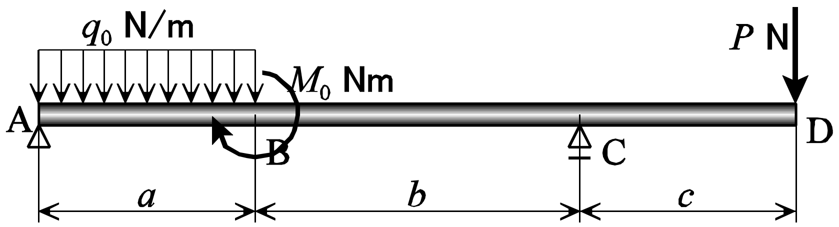

図1

例題6.12　図1のような分布荷重q_0，モーメントM_0，集中荷重PをうけるはりのSFD，BMD，たわみ角の式ならびにたわみ関数を求めよ．

解答　支持点AとCでの支持反力を決めずにR_AとR_Cとしておく．まず，せん断力と曲げモーメントの式を求めてみよう．

○AB間

図2のようにこの区間では外力としては上向きのR_Aと下向きの分布荷重q_0，内力としては下向きのせん断力F_{AB}と反時計回りの曲げモーメントM_{AB}であるので，力のつりあいは次のようになる．

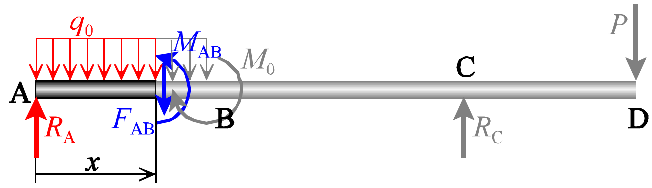

図2

$$-R_A+q_0x+F_{AB}=0$$

ただし，下向きの力にプラス(＋)符号を付けて表している．この式から，せん断力F_{AB}は

$$F_{AB}=R_A-q_0x$$

のように得られる．

曲げモーメントは，式(5.4)から

$$M_{AB}=M_A+\int_0^{x(<a)}F_{AB}(\xi)d\xi=M_A+\int_0^{x(<a)}R_A-q_0\xi d\xi=M_A+R_Ax-\frac{1}{2}q_0x^2$$

のように求めることができるが，支点Aは単純支持点で回転できるため$M_A=0$であるので，最終的に

$$M_{AB}=R_Ax-\frac{1}{2}q_0x^2$$

となる．

○BC間

図3のようにこの区間では外力としては上向きのR_A，下向きの分布荷重q_0，時計回りのモーメントM_0であり，内力としては下向きのせん断力F_{BC}と反時計回りの曲げモーメントM_{BC}であるので，力のつりあいは次のようになる．

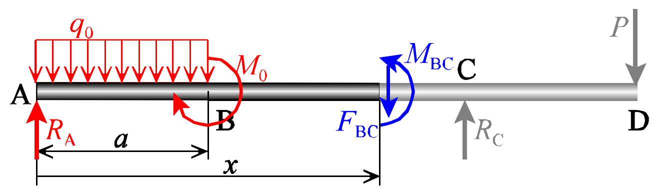

図3

$$-R_A+q_0a+F_{BC}=0$$

この式から，せん断力F_{AB}は

$$F_{BC}=R_A-q_0a$$

のように得られる．

曲げモーメントを求めるために，まず，Bでの曲げモーメントを求めると

$$M_B=R_Aa-\frac{1}{2}q_0a^2$$

である．公式(式(5.4))から

$$M_{BC}=M_B+\int_a^x F_{BC}(\xi)d\xi=R_Aa-\frac{1}{2}q_0a^2+R_A(x-a)-q_0a(x-a)=R_Ax-\frac{1}{2}q_0a^2-q_0a(x-a)$$

のように計算できるが，この式の中にはモーメントM_0の影響が入っていないので間違いである．モーメントM_0の影響を考えるためにモーメントのつりあい式を作ると，反時計回りのモーメントにプラス(＋)符号を付けて表すとBC間の任意のxで，

$$-R_Ax+q_0a\left(x-\frac{1}{2}a\right)-M_0+M_{BC}=0$$

となるから，この式をM_{BC}について解くとM_{BC}は次のように書ける．

$$M_{BC}=R_Ax-q_0a\left(x-\frac{1}{2}a\right)+M_0$$

この式がBC間での曲げモーメントの式になる．右辺第二項は

$$-q_0a\left(x-\frac{1}{2}a\right)=-\frac{1}{2}q_0a^2-q_0a\left(x-\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}q_0a^2=-\frac{1}{2}q_0a^2-q_0a(x-a)$$

と変形できるので結局M_{BC}は

$$M_{BC}=M_0+R_Ax-\frac{1}{2}q_0a^2-q_0a(x-a)$$

となる．

少し補足：モーメントM_0が外力のモーメントであることに注意すると，このモーメントM_0はBC間において時計回りのモーメントであるのでこれに対して生ずる内力のモーメント(つまり，曲げモーメント)は大きさがM_0で反時計回り(正の曲げモーメント)である．一般的には，<u>モーメントの作用点の後の区間の曲げモーメントの式を求める際には，せん断力を積分したものの他に外力モーメントの影響を加える．外力モーメントが時計回りなら正の曲げモーメントとして，外力モーメントが反時計回りなら負の曲げモーメントとして曲げモーメントの式に加算すればよい</u>ことになる．外力モーメントは曲げモーメントに不連

続を生じさせる(p.63の「ポイント」参照)

○CD間

説明を省いて結果のみ載せておく.

$$F_{CD}=R_A-q_0a+R_C$$

$$M_{CD}=R_Ax+M_0-\frac{1}{2}q_0a^2-q_0a(x-a)$$
$$+R_C(x-a-b)$$

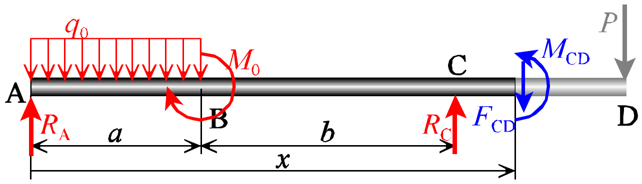

図4

以上で，すべての区間でのせん断力と曲げモーメントの式が得られた.

たわみ角の式は各区間で次のように書き下すことができる.

AB間 : $\theta_{AB}=\theta_A+\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}R_Ax^2-\dfrac{1}{6}q_0x^3\right]$

BC間 : $\theta_{BC}=\theta_B+\dfrac{-1}{EI_z}\displaystyle\int_a^x M_{BC}(\xi)d\xi=\theta_A+\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}R_Aa^2-\dfrac{1}{6}q_0a^3\right]+\dfrac{-1}{EI_z}\displaystyle\int_a^x\left[R_A\xi+M_0-\dfrac{1}{2}q_0a^2-q_0a(\xi-a)\right]d\xi$

から

$$\theta_{BC}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{6}q_0a^3+\left(M_0-\frac{1}{2}q_0a^2\right)(x-a)-\frac{1}{2}q_0a(x-a)^2\right]$$

CD間 : $\theta_C=\theta_A+\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{2}R_A(a+b)^2-\dfrac{1}{6}q_0a^3+\left(M_0-\dfrac{1}{2}q_0a^2\right)b-\dfrac{1}{2}q_0ab^2\right]$であるから,

$\theta_{CD}=\theta_C+\dfrac{-1}{EI_z}\displaystyle\int_{a+b}^x M_{CD}(\xi)d\xi$に代入して,

$$\theta_{CD}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A(a+b)^2-\frac{1}{6}q_0a^3+\left(M_0-\frac{1}{2}q_0a^2\right)b-\frac{1}{2}q_0ab^2\right]$$
$$+\frac{-1}{EI_z}\int_{a+b}^x\left[R_A\xi+M_0+\frac{1}{2}q_0a^2-q_0(\xi-a)+R_C(\xi-a-b)\right]d\xi$$

から

$$\theta_{CD}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_Ax^2-\frac{1}{6}q_0a^3+\left(M_0-\frac{1}{2}q_0a^2\right)(x-a)-\frac{1}{2}q_0a(x-a)^2+\frac{1}{2}R_C(x-a-b)^2\right]$$

となる.

たわみ曲線は各区間で次のように書き下すことができる.

AB間 : $v_{AB}=v_A+\theta_Ax+\dfrac{-1}{EI_z}\left[\dfrac{1}{6}R_Ax^3-\dfrac{1}{24}q_0x^4\right]$

(Aは単純支持点ゆえに$v_A=0$であるので，以下では省略する)

BC間: $v_{BC}=\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0a^4-\frac{1}{6}q_0a^3(x-a)+\frac{1}{2}\left(M_0-\frac{1}{2}q_0a^2\right)(x-a)^2-\frac{1}{6}q_0a(x-a)^3\right]$

CD間:

$$v_{CD}=\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0a^4-\frac{1}{6}q_0a^3(x-a)+\frac{1}{2}\left(M_0-\frac{1}{2}q_0a^2\right)(x-a)^2-\frac{1}{6}q_0a(x-a)^3+\frac{1}{6}R_C(x-a-b)^3\right]$$

θ_Aは$x=a+b$で$v_{BC}(x=a+b)=v_C=0$から

$$\theta_A=\frac{1}{EI_z(a+b)}\left[\frac{1}{6}R_A(a+b)^3-\frac{1}{24}q_0a^4-\frac{1}{6}q_0a^3b+\frac{1}{2}\left(M_0-\frac{1}{2}q_0a^2\right)b^2-\frac{1}{6}q_0ab^3\right]$$

となる.

R_AとR_Cは点Cに関するモーメントのつりあい

$$-R_A(a+b)+q_0a\left(\frac{1}{2}a+b\right)-M_0-Pc=0$$

と力のつりあい

$$-R_A-R_C+q_0a+P=0$$

から得られる. SFD, BMDの例は次の**例題6.13**の後.

例題6.13 図1のような分布荷重q_0, モーメントM_0, 集中荷重PをうけるはりのSFD, BMD, たわみ角の式ならびにたわみ関数を求めよ.

解答 この例題で分布荷重を$0\leq x\leq a+b+c$でq_0, $a<x\leq a+b+c$で$-q_0$とすると, 分布荷重はこれらの和と考えることができる. このように考えると,

$q_1(x)=q_0 \quad (0\leq x\leq a+b+c)$

$$q_2(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<a)\\ -q_0 & (a<x\leq a+b+c)\end{cases}$$

とすると,

$$q(x)=q_1(x)+q_2(x)=\begin{cases}q_0 & (0\leq x<a)\\ 0 & (a<x\leq a+b+c)\end{cases}$$

となり, いま考えている分布荷重を表すことができている.

○せん断力

AB間: $F_{AB}=R_A-q_0x$

BC間: $F_{BC}=R_A-q_0x+q_0(x-a)$

CD間: $F_{CD}=R_A-q_0x+q_0(x-a)+R_C$

○曲げモーメント

AB間: $M_{AB}=R_Ax-\frac{1}{2}q_0x^2+M_A$

(Aは単純支持点ゆえに$M_A=0$であるので, 以下では省略する)

BC間: $M_{BC}=R_Ax-\frac{1}{2}q_0x^2+M_0+\frac{1}{2}q_0(x-a)^2$

CD間 : $M_{CD}=R_A x-\frac{1}{2}q_0 x^2+M_0+\frac{1}{2}q_0(x-a)^2+R_C(x-a-b)$

のように書ける．実際，M_{BC}の式で $-\frac{1}{2}q_0 x^2+\frac{1}{2}q_0(x-a)^2=\frac{1}{2}q_0 a^2-q_0 ax=-\frac{1}{2}q_0 a^2-q_0 a(x-a)$と書ける．

同様にして，

○たわみ角の式

AB間 : $\theta_{AB}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}q_0 x^3\right]$

BC間 : $\theta_{BC}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}q_0 x^3+M_0(x-a)+\frac{1}{6}q_0(x-a)^3\right]$

CD間 : $\theta_{CD}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}q_0 x^3+M_0(x-a)+\frac{1}{6}q_0(x-a)^3+\frac{1}{2}R_C(x-a-b)^2\right]$

となる．

○たわみ曲線

AB間 : $v_{AB}=v_A+\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0 x^4\right]$

(Aは単純支持点ゆえに$v_A=0$であるので，以下では省略する)

BC間 : $v_{BC}=\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0 x^4+\frac{1}{2}M_0(x-a)^2+\frac{1}{24}q_0(x-a)^4\right]$

CD間 : $v_{CD}=\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0 x^4+\frac{1}{2}M_0(x-a)^2+\frac{1}{24}q_0(x-a)^4+\frac{1}{6}R_C(x-a-b)^3\right]$

と書ける．

この表示式のほうがもっと簡単に書くことができる．

例題6.12と**6.13**のSFDとBMDを図５に示す．ただし，$a=b=c$，$M_0=q_0 a^2$，$P=q_0 a$として，表計算ソフトを用いて計算した(図6)．

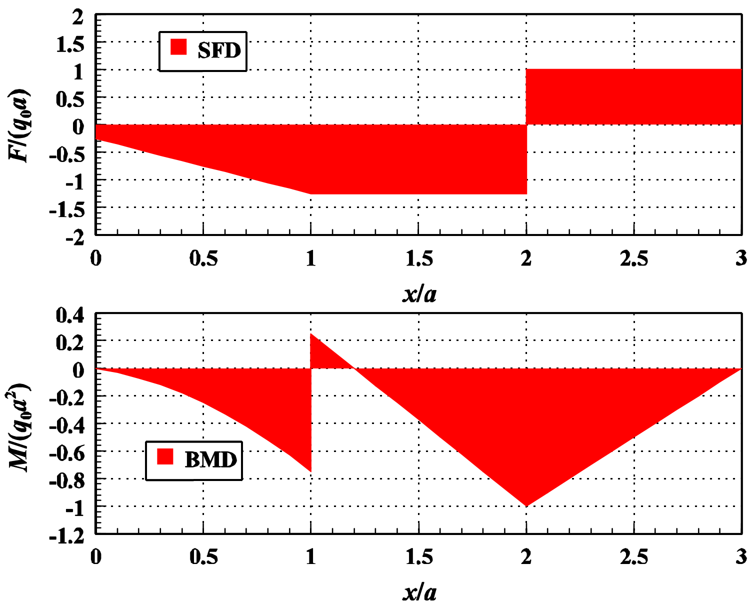

図5　SFDとBMD

図6でD列がx，E列がM_{CD}の最初の二項，F列が次の二項，G列が最後の一項である．

M_{CD}の最初の二項はすべての区間で共通，次の二項はBC間とCD間で共通，最後の一項はCD間のみである．

最後のH列はE列からG列の和を求めているだけである．

D	E	F	G	H
x	1	2	3	Bending Moment
0	0			0
0.1	-0.03			-0.03
0.2	-0.07			-0.07
0.3	-0.12			-0.12
0.4	-0.18			-0.18
0.5	-0.25			-0.25
0.6	-0.33			-0.33
0.7	-0.42			-0.42
0.8	-0.52			-0.52
0.9	-0.63			-0.63
1	-0.75			-0.75
1	-0.75	1		0.25
1.1	-0.88	1.005		0.125
1.2	-1.02	1.02		-2.22045E-016
1.3	-1.17	1.045		-0.125
1.4	-1.33	1.08		-0.25
1.5	-1.5	1.125		-0.375
1.6	-1.68	1.18		-0.5
1.7	-1.87	1.245		-0.625
1.8	-2.07	1.32		-0.75
1.9	-2.28	1.405		-0.875
2	-2.5	1.5		-1
2	-2.5	1.5	0	-1
2.1	-2.73	1.605	0.225	-0.9
2.2	-2.97	1.72	0.45	-0.8
2.3	-3.22	1.845	0.675	-0.7
2.4	-3.48	1.98	0.9	-0.6
2.5	-3.75	2.125	1.125	-0.5
2.6	-4.03	2.28	1.35	-0.4
2.7	-4.32	2.445	1.575	-0.3
2.8	-4.62	2.62	1.8	-0.2
2.9	-4.93	2.805	2.025	-0.1
3	-5.25	3	2.25	8.88178E-016

図6

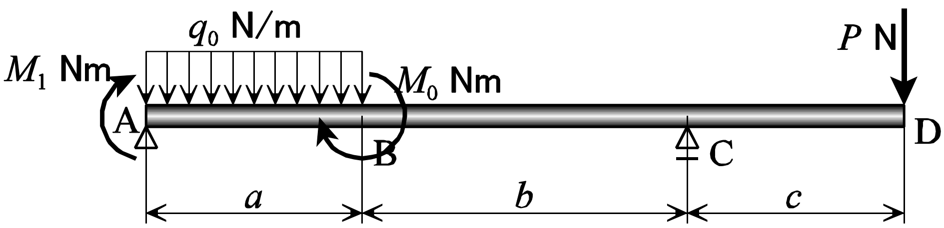

図7

例題6.14　図1の系に加えて図7のように点Aに時計回りの既知の外力のモーメントM_1がはたらく場合のSFD，BMD，たわみ角の式ならびにたわみ関数を求めよ．

解答　モーメントM_1は反時計回りの曲げモーメントを生ずるので，曲げモーメントの式は各区間で

AB間：$M_{AB}=M_1+R_Ax-\dfrac{1}{2}q_0x^2$

BC間 : $M_{BC}=M_1+R_A x-\frac{1}{2}q_0 x^2+M_0+\frac{1}{2}q_0(x-a)^2$

CD間 : $M_{CD}=M_1+R_A x-\frac{1}{2}q_0 x^2+M_0+\frac{1}{2}q_0(x-a)^2+R_C(x-a-b)$

と書くことができる. せん断力の式は変わらない.

○たわみ角の式

AB間 : $\theta_{AB}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[M_1 x+\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}q_0 x^3\right]$

BC間 : $\theta_{BC}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[M_1 x+\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}q_0 x^3+M_0(x-a)+\frac{1}{6}q_0(x-a)^3\right]$

CD間 : $\theta_{CD}=\theta_A+\frac{-1}{EI_z}\left[M_1 x+\frac{1}{2}R_A x^2-\frac{1}{6}q_0 x^3+M_0(x-a)+\frac{1}{6}q_0(x-a)^3+\frac{1}{2}R_C(x-a-b)^2\right]$

となる.

○たわみ曲線

AB間 : $v_{AB}=v_A+\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_1 x^2+\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0 x^4\right]$

(Aは単純支持点ゆえに$v_A=0$であるので, 以下では省略する)

BC間 : $v_{BC}=\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_1 x^2+\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0 x^4+\frac{1}{2}M_0(x-a)^2+\frac{1}{24}q_0(x-a)^4\right]$

CD間 : $v_{CD}=\theta_A x+\frac{-1}{EI_z}\left[\frac{1}{2}M_1 x^2+\frac{1}{6}R_A x^3-\frac{1}{24}q_0 x^4+\frac{1}{2}M_0(x-a)^2+\frac{1}{24}q_0(x-a)^4+\frac{1}{6}R_C(x-a-b)^3\right]$

と書ける.

R_AとR_Cは点Cに関するモーメントのつりあい

$$-M_1-R_A(a+b)+q_0 a\left(\frac{1}{2}a+b\right)-M_0-Pc=0$$

と力のつりあい

$$-R_A-R_C+q_0 a+P=0$$

から得られる.

例題6.15 図1の系で支持点Aが固定支点の場合, SFD, BMD, たわみ角の式ならびにたわみ関数を求めよ.

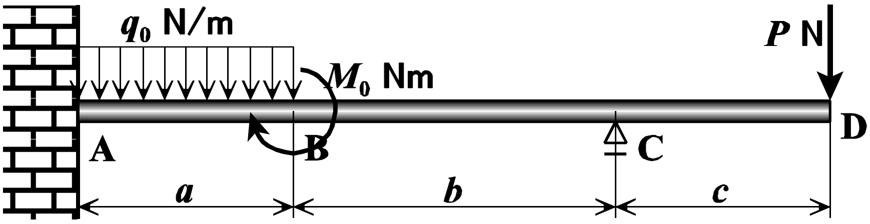

図8

解答　図8のように支持点Aが固定支持されているため，固定モーメントが発生する．このモーメントをM_1で表して時計周りを仮定すると，図7の系になる．したがって，せん断力の式と曲げモーメントの式は例題6.14と同じである．ただし，図7の系との違いはモーメントM_1が未知である．

たわみ角の式とたわみ関数は，支持点Aが固定支持されているため支持点Aでは$\theta_A=0$でなければならない．ゆえにたわみ角の式とたわみ関数は例題6.14のたわみ角の式とたわみ関数で$\theta_A=0$とおくだけ(θ_Aの項を消すだけ)でよい．

支持点Aが固定支持されている場合，点Aでの時計回りの外力のモーメントM_1の大きさは未知となる．この場合，未知量としてM_1が加わるので，全部で未知量が三つ(R_A，R_C，M_1)に対して式は力のつりあいとモーメントのつりあいの二つしかたたないので，変形に関する条件を加えて条件式を増やす必要がある(不静定はりの問題)．たわみに関する条件として点Cでたわみがゼロ($v_{BC}=0$)という条件を使う．この条件から

$$\frac{1}{2}M_1(a+b)^2+\frac{1}{6}R_A(a+b)^3-\frac{1}{24}q_0(a+b)^4+\frac{1}{2}M_0b^2+\frac{1}{24}q_0b^4=0$$

という式が得られる．この式と力のつりあい式

$$-R_A-R_C+q_0a+P=0$$

モーメントのつりあい式

$$-M_1-R_A(a+b)+q_0a\left(\frac{1}{2}a+b\right)-M_0-Pc=0$$

を連立させて解くと，三つの未知量R_A，R_C，M_1を求めることができる．この例題のSFDとBMDを図9に示す．ただし，$a=b=c$，$M_0=q_0a^2$，$P=q_0a$とした．

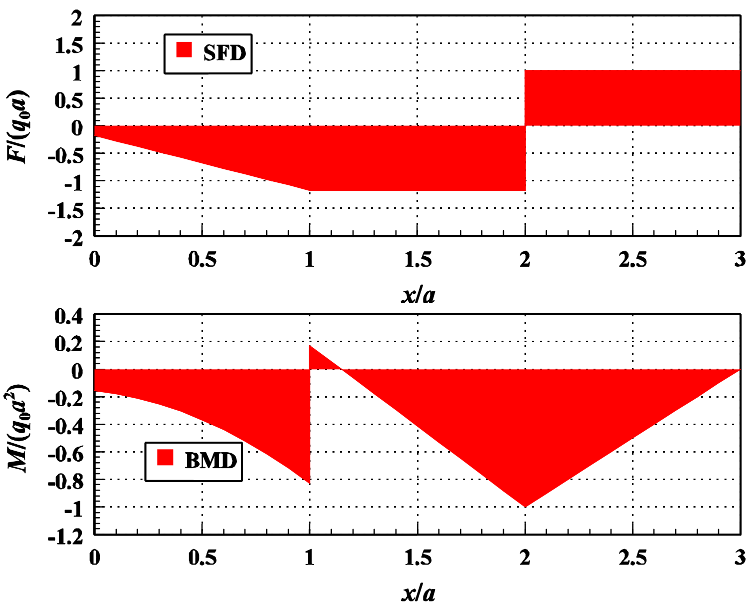

図9　SFDとBMD