例題3.8　右図のような構造の部材BDとCEに発生する内力N_{BD}とN_{CE}を求めなさい．ただし，部材ABCFは剛体であり，部材BD，CEの断面積をA_1，A_2，ヤング率をE_1，E_2とする．また，点A，B，C，D，Eはすべて回転自由(部材BDとCEには軸力のみ発生する)である．

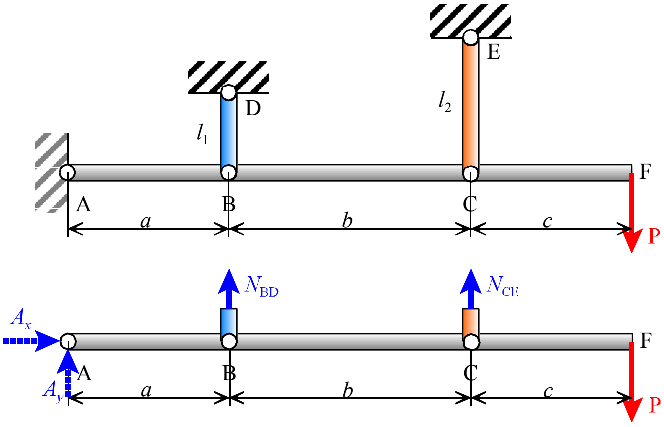

図1

解法　支点Aの横方向と縦方向に反力が発生する．この反力をA_x，A_yとし，内力N_{BD}およびN_{CE}が正であると仮定すると，右図下のような系として考えることができる．この系における力のつりあいは

$$A_y+N_{BD}+N_{CE}-P=0 \qquad (1)$$

$$A_x=0$$

モーメントのつりあいは，たとえば，点Aまわりで

$$N_{BD}a+N_{CE}(a+b)-P(a+b+c)=0 \qquad (2)$$

である．未知の量が支点反力A_yと内力N_{BD}およびN_{CE}に対して式が二つしかないので明らかに不静定である．そこで変形の条件を考えると，部材BDとCEは内力N_{BD}とN_{CE}で

$$\lambda_{BD}=\frac{N_{BD}l_1}{A_1E_1},\ \lambda_{CE}=\frac{N_{CE}l_2}{A_2E_2}.$$

だけ変形する．λ_{BD}とλ_{CE}は無関係ではない．これら二つの変形量の間に成立しなければならない条件は，部材ABCFは剛体であることから，部材BDとCEが変形することによって点Aまわりに(剛体棒の元の位置を基準に時計まわりに)角度θだけ傾斜する．この傾斜角を用いると

$$\tan\theta=\frac{\lambda_{BD}}{a}=\frac{\lambda_{CE}}{a+b}$$

の関係が成り立たなければならない．この関係から，

$$\lambda_{BD}(a+b)-\lambda_{CE}a=0$$

これにλ_{BD}とλ_{CE}の式を代入すると，

$$\frac{(a+b)l_1}{A_1E_1}N_{BD}-\frac{al_2}{A_2E_2}N_{CE}=0 \qquad (3)$$

が得られる．式(2)，式(3)を連立して解くと内力N_{BD}とN_{CE}を求めることができ，

$$N_{BD}=\frac{a(a+b+c)l_2A_1E_1}{a^2l_2A_1E_1+(a+b)^2l_1A_2E_2}P,\ N_{CE}=\frac{(a+b)(a+b+c)l_1A_2E_2}{a^2l_2A_1E_1+(a+b)^2l_1A_2E_2}P$$

となる．いずれの内力も仮定したとおり正であることが分かる．■

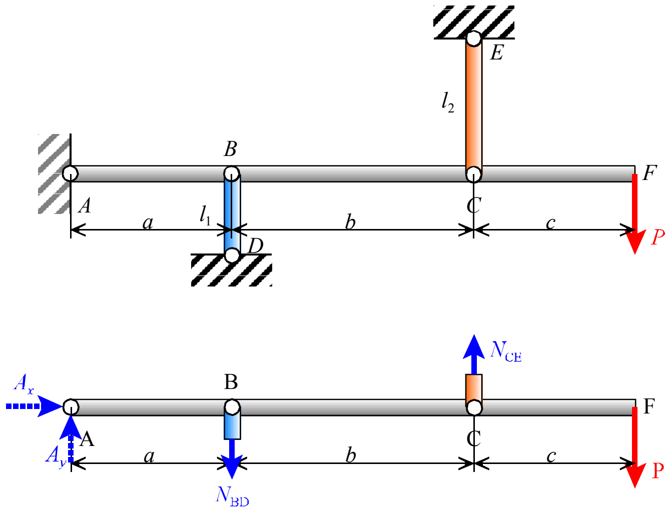

図2

例題3.9　右図のような構造の部材BDとCEに発生する内力N_{BD}とN_{CE}を求めなさい．ただし，部材ABCFは剛体であり，部材BD，CEの断面積をA_1，A_2，ヤング率をE_1，E_2とする．また，点A，B，C，D，Eはすべて回転自由(部材BDとCEには軸力のみ発生する)である．

解法　**例題3.8**と同じように考える．支点Aの反力をA_x，A_yとし，内力N_{BD}およびN_{CE}が正であると仮定すると，右図下のような系として考えることができる．この系における力のつりあいは

$$A_y - N_{BD} + N_{CE} - P = 0 \qquad (1)$$

$$A_x = 0$$

モーメントのつりあいは，たとえば，点Aまわりで

$$-N_{BD}a + N_{CE}(a+b) - P(a+b+c) = 0 \qquad (2)$$

である．未知の量がA_yと内力N_{BD}とN_{CE}に対して式が二つしかないのでこの場合も不静定である．ここで，式(1)と(2)で**例題3.8**の対応する式と比較すると，内力N_{BD}にマイナス符号が付いていることに注意しよう．これは$N_{BD}>0$と仮定しているが，系全体のつりあいからみるとPと同じ向きになっていることによる．

変形については，部材BDとCEは内力N_{BD}とN_{CE}で

$$\lambda_{BD} = \frac{N_{BD}l_1}{A_1E_1},\ \lambda_{CE} = \frac{N_{CE}l_2}{A_2E_2}.$$

だけ変形する．この二つの変形量の間に成立しなければならない条件を考えてみよう．

部材ABCFは剛体であることから，部材BDとCEが変形することによって点Aまわりに(剛体棒の元の位置を基準に時計まわりに)角度θだけ傾斜する．傾斜することについては**例題3.8**と同じであるが，**例題3.8**では両者はいわゆる「伸びる」としていたのに対して，この例題ではλ_{BD}とλ_{CE}の一方が正でありもう一方が負であるという点である．すなわち，一方が「伸び(変位は正)」でもう一方が「縮む(変位は負)」と仮定する．ここでは，$\lambda_{BD}<0$，$\lambda_{CE}>0$を仮定すると，

$$\tan\theta = \frac{-\lambda_{BD}}{a} = \frac{\lambda_{CE}}{a+b}$$

の関係が成り立たなければならない．ここで，**例題3.8**の対応する式と比較するとλ_{BD}にマイナス符号が付いている．この関係から，

$$\lambda_{BD}(a+b) + \lambda_{CE}a = 0$$

となり，これにλ_{BD}とλ_{CE}の式を代入すると，

$$\frac{(a+b)l_1}{A_1E_1}N_{BD} + \frac{al_2}{A_2E_2}N_{CE} = 0 \qquad (3)$$

が得られる．式(2)，式(3)を連立して解くと内力N_{BD}とN_{CE}は

$$N_{BD} = -\frac{a(a+b+c)l_2A_1E_1}{a^2l_2A_1E_1 + (a+b)^2l_1A_2E_2}P, \quad N_{CE} = \frac{(a+b)(a+b+c)l_1A_2E_2}{a^2l_2A_1E_1 + (a+b)^2l_1A_2E_2}P$$

となる．この場合$N_{BD}<0$であることがわかる．すなわち，N_{BD}は負の内力であり，部材BDを縮めるような力になっていることが分かる．ついでに，内力N_{CE}の大きさも符号も変わらない．■

例題3.8と**例題3.9**に関する補足

さて，先に挙げた

$$\tan\theta = \frac{-\lambda_{BD}}{a} = \frac{\lambda_{CE}}{a+b} \text{（例題3.9より）}$$

について考えてみよう．**例題3.8**の対応する式

$$\tan\theta = \frac{\lambda_{BD}}{a} = \frac{\lambda_{CE}}{a+b} \text{（例題3.8より）}$$

と比較するとλ_{BD}にマイナス符号が付いている．このことは，部材の変形と剛体棒の傾斜との関係から定まる．θは剛体棒の傾斜角を表しているので部材が伸びるか縮むかはどうでもいい．すなわち，本来は点Bと点Cの移動量を下向きに$\delta_B(>0)$と$\delta_C(>0)$とすると，

$$\tan\theta = \frac{\delta_B}{a} = \frac{\delta_C}{a+b}$$

が成り立てばよい．では，この移動量を部材の変位量で表すとどうなるだろうか．

例題3.8では部材BDとCEは剛体棒に対して同じ側にあるので，部材の変形量と剛体棒の注目している点の移動量は同じ，すなわち，$\delta_B=\lambda_{BD}(>0)$および$\delta_C=\lambda_{CE}(>0)$である．一方，**例題3.9**では部材BDはCEと同じ側にないので$\lambda_{CE}>0$なら$\lambda_{BD}<0$であり，剛体棒の点Bと点Cの移動量を部材の変形量で表すとき$\delta_B=-\lambda_{BD}(>0)$，$\delta_C=\lambda_{CE}(>0)$で表現しなければならない．

例題3.10　右図のような構造の部材BDとCEにΔT_1とΔT_2の温度変化が生じた．このとき部材に発生する内力N_{BD}とN_{CE}を求めなさい．ただし，部材ABCFは剛体であり，部材BD，CEの断面積をA_1，A_2，ヤング率をE_1，E_2，線膨張係数をα_1，α_2とする．また，点A, B, C, D, Eはすべて回転自由(部材BDとCEには軸力のみ発生する)である．

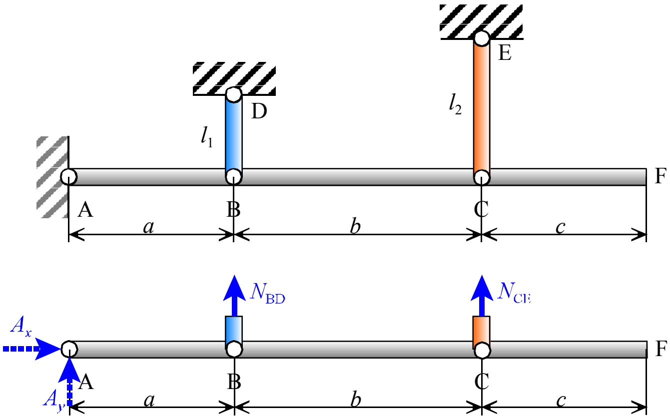

図3

解法　支点Aの横方向と縦方向に反力が発生する．この反力をA_x，A_yとし，内力N_{BD}およびN_{CE}が正であると仮定すると，右図下のような系として考えることができる．この系における力のつりあいは

$$A_y+N_{BD}+N_{CE}=0 \qquad (1)$$

$$A_x=0$$

モーメントのつりあいは，たとえば，点Aまわりで

$$N_{BD}a+N_{CE}(a+b)=0 \qquad (2)$$

である．未知の量が支点反力A_yと内力N_{BD}およびN_{CE}に対して式が二つしかないので明らかに不静定である．そこで変形の条件を考えると，部材BDとCEは内力N_{BD}とN_{CE}で

$$\frac{N_{BD}l_1}{A_1E_1},\ \frac{N_{CE}l_2}{A_2E_2}.$$

だけ変形する．一方，部材BDとCEにはΔT_1とΔT_2の温度変化が生じているので熱ひずみ$\alpha_1\Delta T_1$と$\alpha_2\Delta T_2$が生じ，自由熱膨張量は$\alpha_1\Delta T_1 l_1$と$\alpha_2\Delta T_2 l_2$となるから，これらを内力による変形量に加えると，

$$\lambda_{BD}=\frac{N_{BD}l_1}{A_1E_1}+\alpha_1\Delta T_1 l_1,\ \lambda_{CE}=\frac{N_{CE}l_2}{A_2E_2}+\alpha_2\Delta T_2 l_2$$

となる(**例題3.5**(p.41)参照).

部材BDとCEが変形することによって点Aまわりに(剛体棒の元の位置を基準に時計まわりに)角度θだけ傾斜するから

$$\tan\theta=\frac{\lambda_{BD}}{a}=\frac{\lambda_{CE}}{a+b}$$

の関係が成り立たなければならない．この関係から，

$$\lambda_{BD}(a+b)-\lambda_{CE}a=0$$

これにλ_{BD}とλ_{CE}の式を代入すると，

$$\frac{(a+b)l_1}{A_1E_1}N_{BD}-\frac{al_2}{A_2E_2}N_{CE}=-(a+b)\alpha_1\Delta T_1 l_1+a\alpha_2\Delta T_2 l_2 \qquad (3)$$

が得られる．式(2)，式(3)を連立して解くと内力N_{BD}とN_{CE}を求めることができ，

$$N_{BD}=-\frac{A_1A_2E_1E_2(a+b)Q}{a^2l_2A_1E_1+(a+b)^2l_1A_2E_2},\quad N_{CE}=\frac{A_1A_2E_1E_2aQ}{a^2l_2A_1E_1+(a+b)^2l_1A_2E_2}$$

となる．ここで，

$$Q=(a+b)\alpha_1\Delta T_1 l_1-a\alpha_2\Delta T_2 l_2$$

である．

さて，$\Delta T_1=0$，$\Delta T_2>0$の場合を考えてみよう．直感的に，部材BDは部材CEが伸びることによって長さが増加し，逆に部材CEは部材BDの抵抗で自由熱膨張できない．したがって，部材BDには正の内力が，部材CEには負の内力が生じなければならない．今の場合，$\Delta T_1=0$，$\Delta T_2>0$であるから，$Q=-a\alpha_2\Delta T_2 l_2(<0)$となり，$N_{BD}>0$，$N_{CE}<0$である．

逆に$\Delta T_1>0$，$\Delta T_2=0$の場合，$Q=(a+b)\alpha_1\Delta T_1 l_1(>0)$なので$N_{BD}<0$，$N_{CE}>0$である．

内力が発生しない場合があることもわかる．内力が発生しないためには$Q=0$であればよいので，二つの部材の温度変化が

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}=\frac{a\alpha_2 l_2}{(a+b)\alpha_1 l_1}$$

という比を満足すればよい．■

例題3.11　右図のような構造の部材BDとCEにΔT_1とΔT_2の温度変化が生じた．このとき部材に発生する内力N_{BD}とN_{CE}を求めなさい．ただし，部材ABCFは剛体であり，部材BD，CEの断面積をA_1，A_2，ヤング率をE_1，E_2，線膨張係数をα_1，α_2とする．また，点A，B，C，D，Eはすべて回転自由(部材BDとCEには軸力のみ発生する)である．

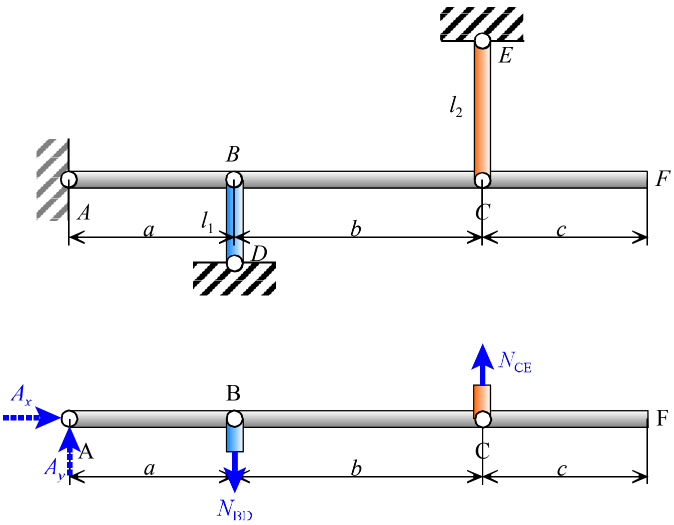

図4

解法　支点Aの反力をA_x，A_yとし，内力N_{BD}およびN_{CE}が正であると仮定すると，右図下のような系として考えることができる．この系における力のつりあいは，

$$A_y-N_{BD}+N_{CE}=0 \qquad (1)$$

$A_x=0$

モーメントのつりあいは，たとえば，点Aまわりで

$$-N_{BD}a+N_{CE}(a+b)=0 \quad (2)$$

である．部材BDとCEはの変形量は内力N_{BD}とN_{CE}によるものと自由熱膨張によるものの和なので，

$$\lambda_{BD}=\frac{N_{BD}l_1}{A_1E_1}+\alpha_1\Delta T_1 l_1,\ \lambda_{CE}=\frac{N_{CE}l_2}{A_2E_2}+\alpha_2\Delta T_2 l_2$$

となる．

部材BDとCEが変形することによって点Aまわりに(剛体棒の元の位置を基準に時計まわりに)角度θだけ傾斜するから

$$\tan\theta=\frac{-\lambda_{BD}}{a}=\frac{\lambda_{CE}}{a+b}$$

の関係が成り立たなければならない(λ_{BD}にマイナス符号を付けている理由は**例題3.9**の下の**補足**を参照)．この関係から，

$$\lambda_{BD}(a+b)+\lambda_{CE}a=0$$

これにλ_{BD}とλ_{CE}の式を代入すると，

$$\frac{(a+b)l_1}{A_1E_1}N_{BD}+\frac{al_2}{A_2E_2}N_{CE}=-\left[(a+b)\alpha_1\Delta T_1 l_1+a\alpha_2\Delta T_2 l_2\right] \quad (3)$$

が得られる．式(2)，式(3)を連立して解くと内力N_{BD}とN_{CE}を求めることができ，

$$N_{BD}=-\frac{A_1A_2E_1E_2(a+b)Q}{a^2l_2A_1E_1+(a+b)^2l_1A_2E_2},\ N_{CE}=-\frac{A_1A_2E_1E_2aQ}{a^2l_2A_1E_1+(a+b)^2l_1A_2E_2}$$

となる．ここで，

$$Q=(a+b)\alpha_1\Delta T_1 l_1+a\alpha_2\Delta T_2 l_2$$

である．

さて，$\Delta T_1=0$，$\Delta T_2>0$の場合を考えてみよう．直感的に，部材BDは部材CEが伸びることによって長さが短くなり，逆に部材CEは部材BDの抵抗で自由熱膨張できない．したがって，部材BDには負の内力が，部材CEにも負の内力が生じなければならない．今の場合，$\Delta T_1=0$，$\Delta T_2>0$であるから，$Q=a\alpha_2\Delta T_2 l_2(>0)$となり，$N_{BD}<0$，$N_{CE}<0$である．$\Delta T_1>0$，$\Delta T_2=0$の場合も$Q=(a+b)\alpha_1\Delta T_1 l_1(>0)$なので$N_{BD}<0$，$N_{CE}<0$である．

二本の部材に内力が発生しないためには$Q=0$であればよいので，二つの部材の温度変化が

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = -\frac{a\alpha_2 l_2}{(a+b)\alpha_1 l_1}$$

という比を満足すればよい．すなわち，一方の部材の温度が上がるときもう一方の部材の温度は下がらなければならない．■