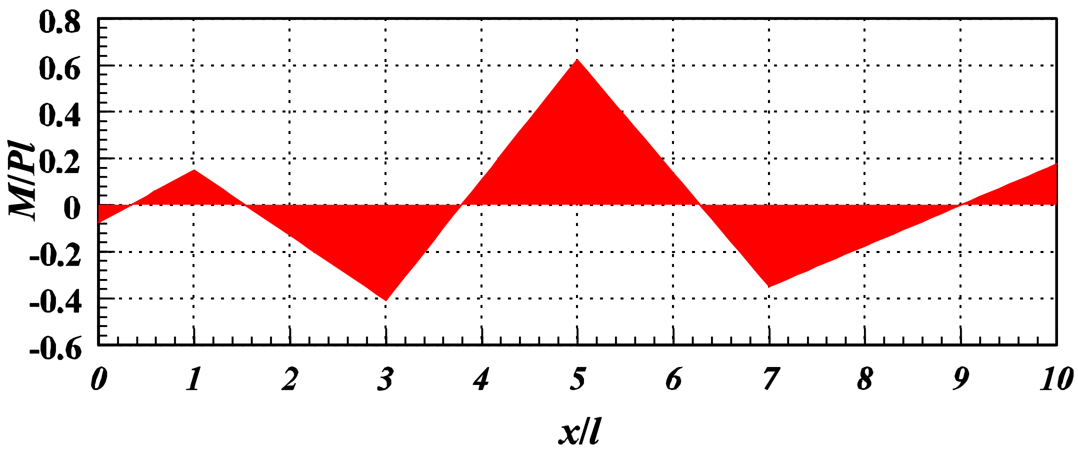


図4

$[A]^{-1}$として$\{x\}=[A]^{-1}\{b\}$で求められる．得られた数値を使って描いたBMDを図4に示す．