「材料力学」
-はりのコツ-

石田良平

平成 20 年 7 月 1 日

目 次

1　静定はりの SFD と BMD

1.1　例題 1:集中荷重を受ける両端単純支持はり

図 1 に示すはりの SFD、BMD を求めなさい。

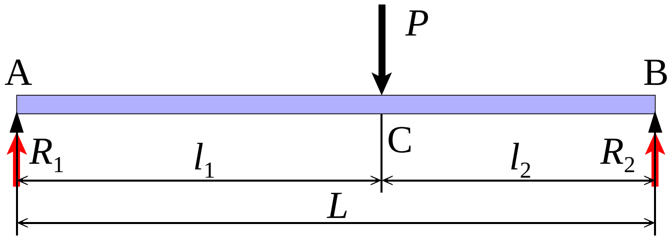


図 1: 集中荷重を受ける両端単純支持はり

解　点 C で仮想的に分割すると、図 2 の下のようになります。

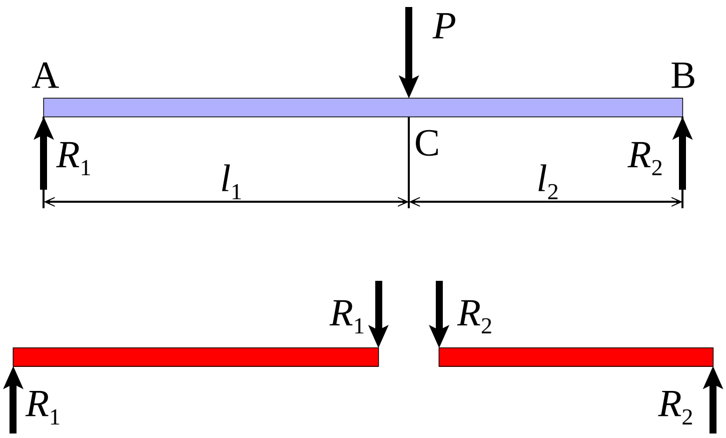


図 2: 点 C で分割

反力 R_1 と R_2 の和は明らかに

$$R_1 + R_2 = P \tag{1}$$

式 (1) で未知量は R_1 と R_2。一方、式は一つなので、解けないことになります。そこで、もう一つモーメントの釣り合い式が必要になります。モーメントの釣り合いを考えるときはどの点を中心にしてもよいのですが、ここでは点 C 周りの釣り合いを考えると、モーメントの釣り合い式は

$$R_1 l_1 = R_2 l_2 \tag{2}$$

式 (1) と (2) より、R_1 と R_2 は

$$R_1 = \frac{l_2 P}{L} \quad , \quad R_2 = \frac{l_1 P}{L} \tag{3}$$

となります。これで反力が得られました。次に、SFD を描きます。このとき、せん断力の正負が問題になります。はりのせん断力の正負の定義を思い出してください。定義によれば、A-C 間ではせん断力の符号は正。

C-B 間では負ですね。したがって、SFD は図 3 のようになります。$Q_{AC} = R_1$ は A-C 間に働くせん断力、$Q_{CB} = -R_2(= R_1 - P)$ は C-B 間に働くせん断力になります。

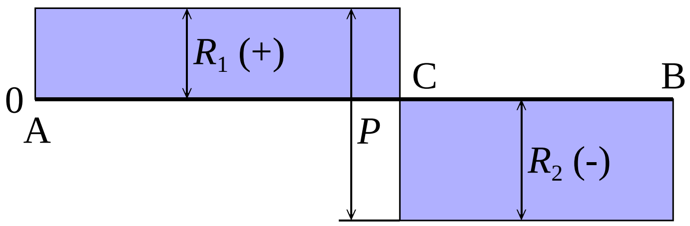


図 3: SFD

学生:先生！質問です。今の話だと、反力の正負を考えるとき、上向きを正としているように思いますが …?
センセ:そのとおりです。暗黙のうちに上向きを正としています。
学生:反力の正負の予想が着かない場合はどうしたらよいのですか？
センセ:それでは、次のように考えてみましょう。今の問題で、反力 R_2 を下向きとして仮定しましょう。R_2 で反力の大きさを表し、+-の符号で向きを表すことにして、式 (1) と (2) の R_2 を $-R_2$ に置き換えると $R_1 - R_2 = P, R_1 l_1 = -R_2 l_2$ となりますね。この式から $R_1 = l_2 P/L, R_2 = -l_1 P/L$ となります。先の式 (3) と比べると、反力 R_2 の符号が逆になっています。これは、反力 R_2 が仮定した向きと逆であることを表しています。
学生:それでは、SFD で点 A でのせん断力は反力の符号と一致していますが、点 B では反力が正なのにせん断力が負になっています。これはどうしてですか？
センセ:うーん。いい質問ですね。せん断力の定義を思い出せば答えは見えると思うけどねぇ。せん断力というのは内力ですね。一方、反力というのは外力ですね。点 A では外力としての反力 R_1 は上向きです。この点から右に Δx だけ離れた点で切断してみると、同じ大きさの力が下向きに作用しています。この下向きの力が内力としてのせん断力です。せん断力の定義から考えると、明らかに正ですね。逆に、点 B から考えてみましょう。点 B でも反力として上向きに R_2 が作用しています。この点から左に Δx 離れた点では同じ大きさの力が下向きに作用しています。ところが、点 A から考えた場合と逆になっていますね。せん断力の定義からわかるように、このせん断力は明らかに負ですね。

まあ、他にいろいろ質問もあると思いますが、今までの話を図 4 にまとめてみましたので参考にしてください。そろそろ次の話に移ります。

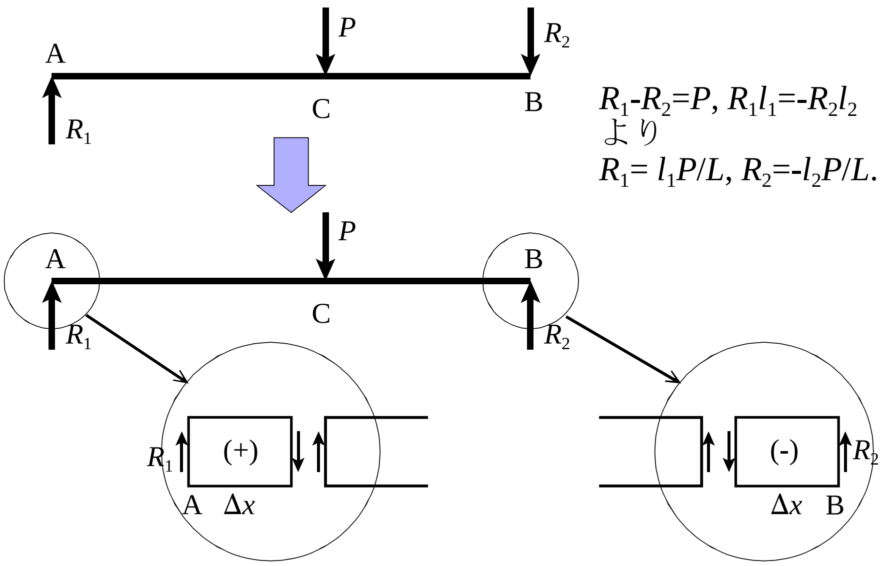


図 4: 反力の考え方とせん断力の正負

さて、次の BMD を描きます。BMD を描くために、曲げモーメントの式を求めます。曲げモーメントの正

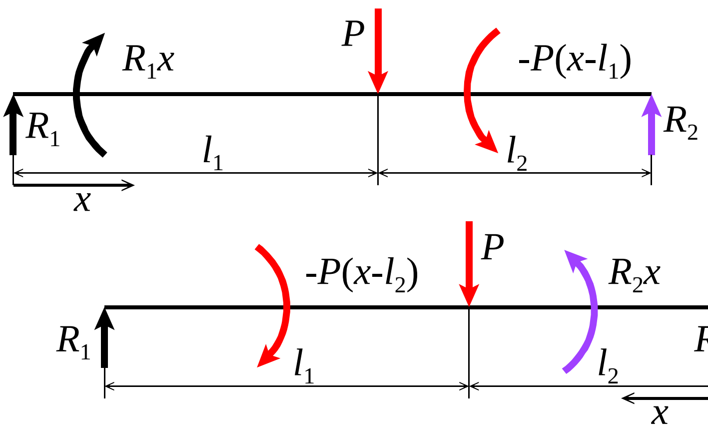


図 5: 曲げモーメントの正負の定義

負の定義を思い出してください。定義では、
「はりを下に凸に曲げようとする曲げモーメントを正、その逆を負」
としています。この定義は万国共通のようですが、ある意味で混乱します。その理由は図 2 の下のようなせん断力の定義が邪魔をしているようです。また、曲げモーメントははりに沿って変化しているのに、定義では一定の曲げモーメントが作用しているようになっているなどです。ところが、ある断面での曲げモーメントとは、
「その断面を通る軸についてその断面の**一方の面**に対する外力のモーメントの代数和」
です。ここで大切なことは**一方の面**というところです。この曲げモーメントの定義にあわせ、先の正負の定義に矛盾しないように、
「はりに沿ってとった座標軸上の任意点 $x = x_0$ を考え、この点を仮想的な支点として、$0 < x < x_0$ の範囲内にある荷重によって同じ範囲内にあるはりの一部を上に曲げようとする場合を正、その逆を負」
と定義します。この定義を図示すると図 5 のようになります。重要な点は、図 5 の上の場合は考えている点の右側、下の場合は左側にある荷重によるモーメントは考える必要はありません。これが**一方の面**を太字で書いた理由です。ただし、座標のとりかたに注意してください。

さて、新しい定義に基づいて今の問題を考えてみましょう。いま、座標として、点 A を原点とし、はりに沿って右側に x 軸をとります。まず、A-C 間で考えれば荷重による曲げモーメントは R_1x です。この曲げモーメントは点 x を中心にはりを上に曲げようとしているので、明らかに正です。したがって、

$$M_{AC} = R_1x \tag{4}$$

です。$x = 0$ は単純支持点なので曲げモーメントは零ですね。次に C-B 間で考えれば、新たに荷重 P による曲げモーメントが加わります。荷重 P による曲げモーメントは $P(x - l_1)$ です。この曲げモーメントは新しい定義によれば負です。したがって、

$$M_{CB} = R_1x - P(x - l_1) \tag{5}$$

になります。式 (5) に $x = l_1 + l_2$ を代入して式 (3) を考慮すると明らかに零になりますね。

さて、BMD を描く前に、点 B を原点として左向きに x の正の方向をとった場合 (図 5 の下の場合) を考えてみましょう。この場合はまず反力 R_2 による曲げモーメントを考えます。曲げモーメントの大きさは R_2x で、符号は正になります。したがって、

$$M_{BC} = R_2x \tag{6}$$

$x > l_2$ では、$P(x - l_2)$ の大きさの負の曲げモーメントが新たに作用しますから、

$$M_{CA} = R_2x - P(x - l_2) \tag{7}$$

となります。式 (4) と (7) からは同じ BMD が描かれます。式 (5) と (6) も同じです。試しに式 (5) の x を $L-x$ に置き換えると、式 (6) を導くことができます。

以上のことから BMD を描くと図 6 のようになります。

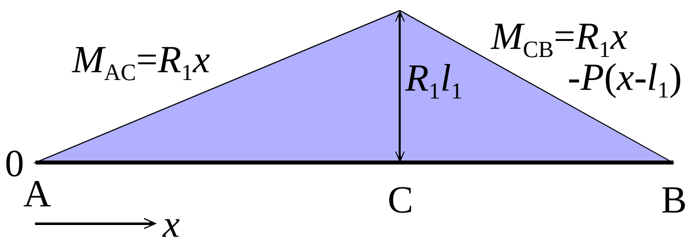


図 6: BMD

1.2 例題 2:分布荷重を受ける両端単純支持はり

図 7 に示すはりの SFD、BMD を求めなさい。

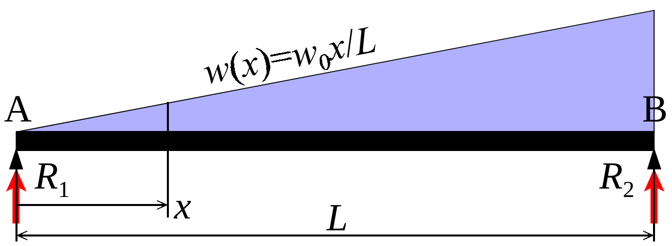


図 7: 分布荷重を受ける両端単純支持はり

解 まず、総荷重 P を求めます。三角形の面積は $w_0L/2$ なので、総荷重は $P=w_0L/2$ になります。したがって、力の釣り合いは

$$R_1+R_2=P=\frac{1}{2}w_0L \tag{8}$$

この荷重を集中荷重として考えたときの荷重の作用点は三角形の重心位置になるので、$x_G=2L/3$(点 A からの距離) です。モーメントの釣り合い式として点 A 回りの釣り合いを考えると、

$$R_2L=\frac{2}{3}PL=\frac{1}{3}w_0L^2 \tag{9}$$

したがって、R_1 と R_2 は

$$R_1=\frac{1}{6}w_0L \quad , \quad R_2=\frac{1}{3}w_0L \tag{10}$$

となります。座標原点から x までの総荷重は $w_0x/2$ で、この荷重は定義によって負の向きに作用します。このことから、せん断力の分布は

$$Q=R_1-\frac{w_0x}{L}\times\frac{x}{2}=\frac{w_0}{6L}(L^2-3x^2) \tag{11}$$

となります。式 (11) から明らかなように、$x=L$ では $Q=-w_0L/3=-R_2$ です。

次に曲げモーメントを求めます。反力 R_1 による曲げモーメントは R_1x ですね。座標原点から x までの総荷重は $w_0x/2$ で、この荷重の作用点は $2x/3$ になります。ところが、曲げモーメントは今考えている点と荷重作用点までの長さが考えることになりますから、$x - 2x/3 = x/3$ となります。結局、

$$M = R_1x - \frac{w_0x}{L} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{w_0x}{6L}(L^2 - x^2) \tag{12}$$

となります。式 (12) から明らかなように、$x = L$ で曲げモーメントは零になります。せん断力が零の点、すなわち、$x = L/\sqrt{3}$ で曲げモーメントは最大値をとり、その値は $M_{max} = w_0L^2/9\sqrt{3}$ になります。ちなみに、式 (11) および (12) から SFD と BMD を描くと、図 8 のようになります。

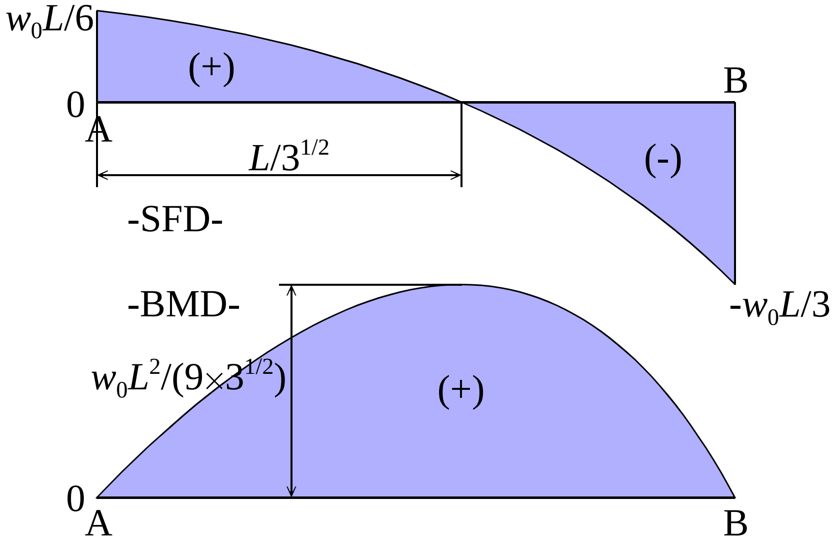


図 8: SFD と BMD

学生:ちょっと待ってください。わからないのは w_0 のことです。総荷重と言っていた $w_0L/2$ の単位は明らかに $[N]$ とかの力の単位だと思います。でも、そうすると w_0 の単位は $[N/m]$ というような単位長さあたりの力ですよね。単位長さあたりの力って考えにくいんですけど。
センセ:$w_0L/2$ は言うように力の単位で、w_0 は単位長さあたりの力の単位を持っています。直感的に理解しづらいですね。
こう考えてみましょう。図で見るとはりには長さと高さしかないみたいですが、実際のはりには幅 (奥行き) がありますね。「幅 × はりの長さ」ではりの上面の面積が出ます。この面積の部分に圧力が作用しているとすると、「幅 × はりの長さ × 圧力 = 力」です。さて、ここで、ちょっと書き直すと「(奥行き × 圧力)× はりの長さ = 力」となり、「奥行き × 圧力」は単位長さあたりの力になります。よろしいか？
学生:はぁ。
センセ: …
学生:でも、はりに作用する圧力、というともっと考えにくいような …
センセ:じゃあ、はりの上に水を入れた水槽を載せているような場合を考えてみてください。水槽に入っている水の重量は水槽の奥行き、長さ、水の高さを B、L、H として水の密度を ϱ とすると、$\varrho gBLH$ ですね。この重量が長さ L のはりの上面に全長にわたって作用するのですから、これを L で割ると $\varrho gBLH/L = \varrho gHB$ となります。この量の単位は単位長さあたりの力です。

1.3 例題 3:集中モーメントを受けるはり

図 9 に示すような、はりの途中にモーメント M_0 を受けるはりの SFD と BMD を求めてみましょう。

解まず、反力を求めます。この問題では、はりに荷重は作用していないので、力のつりあいは

$$R_1 + R_2 = 0 \tag{13}$$

です。モーメントのつりあいを点 B で考えることにすると、

$$R_1L + M_0 = 0 \tag{14}$$

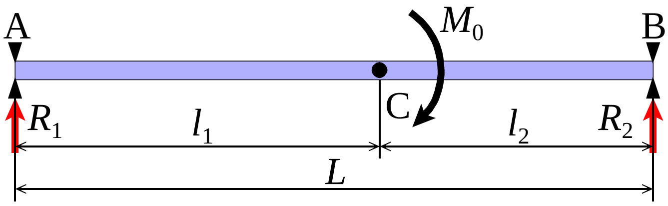


図 9: 集中モーメント M_0 を受けるはり

になります。式 (13) と (14) より、

$$R_1 = -\frac{M_0}{L} \quad , \quad R_2 = \frac{M_0}{L} \tag{15}$$

このことから、せん断力の分布は

$$Q = -\frac{M_0}{L} \tag{16}$$

となって一定値です。次に曲げモーメントですが、点 A を原点とすると、$0 \leq x < l_1$ では

$$M_{AC} = R_1 x = -\frac{M_0 x}{L} \tag{17}$$

$l_1 < x \leq L$ では

$$M_{CB} = R_1 x + M_0 = -\frac{M_0 x}{L} + M_0 \tag{18}$$

となります。SFD と BMD を図 10 に示します。

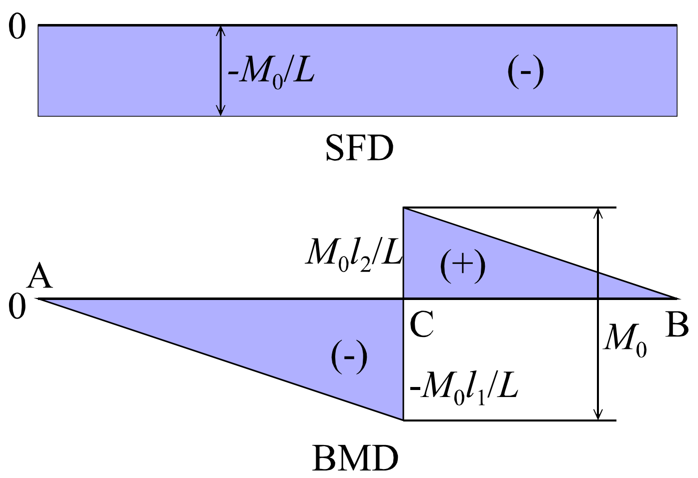


図 10: 集中モーメント M_0 を受けるはりの SFD と BMD

学生:わかりません！
センセ:(ドキッ!) え、な、な、何が?
学生:集中荷重や分布荷重が作用する場合の話はなんとかわかったような気がしますが、はりの途中にモーメントを受ける場合の話がさっぱりです。
センセ:さっぱりといわれても … 。具体的に何がわからないかがわからないと私はどう答えていいのかわからないのですが … 。
学生:まず、曲げモーメントの場合の正と負はどうにか理解したつもりです。その理解から考えると、モーメントは作用点の左側では負、右側では正になります。この理解は正しいですか?
センセ:正しいと言いたいのですが、君の今の話は曲げモーメントの話であってモーメントの話ではありませんね。
学生:???
センセ:ここでは便宜上時計回りの回転を生じさせるモーメントを正としておきましょう。こうしておくと、作用しているモーメントは AC 間であろうと CB 間であろうと正ということになりますね。
学生:???
センセ:モーメントと曲げモーメントをごっちゃにしないでください。モーメントは剛体としての回転を支配します。反力を求める際にははりを剛体として考えていますので「モーメントのつりあい」です。曲げモーメントの場合ははりの応力や変形に関連します。曲げモー

メントにも「力 × 作用点までの距離」という共通の概念を含んでいるので「モーメント」という言葉が入っています (と考えられます)。逆に、普通のモーメントと区別するために頭に「曲げ」がついているとも考えられます。ただし、今の話は正確に調べたわけではないので怪しいですが … 。
少しはっきりさせましょう。多分、この辺がもやもやしているのでしょう。

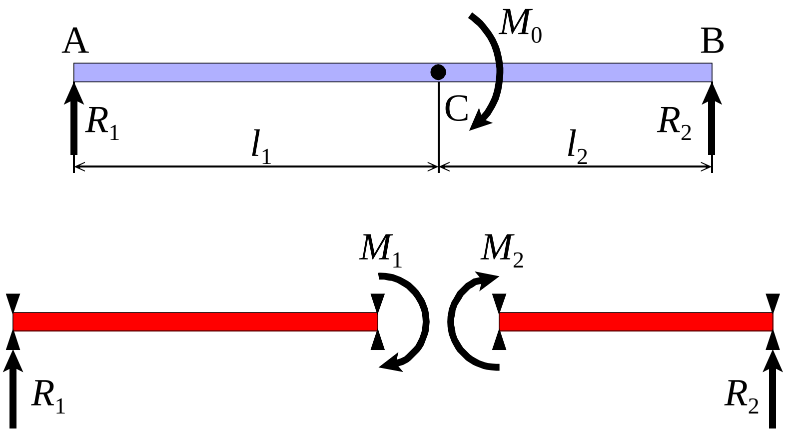


図 11: 集中モーメント M_0 を受けるはりの点 C での分割

反力を求める際に、式 (14) のように書きました。これをもう少し砕いて考えます。まず、モーメント M_0 を $M_0 = M_1 + M_2$ と表し、点 C ではりを切断して回転支持支点をつけます。左のはりにはモーメント M_1 が、右のはりには M_2 が作用しているとして考えます。これは、**例題 1** で考えたことをモーメントで考えることになります。図 11 を参照してください。

このとき、M_1 も M_2 も時計回りなので正です。はりの反力を上向きに仮定して左側のはりについて点 C でのモーメントのつりあいを考えると反力 R_1 によるモーメントは時計回りなので $R_1 l_1 + M_1 = 0$ です。同じようにして右側のはりについては反力 R_2 によるモーメントは反時計回りなので $-R_2 l_2 + M_2 = 0$ になります。この二つの式を足すと、

$$R_1 l_1 - R_2 l_2 + (M_1 + M_2) = 0$$

となり、

$$R_1 l_1 - R_2 l_2 + M_0 = 0$$

が得られます。この式を式 (13) と連立させれば R_1 と R_2 を求めることができます。ちなみに、これら二つの式から結局 $R_1 L + M_0 = 0$ となって、式 (14) が得られることがわかります。どうですか?モヤモヤは晴れましたか?

学生:なんか、だまされているような …

センセ: …

1.4 一般的な分布荷重の場合

図 12 に示すような分布荷重 $w(x)$ が長さ L のはりに作用する場合を考えます。関数 $w(x)$ は任意とし、単位長さあたりの力の単位を持っています。座標系として点 A から図のように x をとります。分布荷重 $w(x)$ によってはりに作用する総荷重 P は、座標軸と関数 $w(x)$ で囲まれる部分の面積の式から

$$P = \int_0^L w(x)dx \tag{19}$$

になります。力のつりあい式は

$$R_1 + R_2 = P \tag{20}$$

になります。次に、モーメントのつりあい式を求めます。x から幅 dx の微小部分を考えます。この微小部分の荷重は $w(x)dx$ です。モーメントとして点 A から微小部分の中央までの距離は $x + dx/2$ ですから、積をとると

$$w(x)dx(x + dx/2)$$

さらに dx^2 の項を省略すると、

$$w(x)xdx$$

となります。この量は、荷重 $w(x)dx$ による点 A まわりのモーメントになります。これを $x=0$ から $x=L$ まで積分すると点 A まわりの総荷重によるモーメントが得られます。このことからモーメントのつりあい式をつくると (混乱を避けるため、以後、積分変数としては x を用いないことにします)

$$\int_0^L w(\xi)\xi d\xi = R_2 L \tag{21}$$

以上の式から

$$R_1 = \int_0^L w(\xi)d\xi - R_2 \quad , \quad R_2 = \frac{1}{L}\int_0^L w(\xi)\xi d\xi \tag{22}$$

となります。あるいは、

$$R_1 = \frac{1}{L}\int_0^L w(\xi)(L-\xi)d\xi \quad , \quad R_2 = \frac{1}{L}\int_0^L w(\xi)\xi d\xi \tag{23}$$

とも書けます。

せん断力と曲げモーメントの分布を求めます。図 13 を参照してください。原点から積分変数として ξ をとるものとします。点 C でのせん断力 Q は

$$Q = R_1 - \int_0^x w(\xi)d\xi \tag{24}$$

で得られます。

次に、曲げモーメントを求めますが、この場合は上の例題で述べたように、考えている点 (C) から荷重 ($w(\xi)d\xi$) の重心までの距離が必要になります。座標原点からの距離ではないことに注意してください。考えている点から荷重の重心までの距離は $x-\xi$ になりますから、曲げモーメントは

$$M = R_1 x - \int_0^x w(\xi)(x-\xi)d\xi \tag{25}$$

で求めることができます。あるいは式 (23) を考慮すると、

$$M = \frac{x}{L}\int_0^L w(\xi)(L-\xi)d\xi - \int_0^x w(\xi)(x-\xi)d\xi \tag{26}$$

となります。

さて、今までのことを具体的な分布荷重として**例題 2** の際の $w(x) = w_0 x/L$ をつかって考えてみます。式 (23) に $w(x) = w_0 x/L$ を代入すると、反力は次のように得られます。

$$R_1 = \frac{1}{6}w_0 L \quad , \quad R_2 = \frac{1}{3}w_0 L \tag{27}$$

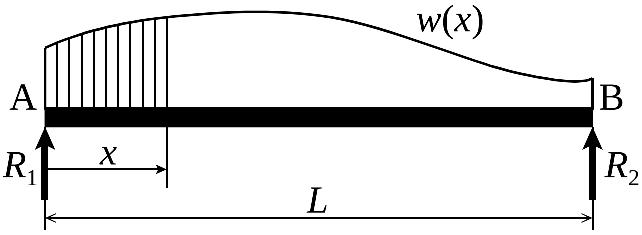


図 12: 分布荷重を受ける両端単純支持はり

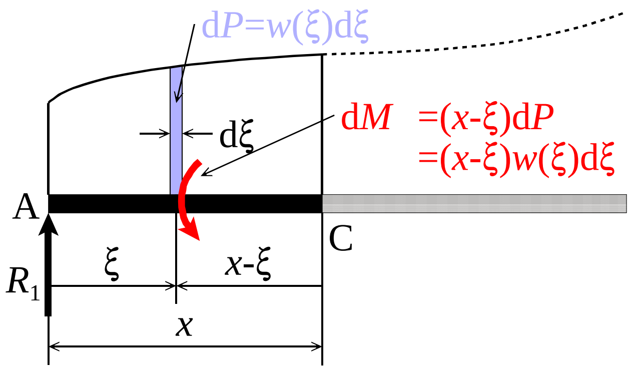


図 13: 分布荷重を受ける両端単純支持はりの支点 A 付近

せん断力は式 (24) から

$$Q = \frac{1}{6}w_0L - \frac{w_0x^2}{2L} \tag{28}$$

曲げモーメントは式 (25) から

$$M = \frac{1}{6}w_0Lx - \frac{w_0}{L}\int_0^x \xi(x-\xi)d\xi$$

となりますから、

$$M = \frac{1}{6}w_0Lx - \frac{w_0x^3}{6L} \tag{29}$$

が得られます。式 (27)-(29) は式 (10)-(12) と同じですね。

センセ:わかりましたか？
学生: …
センセ: … 簡単な積分の計算なのですが …

2　静定はりのたわみ (はりの微分方程式からの解)

2.1　例題 1:集中荷重を受ける両端単純支持はり

図 14 に示すはりのたわみを求めなさい。

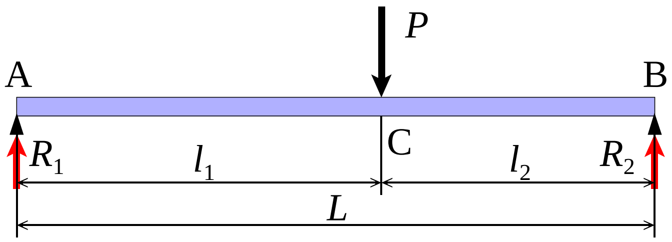


図 14: 集中荷重を受ける両端単純支持はり

解　さて、いきなり面倒な問題に挑戦です。前節で、同じはりに対する曲げモーメントの分布を求めました。曲げモーメント分布は式 (4) と (5) で与えられます。これらを再記すると、

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= R_1 x \\ M_{CB}(x) &= R_1 x - P(x - l_1) \end{aligned}$$

曲げ剛性を EI で表し、たわみ関数を $y(x)$ とすると、たわみの微分方程式は次式で表されます。

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \tag{30}$$

式 (30) に $M_{AC}(x)$ を代入して積分すれば、AC 間において

$$\frac{dy_{AC}(x)}{dx} = -\frac{1}{2EI} R_1 x^2 + c_1 \tag{31}$$

$$y_{AC}(x) = -\frac{1}{6EI} R_1 x^3 + c_1 x + c_2 \tag{32}$$

式 (30) に $M_{CB}(x)$ を代入して積分すれば、同様に CB 間において

$$\frac{dy_{CB}(x)}{dx} = -\frac{1}{2EI} R_1 x^2 + \frac{1}{2EI} P(x - l_1)^2 + c_1' \tag{33}$$

$$y_{CB}(x) = -\frac{1}{6EI} R_1 x^3 + \frac{1}{6EI} P(x - l_1)^3 + c_1' x + c_2' \tag{34}$$

式 (31)-(34) には全部で四つの積分定数が含まれています。これらの積分定数はたわみとたわみ角に対する境界条件より決められます。境界条件は、はりの両端ではたわみが零、点 C($x = l_1$) でたわみとたわみ角が連続、という条件です。これらを式で表すと、

$$x = 0 \quad ; \quad y_{AC}(0) = 0 \tag{35}$$

$$x = L \quad ; \quad y_{CB}(L) = 0 \tag{36}$$

$$x = l_1 \quad ; \quad \frac{dy_{AC}(l_1)}{dx} = \frac{dy_{CB}(l_1)}{dx} \tag{37}$$

$$x = l_1 \quad ; \quad y_{AC}(l_1) = y_{CB}(l_1) \tag{38}$$

まず、式 (32) と (35) より明らかに

$$c_2 = 0 \tag{39}$$

式 (34) と (36) より、

$$-\frac{1}{6EI}R_1L^3+\frac{1}{6EI}Pl_2^3+c_1'L+c_2'=0 \tag{40}$$

式 (31)、(33)、(37) より、

$$c_1-c_1'=0 \tag{41}$$

式 (32)、(34)、(38) より、

$$c_1l_1-c_1'l_1-c_2'=0 \tag{42}$$

式 (40)-(42) から、

$$c_1=c_1'=\frac{1}{6EI}R_1L^2-\frac{1}{6LEI}Pl_2^3 \quad , \quad c_2'=0$$

式 (3) を代入すると、

$$c_1=c_1'=\frac{Pl_1l_2}{6EIL}(l_1+2l_2) \quad , \quad c_2'=0 \tag{43}$$

となります。式 (43) を式 (31)-(34) に代入して整理すれば、

$$\begin{aligned}\frac{dy_{AC}(x)}{dx} &= \frac{Pl_2}{6EIL}[-3x^2+l_1(l_1+2l_2)] && (44)\\ y_{AC}(x) &= \frac{Pl_2x}{6EIL}[-x^2+l_1(l_1+2l_2)] && (45)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_{CB}(x)}{dx} &= \frac{Pl_1}{6EIL}[3(L-x)^2-l_2(2l_1+l_2)] && (46)\\ y_{CB}(x) &= \frac{Pl_1(L-x)}{6EIL}[-(L-x)^2+l_2(2l_1+l_2)] && (47)\end{aligned}$$

というふうに各区間でのたわみ角とたわみが求められます。

学生:式の整理の部分は結構めんどくさいですね。どんな風に整理していいのかよくわからないし、式 (31)-(34) の積分定数の代わりに式 (43) をくっつけるだけでよさそうなものなのに …

センセ:整理の部分は確かに面倒ですね。最終的な形として示した式 (44)-(47) も、自分の手元にあった本を参考にして整理しています。積分定数の代わりに式 (43) をくっつけるだけでも一向に構いません。ただ、現時点では皆さんが使っている教科書の例題の答えや練習問題の答えの形に合わせてみれば、自分の計算があっているかどうかがわかります。もっとも、計算間違いがなければの話ですが …
いくつか問題を解いてみて自分の答えに自信がつけば、どんな形で答えを出そうが一向に構いません。極端な話、式 (31)-(34) と境界条件を使って定めた積分定数を書いておくだけでもかまいません。でも、先生によっては「あかん!」という人もいます。

学生:積分定数がいくつか出てきましたが、それらの物理的な意味は何なんですか?

センセ:微分方程式の観点からすれば、c_1x+c_2 なる項はその微分方程式の一般解に相当します。その他の項は特解です。特解だけでは所定の境界条件を満足できない場合がほとんどなので、一般解を含めて満足できるようにします。今の場合の一般解の物理的意味ですが、曲げモーメントの式を一回積分すると dy/dx すなわちたわみ角なので、c_1 や c_1' は剛体回転に関連します。もう一回積分して現れる c_2 や c_2' は剛体変位に関連します。ですから、c_1x+c_2 や $c_1'x+c_2'$ は、「剛体回転による変位 (c_1x や $c_1'x$)+剛体変位 (c_2 や c_2') に関連した量」でしょうか。

学生:材料力学の本によって、座標の取り方がさまざまなのですが、…

センセ:そうですね。それはその本を書いた著者が勉強したときの本に依存しているかもしれませんね。私は都合次第で座標の取り方は結構めちゃくちゃです。そのあたりのことの参考になるかどうかわかりませんが、解き方を二三示しておきます。

参考 1　座標の取り方を変えずに曲げモーメントの式を少し変形する

$M_{CB}(x)$ の式を書き換えると、

$$M_{CB}(x)=\frac{Pl_1}{L}(L-x)=R_2(L-x) \tag{48}$$

はりの微分方程式に代入して積分すると

$$\begin{aligned}\frac{dy_{CB}(x)}{dx} &= -\frac{1}{2EI}R_2(L-x)^2+c_1' && (49)\\ y_{CB}(x) &= \frac{1}{6EI}R_2(L-x)^3-c_1'(L-x)+c_2' && (50)\end{aligned}$$

式 (31),(32),(49),(50) と境界条件式 (35)-(38) から、

$$c_1=\frac{Pl_1l_2}{6EIL}(l_1+2l_2) \quad , \quad c_1'=-\frac{Pl_1l_2}{6EIL}(2l_1+l_2) \quad , \quad c_2=c_2'=0$$

となります。

参考 2　座標の取り方をかえる

$M_{CB}(x)$ の式が式 (48) のように変形できますから、$z=L-x$ と置き換えてもかまわないことになります。こうすると、

$$M_{CB}(x)=\frac{Pl_1}{L}(L-x)=R_2z$$

となります。これは、図 14 の点 B から左に z 座標を取ったことになります。このことによって、はりのたわみの微分方程式も CB 間では

$$\frac{d^2 y_{CB}(z)}{dz^2} = -\frac{M_{CB}(z)}{EI}$$

になります。あとは積分するだけなので省略しますが、境界条件の処理の仕方に注意してください。積分した後、$z = L - x$ を代入して元の座標系に戻す場合は式 (35)-(38) でよいのですが、このまんま、つまり、CB 間の座標を z のまんま境界条件を処理する場合は、境界条件は次のようになります。

$$x = 0 \quad ; \quad y_{AC}(0) = 0 \tag{51}$$
$$z = 0 \quad ; \quad y_{CB}(0) = 0 \tag{52}$$
$$x = l_1, z = l_2 \quad ; \quad \frac{dy_{AC}(l_1)}{dx} = -\frac{dy_{CB}(l_2)}{dz} \tag{53}$$
$$x = l_1, z = l_2 \quad ; \quad y_{AC}(l_1) = y_{CB}(l_2) \tag{54}$$

式 (53) は式 (37) に比べて右辺の符号が変わっています。これは、座標変換によるものであることは簡単に理解できますね。
学生:参考 2 のようなことはめったにしないのでは?
センセ:そうですね。あまりしないですね。ただ、後で話をするかもしれませんが、連続はりの解法でクラペイロンの三モーメントの公式があります。この公式を導く際に座標系のとり方に注意しないとえらいことになります。また、ゲルバーはりのような少し特殊なはりのばあいに使うかもしれませんね。が、とりあえず**参考 2** のほうは「こんなんもありなんや」くらいにしておいてください。

2.2 例題 2:分布荷重を受ける両端単純支持はり

図 15 に示すはりのたわみを求めなさい。

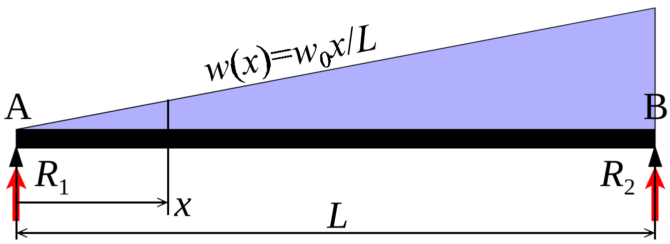


図 15: 分布荷重を受ける両端単純支持はり

解 曲げモーメントの分布は式 (12) で与えられます。これを再記すると、

$$M(x) = \frac{w_0 x}{6L}(L^2 - x^2)$$

となります。これを積分すると

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{w_0 x^2}{24EIL}(2L^2 - x^2) + c_1 \tag{55}$$
$$y(x) = -\frac{w_0 x^3}{360EIL}(10L^2 - 3x^2) + c_1 x + c_2 \tag{56}$$

境界条件は、はりの両端でたわみが零であることから

$$x = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \tag{57}$$
$$x = L \quad ; \quad y(L) = 0 \tag{58}$$

です。式 (56) を式 (57)、(58) に代入して計算すれば c_1、c_2 を求めることができます。ちなみに

$$c_1 = \frac{7}{360EI} w_0 L^3 \quad , \quad c_2 = 0 \tag{59}$$

です。最終的なたわみ角とたわみの関数は次式のようになります。

$$\begin{aligned}\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{w_0}{360EIL}(7L^4 - 30L^2x^2 + 15x^4)\\ y(x) &= \frac{w_0 x}{360EIL}(7L^4 - 10L^2x^2 + 3x^4)\end{aligned}$$

センセ:今度はおとなしいですね。なにか質問は?
学生:うーん。特に ……

2.3　例題 3:集中モーメントを受けるはり

図 16 に示すような、はりの途中にモーメント M_0 を受けるはりのたわみを求めなさい。

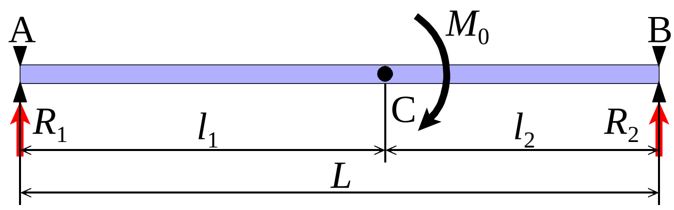


図 16: 集中モーメント M_0 を受けるはり

解　曲げモーメントですが、式 (17) と (18) に示すように、点 A を原点とすると、$0 \leq x < l_1$ では

$$M_{AC}(x) = R_1 x = -\frac{M_0 x}{L}$$

$l_1 < x \leq L$ では

$$M_{CB}(x) = R_1 x + M_0 = -\frac{M_0 x}{L} + M_0$$

となります。

$M_{AC}(x)$ を積分すると、

$$\frac{dy_{AC}(x)}{dx} = \frac{M_0 x^2}{2EIL} + c_1 \tag{60}$$

$$y_{AC}(x) = \frac{M_0 x^3}{6EIL} + c_1 x + c_2 \tag{61}$$

同様に $M_{CB}(x)$ を積分すると、

$$\frac{dy_{CB}(x)}{dx} = \frac{M_0 (L-x)^2}{2EIL} + c_1' \tag{62}$$

$$y_{CB}(x) = -\frac{M_0 (L-x)^3}{6EIL} + c_1' x + c_2' \tag{63}$$

境界条件は式 (35)-(38) と同じですので、再記しません。境界条件式 (35) と (36) から明らかに

$$c_2 = 0 \quad , \quad c_2' = -c_1' L \tag{64}$$

です。残りの境界条件式 (37) と (38) を使うと

$$c_1 = -\frac{M_0}{6EIL}(l_1^2 + 2l_1 l_2 - 2l_2^2) \tag{65}$$

$$c_1' = \frac{M_0}{6EIL}(2l_1^2 - 2l_1 l_2 - l_2^2) \tag{66}$$

というふうにすべての積分定数が決定されます。

2.4 オプション

まず、**1.3** の話を思い出してください。**1.3** では、図 17 のように任意の分布荷重を受けるはりのせん断力分布と曲げモーメントの分布を求めました。この場合の反力 (式 (23))、せん断力 (式 (24))、曲げモーメント (式 (26)) は次の式で与えられました。

$$R_1 = \frac{1}{L}\int_0^L w(\xi)(L-\xi)d\xi \quad , \quad R_2 = \frac{1}{L}\int_0^L w(\xi)\xi d\xi \tag{67}$$

$$Q(x) = \frac{1}{L}\int_0^L w(\xi)(L-\xi)d\xi - \int_0^x w(\xi)d\xi \tag{68}$$

$$M(x) = \frac{x}{L}\int_0^L w(\xi)(L-\xi)d\xi - \int_0^x w(\xi)(x-\xi)d\xi \tag{69}$$

式 (69) を微分すると、

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{1}{L}\int_0^L w(\xi)(L-\xi)d\xi - \int_0^x w(\xi)d\xi \tag{70}$$

再度微分すると、

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -w(x)$$

となります。さて、この式ははりのたわみの方程式に類似していますね。この式の右辺の w を M/EI に、左辺の M を y に置き換えれば直ちにはりのたわみの微分方程式 (30)

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}$$

が得られます。これについてもう少し考えてみましょう。以下では、曲げ剛性 EI ははり全長にわたって一定とします。

式 (30) を積分すると、

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{1}{EI}\int_0^x M(\xi)d\xi + c_1 \tag{71}$$

$$y(x) = -\frac{1}{EI}\int_0^x \int_0^\eta M(\xi)d\xi d\eta + c_1x + c_2 \tag{72}$$

式 (72) を部分積分すると、

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{x}{EI}\int_0^x M(\xi)d\xi + \frac{1}{EI}\int_0^x \xi M(\xi)d\xi + c_1x + c_2 \\ &= -\frac{1}{EI}\int_0^x M(\xi)(x-\xi)d\xi + c_1x + c_2 \end{aligned} \tag{73}$$

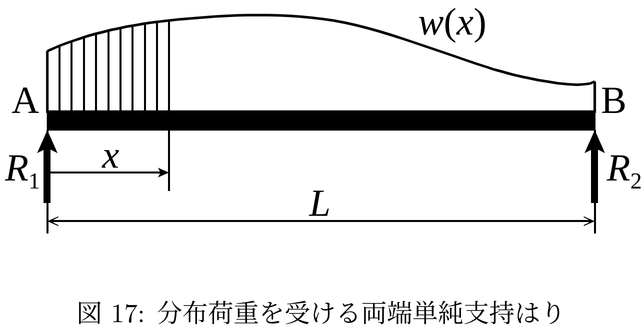


図 17: 分布荷重を受ける両端単純支持はり

となります。両端支持はりの場合を考えると、積分定数は

$$c_1 = \frac{1}{EIL}\int_0^L M(\xi)(L-\xi)d\xi \quad , \quad c_2 = 0 \tag{74}$$

となります。c_1 は、式 (71) で $x=0$ とおくと明らかなように、$x=0$ でのたわみ角を与えます。これらの積分定数を式 (71) と (72) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{1}{EIL}\int_0^L M(\xi)(L-\xi)d\xi - \frac{1}{EI}\int_0^x M(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{EI}\int_x^L M(\xi)d\xi - \frac{1}{EIL}\int_0^L M(\xi)\xi d\xi \end{aligned}\tag{75}$$

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{x}{EIL}\int_0^L M(\xi)(L-\xi)d\xi - \frac{1}{EI}\int_0^x M(\xi)(x-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{EI}\int_x^L M(\xi)(x-\xi)d\xi - \frac{L-x}{EIL}\int_0^L M(\xi)\xi d\xi \end{aligned}\tag{76}$$

これら二つの式は式 (68)、(69) と対応していることがわかります。特に、積分定数 c_1 は座標原点でのたわみ角を表してることを思い出してください。この定数は式 (67) の第一式、すなわち、反力 R_1 の式と同じ形をしていることがわかります。以上の計算から次のことがわかります。

曲げモーメントの分布が関数として与えられるとき、この曲げモーメントの分布を分布荷重と考えたときのはりの

1. 曲げモーメントはたわみ曲線を与える。
2. せん断力分布はたわみ角の曲線を与える。
3. 支点での反力はその支点でのたわみ角を与える。

それでは例題に入ります。あまり詳しく書いても仕方ないので、簡単に書いておきます。

2.4.1 例題 1d:集中荷重を受ける両端単純支持はり

図 18 に示すはりのたわみを求めなさい。

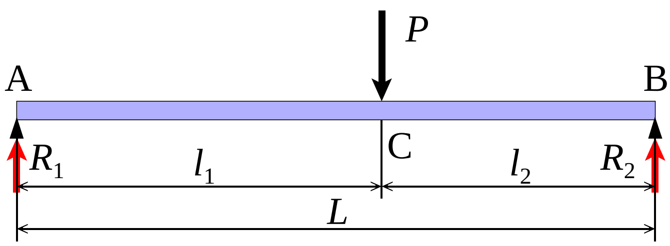


図 18: 集中荷重を受ける両端単純支持はり

解　曲げモーメント分布は式 (4) と (5) で与えられます。これらを再記すると、

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= R_1 x \\ M_{CB}(x) &= R_1 x - P(x-l_1) \end{aligned}$$

まず、c_1 は式 (74) から

$$\begin{aligned} EIc_1 &= \frac{1}{L}\int_0^L M(\xi)(L-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{L}\int_0^{l_1} M_{AC}(\xi)(L-\xi)d\xi + \frac{1}{L}\int_{l_1}^L M_{CB}(\xi)(L-\xi)d\xi \end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned} EIc_1 &= \frac{R_1}{L}\int_0^{l_1} \xi(L-\xi)d\xi + \frac{R_2}{L}\int_{l_1}^L (L-\xi)^2 d\xi \\ &= \frac{R_1}{L}\left[\frac{1}{2}l_1^2 L - \frac{1}{3}l_1^3\right] + \frac{R_2}{L}\frac{1}{3}l_2^3 \end{aligned}$$

式 (3) を代入すれば、

$$c_1 = \frac{Pl_1l_2}{6EIL}(l_1+2l_2)$$

この式は当然のことながら、式 (43) と同じです。なお、M_{CB} の式として式 (48) を使いました。

後は省略しますので、自分でやってみてください。注意しておきますが、式 (75)、(76) の第一項の積分は c_1 そのものです。第二項の積分においては、言うまでもなく AC 間 $(0 \le x < l_1)$ では

$$\begin{aligned} \int_0^x M(\xi)d\xi &= \int_0^x M_{AC}(\xi)d\xi \\ \int_0^x M(\xi)(x-\xi)d\xi &= \int_0^x M_{AC}(\xi)(x-\xi)d\xi \end{aligned}$$

CB 間 $(l_2 < x \le l_1 + l_2 (= L))$ では

$$\begin{aligned} \int_0^x M(\xi)d\xi &= \int_0^{l_1} M_{AC}(\xi)d\xi + \int_{l_1}^x M_{CB}(\xi)d\xi \\ \int_0^x M(\xi)(x-\xi)d\xi &= \int_0^{l_1} M_{AC}(\xi)(x-\xi)d\xi + \int_{l_1}^x M_{CB}(\xi)(x-\xi)d\xi \end{aligned}$$

ですね。

学生:対応は何とか理解できたのですが、表にまとめてあるとわかりやすいのですが。
センセ:では、図 19 を参照してください。

2.4.2 例題 2d:分布荷重を受ける両端単純支持はり

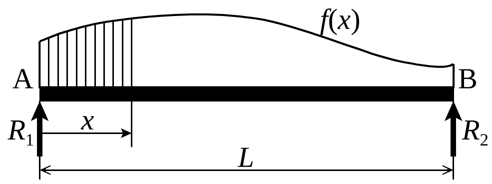
図 20 に示すはりのたわみを求めなさい。

解　曲げモーメントの分布は式 (12) で与えられます。これを再記すると、

$$M = \frac{w_0 x}{6L}(L^2 - x^2)$$

となります。例えば、c_1 は式 (74) から

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{EIL}\int_0^L M(\xi)(L-\xi)d\xi \\ &= \frac{w_0}{6EIL^2}\int_0^L (L^2-\xi^2)\xi(L-\xi)d\xi \\ &= \frac{7}{360EI}w_0L^3 \left(= \frac{dy}{dx}|_{x=0}\right) \end{aligned}$$



	$f(x)=w(x)$	$f(x)=M(x)/EI$
$\frac{1}{L}\int_0^L f(\xi)(L-\xi)d\xi$	R_1	$EIc_1=EIdy/dx\vert_{x=0}$
$\frac{1}{L}\int_0^L f(\xi)(L-\xi)d\xi-\int_0^x f(\xi)d\xi$	$Q(x)$	$EIdy(x)/dx$
$\frac{x}{L}\int_0^L f(\xi)(L-\xi)d\xi-\int_0^x f(\xi)(x-\xi)d\xi$	$M(x)$	$EIy(x)$

図 19: 積分の対応表

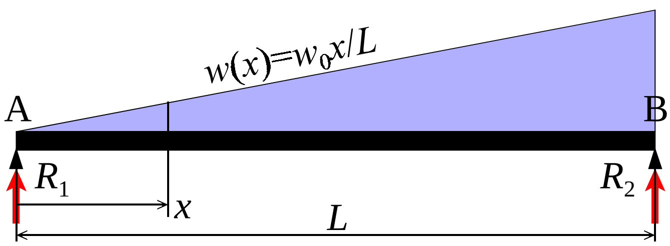


図 20: 分布荷重を受ける両端単純支持はり

となります。これは式 (59) と同じです。

たわみ角とたわみの関数の具体的な計算は省略しますが、前に導いた二つの式が容易に導かれます。試しに $w(x)=w_0x/L$ を用いて点 A での反力を計算してみましょう。図 17 の積分で $f(x)$ の代わりに $w(x)$ を用いると

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}\int_0^L f(\xi)(L-\xi)d\xi &= \frac{1}{L}\int_0^L f(\xi)(L-\xi)d\xi \\ &= \frac{w_0}{L^2}\int_0^L \xi(L-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{6}w_0L\end{aligned}$$

この式は式 (10) と同じですね。

2.4.3 例題 3d:集中モーメントを受けるはり

図 21 に示すような、はりの途中にモーメント M_0 を受けるはりのたわみを求めなさい。

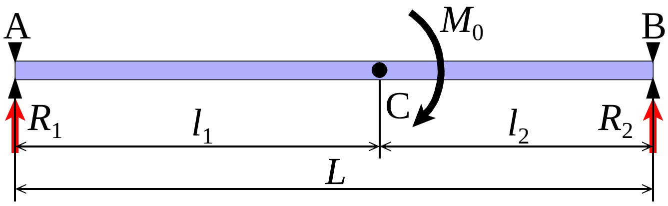


図 21: 集中モーメント M_0 を受けるはり

解　曲げモーメントですが、式 (17) と (18) に示すように、点 A を原点とすると、$0 \leq x < l_1$ では

$$M_{AC}(x) = R_1 x = -\frac{M_0 x}{L}$$

$l_1 < x \leq L$ では

$$M_{CB}(x) = R_1 x + M_0 = -\frac{M_0 x}{L} + M_0$$

ですね。式 (74) から c_1 は

$$c_1 = -\frac{M_0}{6EIL}(l_1^2 + 2l_1 l_2 - 2l_2^2)$$

となります。

学生:あのー。今までの例題は全部両端単純支持はりの場合ですね。SFD や BMD の基本的な考え方やはりのたわみ曲線も大体分かったような気がするので、片持ちはりや張出はりにも応用できると思います。ただ、ここでの方法は両端単純支持はりに限られているように思いますがどうですか？他のはりにも応用できますか？
センセ:なかなか鋭い質問ですなぁ。片持ちはりや張出はりの場合は、ここで述べた方法をうまく使えばある程度解けます。たとえば、図 22 をみてください。この例で、片持ちはり (1) の点 A で荷重 P が作用するはりのたわみ $y_A = PL^3/(3EI)$ は点 A と C で単純支持された長さ $2L$ のはり (2) の中央 (点 B) に荷重 $2P$ が作用する場合の点 B でのたわみの大きさにに等しいのです。ちなみに、片持ちはりのたわみ曲線は点 A を原点として

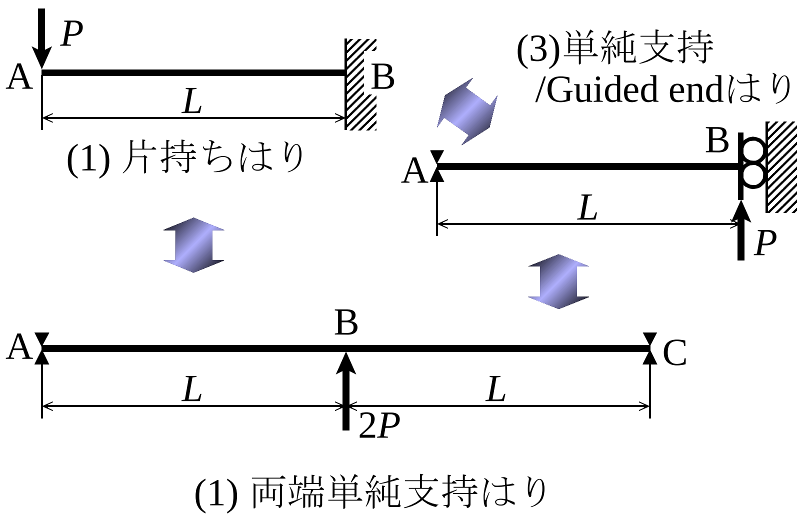


図 22: 片持ちはりと両端単純支持はり

$$y_{(1)} = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3L^2 x + 2L^2)$$

で、両端単純支持はりのたわみ曲線は同じく点 A を原点として式 (45) で $P \to -2P$、$L \to 2L$、$l_1 \to L$、$l_2 \to L$ とすれば、

$$y_{(2)} = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3L^2 x)$$

となります。(1) の場合の点 A のたわみ $y_{(1)A}$ と (2) の場合の点 B のたわみ $y_{(2)B}$ は

$$y_{(1)A} = \frac{PL^3}{3EI} \quad , \quad y_{(2)B} = -\frac{PL^3}{3EI}$$

となります。符号が逆ですね。(2) のたわみ曲線を y の正の方向に $PL^3/(3EI)$ だけ移動させると、

$$\begin{aligned} y_{(2)} + \frac{PL^3}{3EI} &= \frac{P}{6EI}(x^3 - 3L^2x) + \frac{PL^3}{3EI} \\ &= \frac{P}{6EI}(x^3 - 3xL^2 + 2L^2) \\ &= y_{(1)} \end{aligned}$$

となって、(1) のたわみ曲線と同じになります。
学生:なるほど。ところで、(3) のはりは何ですか?
センセ:材料力学の教科書ではあまり見かけませんね。このはりは点 A が単純支持されていて点 B が上下方向にのみ移動可能なはりです。Guided end を日本語で訳すと難しいんですが、今の場合に当てはめれば、「移動が一方向に拘束された端」とでも言うんですかね。ちなみに (3) のはりのたわみ曲線は (2) のはりの AB 間のたわみ曲線と同じになります。
学生:あのー。ところで、他のはりの場合はどうなるのでしょうか。
センセ:そうですね。では、片持ちはりの場合について簡単に述べておきましょう。まず、片持ちはり (図 23) の場合です。式 (71) と (73)

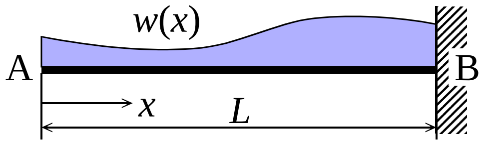


図 23: 片持ちはりの場合

は片持ちはり、両端支持はり等に関わらず成立します。この場合の c_1 と c_2 は明らかに $x = 0$ におけるたわみ角とたわみを表しています。片持ちはりの場合の境界条件は

$$\begin{aligned} x &= L \quad ; \quad dy/dx = 0 \\ x &= L \quad ; \quad y = 0 \end{aligned}$$

ですから、式 (71) と (73) において $x = L$ として積分し、境界条件より、

$$c_1 = \frac{1}{EI}\int_0^L M(\xi)d\xi \quad , \quad c_2 = -\frac{1}{EI}\int_0^L M(\xi)\xi d\xi$$

が得られます。これらを式 (71) と (73) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{EI}\int_x^L M(\xi)d\xi \\ y &= \frac{1}{EI}\int_x^L M(\xi)(x-\xi)d\xi \end{aligned}$$

となります。式 (75) と (76) とを比較すると、第二の積分がない形になっています。
　具体的に、点 A に集中荷重 P が作用する場合について適用してみましょう。曲げモーメントの分布関数は $M = -Px$ ですね。これを上の式の代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P}{2EI}(x^2 - L^2) \\ y &= \frac{P}{6EI}(x^3 - 3xL^2 + 2L^3) \end{aligned}$$

となりますね。

3　静定はりのたわみ (パート 2)

はりの問題を解くための一般的な手順は

1. 力のつりあいとモーメントのつりあいの式を作って支点反力を求めます。
2. 支点反力を使って曲げモーメントの式をたてます。
3. 積分してたわみ角やたわみを求めます。
4. たわみ角やたわみに含まれる積分定数を境界条件から定めます。

ですが、ステップ 1 で支点反力を求める際の反力やモーメントの符号に迷うことがあります。一貫した方法を自分で確立してしまえば迷わないのですが、それでも迷うことがあります。しかし、**曲げモーメントの符号の定義**さえしっかりと押さえておけば、後はどうにでもなるのです。ここで述べている方法はステップ 1 を省略して、

1. 支点反力を仮定して**曲げモーメント**の式をたてます。
2. 曲げモーメントに関する境界条件から支点反力を決定します。
3. 積分してたわみ角やたわみを求めます。
4. たわみ角やたわみに含まれる積分定数を境界条件から定めます。

とします。結果的には同じことなのですが、迷いは少ないと思います。また、この方法は次に述べる**不静定はりの問題**ではこのようにせざるを得ません。ここでは、静定はりについて最初に反力を求めないで解く方法を説明します。

3.1　例題 1:集中荷重を受ける両端単純支持はり

図 14 に示すはりのたわみを求めなさい。
解　まず、反力 R_1 を未知のままはりの曲げモーメントの式をたてます。これらの式は式 (4) と (5) です。すなわち、

$$
\begin{aligned}
M_{AC}(x) &= R_1 x \\
M_{CB}(x) &= R_1 x - P(x - l_1)
\end{aligned}
$$

たわみ角とたわみは式 (31)-(34) で求められます。たわみ角とたわみの式に含まれる未定係数を決定する境界条件式は式 (35)-(38) ですが、これらの式にもう一つ式を追加します。追加する式は

$$
x = L \quad , \quad M_{CB}(L) = 0
$$

です。この式から自動的に R_1 を求めることができます。

3.2　例題 2:分布荷重を受ける両端単純支持はり

図 15 に示すはりのたわみを求めなさい。
解　同じように、反力 R_1 を未知のままはりの曲げモーメントの式をたてます。曲げモーメントの式は式 (12) ですが、反力 R_1 を代入する前の式を使います。すなわち、

$$
M(x) = R_1 x - \frac{w_0 x}{L} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3}
$$

です。曲げモーメントに関する条件

$$x = L \quad , \quad M(L) = 0$$

から、反力は

$$R_1 = \frac{1}{6}w_0 L$$

となり、式 (10) が得られます。後は省略します。

3.3 例題 3:集中モーメントを受けるはり

図 16 に示すような、はりの途中にモーメント M_0 を受けるはりのたわみを求めなさい。

解 曲げモーメントですが、式 (17) と (18) で与えられていますが、R_1 を代入する前の式は点 A を原点として、$0 \leq x < l_1$ で

$$M_{AC}(x) = R_1 x$$

$l_1 < x \leq L$ で

$$M_{CB}(x) = R_1 x + M_0$$

となります。条件

$$x = L \quad , \quad M_{CB}(L) = 0$$

から、

$$R_1 = -\frac{M_0}{L}$$

です。

3.4 例題 4:単純支持点にモーメントを受ける両端単純支持はり

図 24 に示すような、支点 A にモーメント M_1、支点 B にモーメント M_2 を受けるはりのたわみを求めなさい。

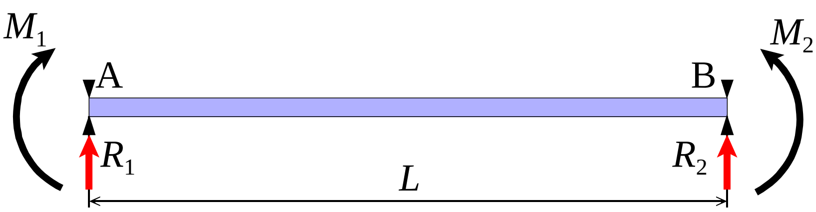


図 24: 単純支持点にモーメントを受ける両端単純支持はり

解 曲げモーメントですが、前の例題で M_0 を M_1 として点 C を点 A に近づけていくと、

$$M(x) = R_1 x + M_1$$

が得られます。曲げモーメントの条件として、

$$x = L \quad , \quad M(L) = M_2$$

となるので、この式から

$$R_1 = -\frac{M_1 - M_2}{L}$$

外力が作用していないので当然、$R_2 = -R_1$ ですね。
　ついでにたわみ角とたわみを求めておきましょう。たわみ角とたわみは

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI}x^2 - \frac{M_1}{EI}x + c_1 \\ y(x) &= -\frac{R_1}{6EI}x^3 - \frac{M_1}{2EI}x^2 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

境界条件は $x = 0$ と $x = L$ でたわみが零という条件なので、二つの条件から積分定数を決定すると、

$$c_1 = \frac{L}{6EI}(2M_1 + M_2) \quad , \quad c_2 = 0$$

あとは、必要ならば、形を整えます。参考までに、SFD と BMD を図 25 に示しておきます。

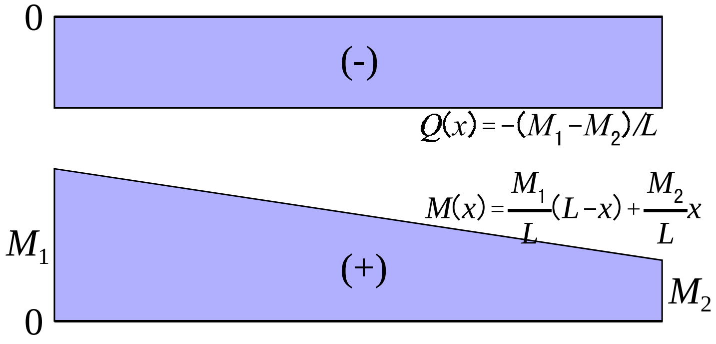


図 25: SFD と BMD

4 不静定はりの問題

前節で扱った問題は、支点反力を力のつりあいとモーメントのつりあいとで求めることができ、その結果としてせん断力分布や曲げモーメント分布が得られ、これらを用いてたわみ角やたわみを求めることができました。このようなはりを**静定はり**と言います。一方、支点反力を力のつりあいとモーメントのつりあいからだけでは求めることのできないはりを**不静定はり**といい、このようなはりの問題を解くためには変形の条件を考えなければなりません。では、早速例題です。

4.1 例題 1:集中荷重を受ける一端固定他端単純支持はり

図 26 に示すはりの SFD、BMD を求めなさい。

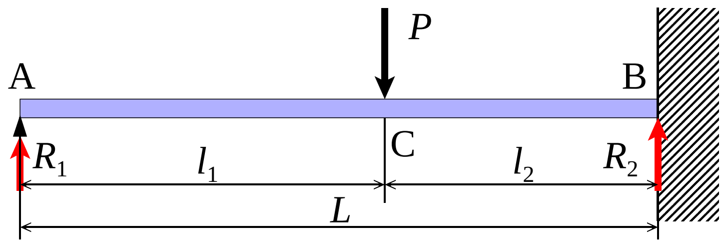


図 26: 集中荷重を受ける一端単純支持他端固定はり

解 (重ね合わせ法その 1) 図 27 のように二つの両端単純支持はりに分割して考えます。すなわち、

1. 集中荷重を受ける両端単純支持はり
2. 一方の単純支持点にモーメントが作用する両端単純支持はり

です。

(1) の場合の反力は式 (3) で、たわみ角は式 (44) と (46) で、たわみ曲線式 (45) と (47) で与えられています。念のために書いておきます。ただし、諸量の右肩に (1) をつけて表しておきます。

$$R_1^{(1)} = \frac{l_2 P}{L} \quad , \quad R_2^{(1)} = \frac{l_1 P}{L}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy_{AC}^{(1)}(x)}{dx} &= \frac{Pl_2}{6EIL}[-3x^2 + l_1(l_1 + 2l_2)] \\
y_{AC}^{(1)}(x) &= \frac{Pl_2 x}{6EIL}[-x^2 + l_1(l_1 + 2l_2)] \\
\frac{dy_{CB}^{(1)}(x)}{dx} &= \frac{Pl_1}{6EIL}[3(L-x)^2 - l_2(2l_1 + l_2)] \\
y_{CB}^{(1)}(x) &= \frac{Pl_1(L-x)}{6EIL}[-(L-x)^2 + l_2(2l_1 + l_2)]
\end{aligned}$$

(2) の場合の反力は

$$R_1^{(2)} = -\frac{M_0}{L} \quad , \quad R_2^{(2)} = -R_1^{(2)}$$

たわみ角とたわみは、式 (65) で $l_2 \to 0$、$l_1 \to L$ とおいて式 (60) と (61) に代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dy^{(2)}(x)}{dx} &= \frac{M_0}{6EIL}(3x^2 - L^2) \\
y^{(2)}(x) &= \frac{M_0 x}{6EIL}(x^2 - L^2)
\end{aligned}$$

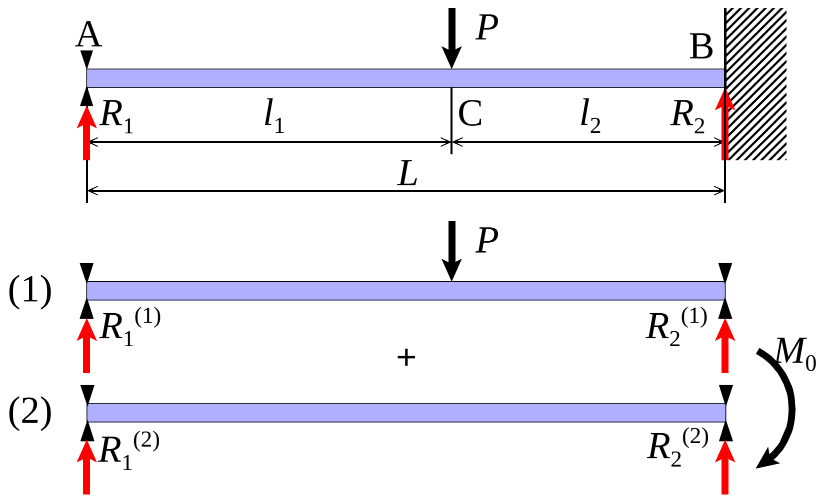


図 27: 二つの単純支持はり/(1) 集中荷重,(2) モーメント

境界条件は、固定端でたわみ角とたわみが零なので、

$$x = L \qquad ; \qquad \frac{dy^{(1)}_{CB}(L)}{dx} + \frac{dy^{(2)}(L)}{dx} = 0 \tag{77}$$

$$x = L \qquad ; \qquad y^{(1)}_{CB}(L) + y^{(2)}(L) = 0 \tag{78}$$

です。式 (78) は自動的に満足されるので、式 (77) から、

$$M_0 = \frac{Pl_1 l_2}{2L^2}(2l_1 + l_2)$$

さらに、この M_0 を $R_1^{(2)}$ の式に代入すれば、

$$R_1^{(2)} = -\frac{Pl_1 l_2}{2L^3}(2l_1 + l_2) \quad , \quad R_2^{(2)} = -R_1^{(2)}$$

が得られます。最終的な反力は、(1) のはりの反力を (2) のはりの反力を加えることによって得られ、

$$R_1 = R_1^{(1)} + R_1^{(2)} = \frac{Pl_2^2}{2L^3}(2L + l_1)$$

になります。R_2 は $R_2 = P - R_1$ から求めることができます。

以上の結果を使ってせん断力分布を求めると、

$$\begin{aligned} Q_{AC}(x) &= \frac{Pl_2^2}{2L^3}(2L + l_1) \\ Q_{CB}(x) &= \frac{Pl_2^2}{2L^3}(2L + l_1) - P \end{aligned}$$

曲げモーメントの分布は

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= \frac{Pl_2^2 x}{2L^3}(2L + l_1) \\ M_{CB}(x) &= \frac{Pl_2^2 x}{2L^3}(2L + l_1) - P(x - l_1) \end{aligned}$$

SFD は図 3 と同じ (ただし、R_1 は違いますが) 形なので省略します。BMD を図 28 に示します。固定端 B で曲げモーメントが生じています。

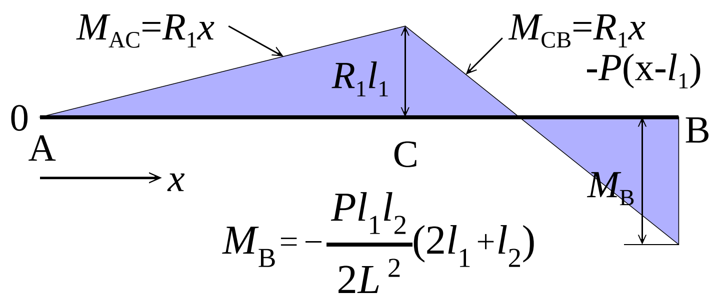


図 28: 集中荷重を受ける一端単純支持他端固定はりの BMD

解 (重ね合わせ法その 2)　図 29 のように二つの片持ちはりに分割して考えます。すなわち、

1. 自由端から l_1 の距離に集中荷重を受ける片持ちはり
2. 自由端に R_1 の集中荷重を受ける片持ちはり

です。

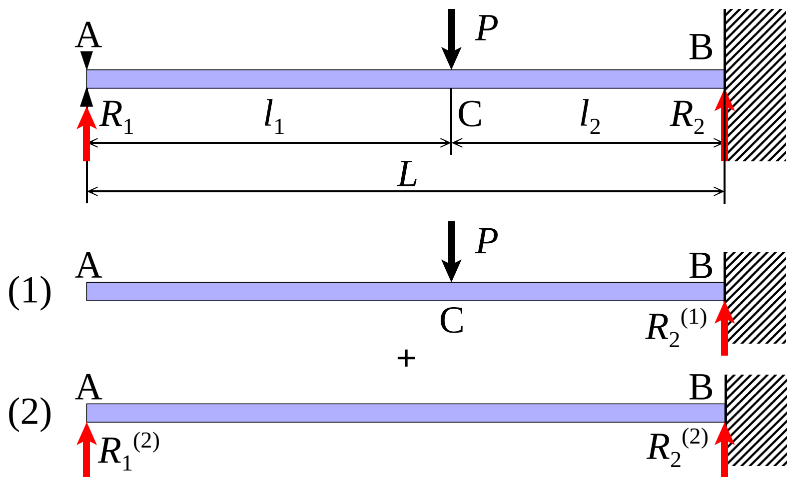


図 29: 二つの片持ちはり

まず、(2) のはりですが、前節の最後に求めた式

$$
\begin{aligned}
\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{P}{2EI}(x^2-L^2) \\
y &= \frac{P}{6EI}(x^3-3xL^2+2L^3)
\end{aligned}
$$

で $P \to -R_1^{(2)}$ とおけば、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy^{(2)}(x)}{dx} &= -\frac{R_1^{(2)}}{2EI}(x^2-L^2) \\
y^{(2)}(x) &= -\frac{R_1^{(2)}}{6EI}(x^3-3xL^2+2L^3)
\end{aligned}
$$

となります。次に (1) のはりですが、同じ式で $L \to l_2$ とおけば、

$$\frac{dy^{(1)}(x)}{dx} = \frac{P}{2EI}(x^2 - l_2^2) \tag{79}$$

$$y^{(1)}(x) = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3xl_2^2 + 2l_2^3) \tag{80}$$

が得られます。ただし、注意しておいてほしいことは、最後の二つの式が荷重点 C を x 座標の原点とした場合のたわみ角とたわみを表す関数であることです。この問題で必要な量は (1) のはりの自由端 A でのたわみです。

この片持ちはり (1) の自由端 A のたわみですが、AC 間では荷重が作用していないため、はりのこの部分は点 C のたわみ角に依存した剛体回転をするだけです。したがって、自由端でのたわみは、点 C でのたわみと同じ点でのたわみ角に AC 間の長さを乗じた剛体回転による回転量との和になります。点 C でのたわみ角は

$$-\frac{Pl_2^2}{2EI}$$

なので、

$$\begin{aligned} y_A^{(1)} &= y^{(1)}(0) - \frac{dy^{(1)}(0)}{dx} l_1 \\ &= \frac{Pl_2^2}{6EI}(3l_1 + 2l_2) \end{aligned} \tag{81}$$

となります。$y_A^{(1)} + y^{(2)}(0) = 0$ になるように $R_1^{(2)}$ を定めれば、

$$R_1^{(2)} = \frac{Pl_2^2}{2L^3}(2L + l_1) \tag{82}$$

になります。**重ね合わせ法その 1** で導いた式と同じ式が導かれました。

学生:質問です。(1) のはりの AC 間は剛体回転することは分かりましたが、式 (81) を導くときの回転量を求めるときマイナスの符号をつけているのはなぜですか?
センセ:これは図 30 をみてください。

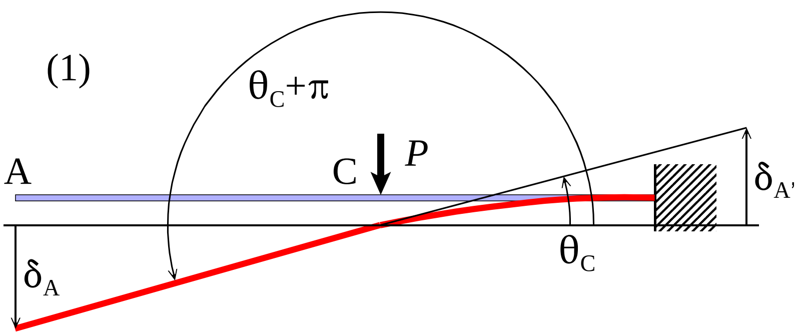


図 30: 途中に集中荷重を受ける片持ちはり

$$\delta_{A'} = l_1 \tan\theta_C$$
$$\delta_A = l_1 \tan(\theta_C + \pi) = -l_1 \tan\theta_C$$

ですね。ただし、

$$\tan\theta_C = \frac{dy^{(1)}(0)}{dx}$$

です。念のため言っておきますと、角度 θ_C が十分小さいとき、$\tan\theta_C = \theta_C$ ですね。

解 (その 3)　ダイレクトに解くことを考えましょう。まず、曲げモーメントの分布は、

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= R_1 x \\ M_{CB}(x) &= R_1 x - P(x - l_1) \end{aligned}$$

で与えられます。ここで、反力 R_1 は未知のままです。この曲げモーメント分布に対してたわみ角およびたわみを求めると、AC 間において

$$\begin{aligned} \frac{dy_{AC}(x)}{dx} &= -\frac{1}{2EI}R_1x^2 + c_1 \\ y_{AC}(x) &= -\frac{1}{6EI}R_1x^3 + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

同様に CB 間において

$$\begin{aligned} \frac{dy_{CB}(x)}{dx} &= -\frac{1}{2EI}R_1x^2 + \frac{1}{2EI}P(x-l_1)^2 + c_1' \\ y_{CB}(x) &= -\frac{1}{6EI}R_1x^3 + \frac{1}{6EI}P(x-l_1)^3 + c_1'x + c_2' \end{aligned}$$

ここでは反力 R_1 は未知のままであるので、全部で 5 個の未定係数があります。境界条件は、単純支持点 A($x=0$) でたわみが零、点 C($x=l_1$) でたわみとたわみ角が連続、固定端 B でたわみ角とたわみが零という条件です。これらを式で表すと、

$$\begin{aligned} x=0 \quad &; \quad y_{AC}(0)=0 \\ x=l_1 \quad &; \quad \frac{dy_{AC}(l_1)}{dx} = \frac{dy_{CB}(l_1)}{dx} \\ x=l_1 \quad &; \quad y_{AC}(l_1) = y_{CB}(l_1) \\ x=L \quad &; \quad \frac{dy_{CB}(L)}{dx} = 0 \\ x=L \quad &; \quad y_{CB}(L) = 0 \end{aligned}$$

境界条件は 5 個で未定係数も 5 個なので、全ての係数が決定されることになります。点 A での条件から得られる $c_2=0$ を除く 4 個の未定係数に関する連立方程式は

$$\begin{aligned} c_1 - c_1' &= 0 \\ c_1l_1 - c_1'l_1 - c_2' &= 0 \\ 2EIc_1' - R_1L^2 &= -Pl_2^2 \\ 6EILc_1' + 6EIc_2' - R_1L^3 &= -Pl_2^3 \end{aligned}$$

となります。これらの式から全ての未定係数を決定することができます。SFD と BMD を描くためには R_1 を決めるだけで十分です。ちなみに、R_1 は

$$R_1 = \frac{Pl_2^2}{2L^3}(2L+l_1)$$

となります。

4.2 例題 2:分布荷重を受ける一端固定他端単純支持はり

図 31 に示すはりの SFD、BMD を求めなさい。

解 ダイレクトに解きます。固定端 A での曲げモーメントを $-M_1$ とし、反力を R_1 とすると、曲げモーメントの分布は

$$M(x) = -M_1 + R_1x - \frac{w_0x^3}{6L}$$

たわみ角およびたわみは

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{M_1}{EI}x - \frac{R_1}{2EI}x^2 + \frac{w_0}{24EIL}x^4 + c_1 \\ y(x) &= \frac{M_1}{2EI}x^2 - \frac{R_1}{6EI}x^3 + \frac{w_0}{120EIL}x^5 + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

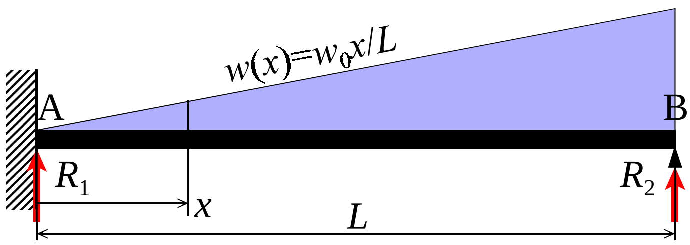


図 31: 集中荷重を受ける両端固定はり

固定端 A でたわみ角およびたわみが零であることから、

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = 0$$

残る境界条件は $x = L$ で

$$\begin{aligned} x = L \quad &; \quad M(L) = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

です。この二つの条件から

$$\begin{aligned} -M_1 + R_1 L &= \frac{w_0}{6} L^2 \\ -M_1 + \frac{R_1}{3} L &= \frac{w_0}{60} L^2 \end{aligned}$$

この二つの式から、

$$M_1 = \frac{7}{120} w_0 L \quad , \quad R_1 = \frac{9}{40} w_0 L^2$$

が得られます。

4.3 例題 3:集中モーメントを受ける一端単純支持他端固定はり

図 32 に示すような、はりの途中にモーメント M_0 を受けるはりの SFD、BMD を求めなさい。

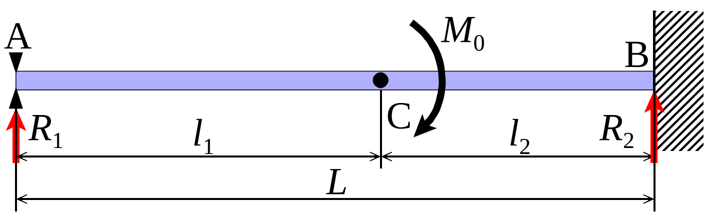


図 32: 集中モーメント M_0 を受ける一端単純支持他端固定はり

解　曲げモーメントですが、式 (17) と (18) に示すように、点 A を原点とすると、$0 \leq x < l_1$ では

$$M_{AC}(x) = R_1 x$$

$l_1 < x \leq L$ では

$$M_{CB}(x) = R_1 x + M_0$$

ですね。たわみ角はそれぞれの区間で

$$\begin{aligned}\frac{dy_{AC}(x)}{dx} &= -\frac{R_1 x^2}{2EI} + c_1 \\ y_{AC}(x) &= -\frac{R_1 x^3}{6EI} + c_1 x + c_2\end{aligned}$$

たわみは

$$\begin{aligned}\frac{dy_{CB}(x)}{dx} &= -\frac{R_1 x^2}{2EI} - \frac{M_0(x-l_1)}{EI} + c_1' \\ y_{CB}(x) &= -\frac{R_1 x^3}{6EI} - \frac{M_0(x-l_1)^2}{2EI} + c_1' x + c_2'\end{aligned}$$

になります。境界条件は、単純支持点 A($x=0$) でたわみが零、点 C($x=l_1$) でたわみとたわみ角が連続、固定端 B でたわみ角とたわみが零という条件です。これらを式で表すと、

$$\begin{aligned}x=0 &\quad ; \quad y_{AC}(0)=0 \\ x=l_1 &\quad ; \quad \frac{dy_{AC}(l_1)}{dx} = \frac{dy_{CB}(l_1)}{dx} \\ x=l_1 &\quad ; \quad y_{AC}(l_1) = y_{CB}(l_1) \\ x=L &\quad ; \quad \frac{dy_{CB}(L)}{dx} = 0 \\ x=L &\quad ; \quad y_{CB}(L)=0\end{aligned}$$

点 A での条件から得られる $c_2=0$ を除く 4 個の未定係数に関する連立方程式は

$$\begin{aligned}c_1 - c_1' &= 0 \\ c_1 l_1 - c_1' l_1 - c_2' &= 0 \\ 2EIc_1' - R_1 L^2 &= 2M_0 l_2 \\ 6EILc_1' + 6EIc_2' - R_1 L^3 &= 3M_0 l_2^2\end{aligned}$$

これらの式から、

$$R_1 = -\frac{3M_0 l_2}{2L^3}(2l_1 + l_2) \quad , \quad c_1 = c_1' = -\frac{M_0 l_2}{4EIL}(2l_1 - l_2) \quad , \quad c_2' = 0$$

というふうに求めることができます。

4.4 例題 4:集中荷重を受ける両端固定はり

図 33 に示すはりの SFD、BMD を求めなさい。

解 この問題はダイレクトに解いたほうが簡単なようです。考えているはりを図 34 に示すような両端に未知の曲げモーメントを受ける両端単純支持はりとして考え、固定端 A、B での曲げモーメントを図のように仮定します。

このとき、曲げモーメント分布は AC 間および CB 間で

$$\begin{aligned}M_{AC}(x) &= -M_1 + R_1 x \\ M_{CB}(x) &= -M_1 + R_1 x - P(x-l_1)\end{aligned}$$

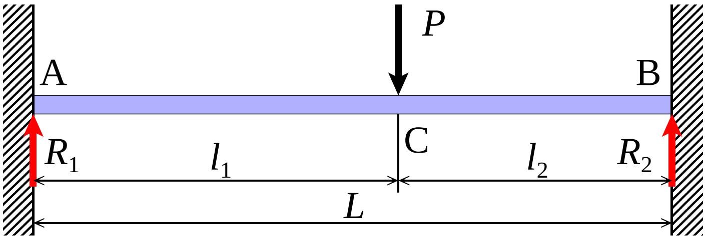


図 33: 集中荷重を受ける両端固定はり

で与えられます。これらからたわみ角とたわみ関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_{AC}(x)}{dx} &= \frac{M_1}{EI}x - \frac{R_1}{2EI}x^2 + c_1 \\
y_{AC}(x) &= \frac{M_1}{2EI}x^2 - \frac{R_1}{6EI}x^3 + c_1 x + c_2 \\
\frac{dy_{CB}(x)}{dx} &= \frac{M_1}{EI}x - \frac{R_1}{2EI}x^2 + \frac{P}{2EI}(x-l_1)^2 + c_1' \\
y_{CB}(x) &= \frac{M_1}{2EI}x^2 - \frac{R_1}{6EI}x^3 + \frac{P}{6EI}(x-l_1)^3 + c_1' x + c_2'
\end{aligned}
$$

となります。

ここでは R_1、M_1 を含めて全部で 6 個の未定係数があります。境界条件は、固定端 A$(x=0)$ でたわみ角とたわみが零、点 C$(x=l_1)$ でたわみとたわみ角が連続、固定端 B でたわみ角とたわみが零という条件です。これらを式で表すと、

$$
\begin{aligned}
x = 0 \quad &; \quad y_{AC}(0) = 0 \\
x = 0 \quad &; \quad \frac{dy_{AC}(0)}{dx} = 0 \\
x = l_1 \quad &; \quad \frac{dy_{AC}(l_1)}{dx} = \frac{dy_{CB}(l_1)}{dx} \\
x = l_1 \quad &; \quad y_{AC}(l_1) = y_{CB}(l_1) \\
x = L \quad &; \quad \frac{dy_{CB}(L)}{dx} = 0 \\
x = L \quad &; \quad y_{CB}(L) = 0
\end{aligned}
$$

境界条件は 6 個で未定係数も 6 個なので、全ての係数が決定されることになります。しかし、これらの条件のうち、$x=0$ の条件と $x=l_1$ での条件から c_1, c_2, c_1', c_2' は全て零になるので、残る二つの条件から

$$
-\frac{M_1 L}{EI} + \frac{R_1 L^2}{2EI} = \frac{P l_2^2}{2EI}
$$

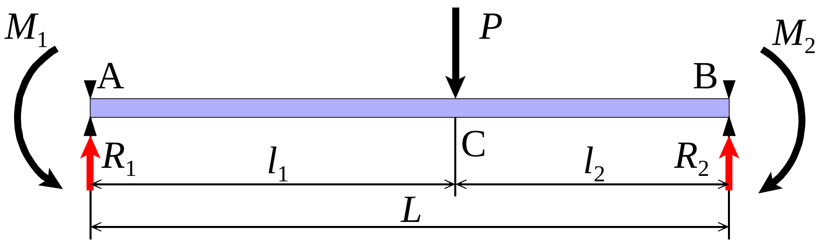


図 34: 集中荷重とモーメントを受ける両端単純支持はり

$$-\frac{M_1L^2}{2EI}+\frac{R_1L^3}{6EI}=\frac{Pl_2^3}{6EI}$$

の二つの式だけが残り、これらから、

$$M_1=\frac{Pl_1l_2^2}{L^2}\quad,\quad R_1=\frac{Pl_1^2}{L^3}(3L-2l_2)$$

が得られます。

4.5 例題 5:集中荷重を受ける一端バネ支持他端固定はり

図 35 に示すはりのバネ支持点 A でのたわみ y_A を求めなさい。

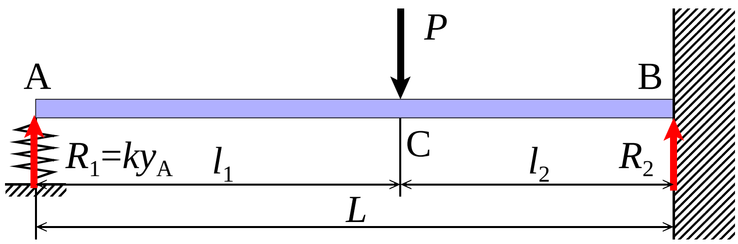


図 35: 集中荷重を受ける一端バネ支持他端固定はり

解 さて、問題を解くために、先の**例題 1 の解 (重ね合わせ法その 2)** のように二つの片持ちはりとして考えます (図 29 参照)。片持ちはり (1) の自由端でのたわみは式 (81) で与えられ、(2) のはりの自由端でのたわみは $y^{(2)}(x)$ の式で $x=0$ とおくことによって得られます。条件としては、これら二つのたわみの和が y_A になるように R_1 を決定すればよいことになります。実際、$y_A^{(1)}+y^{(2)}(0)=y_A$ から

$$\frac{Pl_2^2}{6EI}(3l_1+2l_2)-\frac{R_1L^3}{3EI}=y_A$$

になります。一方、R_1 はバネ定数を k とすると $R_1=ky_A$ なので、これを使って y_A を求めると

$$y_A=\frac{1}{2}\frac{Pl_2^2(2L+l_1)}{kL^3+3EI}$$

となります。

4.6 例題 6:途中に回転支点を持つ両端固定はり (ゲルバーはり)

図 36 に示すはりの回転支点 C でのたわみ y_C を求めなさい。

解 この問題の場合、点 C にある支点が回転可能であることがポイントです。回転可能であるということは、点 C で曲げモーメントは零です。一方、たわみは点 C で連続です。

基本的に二つの片持ちはりの問題を解き、点 A と B でたわみとたわみ角が零、点 C でたわみが等しいことを用いて解きます。そのため、まず、図 37 の (1) と (2) の二つの片持ちはりに分割し、同図に示すように座標系をとります。

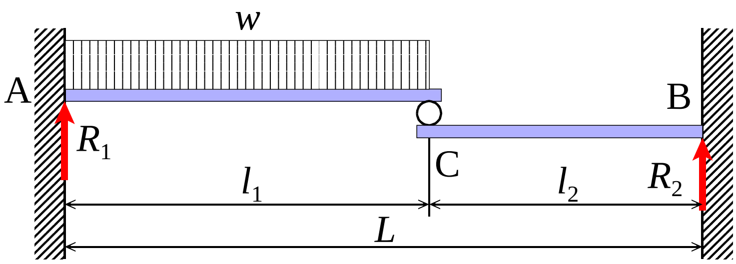


図 36: 途中に回転支点を持つ両端固定はり

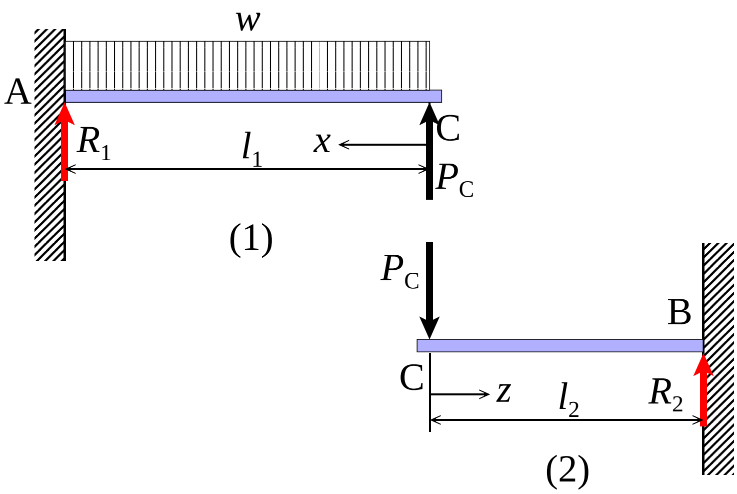


図 37: 二つの片持ちはり

まず、(1) のはりについて、

$$
\begin{aligned}
M_{(1)}(x) &= P_C x - \frac{w}{2}x^2 \\
\frac{dy_{(1)}(x)}{dx} &= -\frac{P_C}{2EI}x^2 + \frac{w}{6EI}x^3 + c_1 \\
y_{(1)}(x) &= -\frac{P_C}{6EI}x^3 + \frac{w}{24EI}x^4 + c_1 x + d_1
\end{aligned}
$$

上の式には、全部で三つの未知係数があります。まず c_1 と d_1 を決めるための境界条件ですが、

$$
\begin{aligned}
x = l_1 &\quad ; \quad \frac{dy_{(1)}(x=l_1)}{dx} = 0 \\
x = l_1 &\quad ; \quad y_{(1)}(x=l_1) = 0
\end{aligned}
$$

の二つです。たわみ角とたわみの式を境界条件に代入すれば、

$$
c_1 = \frac{P_C l_1^2}{2EI} - \frac{w l_1^3}{6EI} \quad , \quad d_1 = -\frac{P_C l_1^3}{3EI} + \frac{w l_1^4}{8EI} \quad ,
$$

となります。結局点 C のたわみは

$$
y_{(1)}(x=0) = -\frac{P_C l_1^3}{3EI} + \frac{w l_1^4}{8EI} (= d_1)
$$

です。

次に、(2) のはりですが、(1) のはりの式で、$l_1 \to l_2$、$P_C \to^P_C$、$w \to 0$ とおけば、(2) のはりの点 C でのたわみは

$$y_{(2)}(z=0) = \frac{P_C l_2^3}{3EI}$$

となります。点 C では両方のたわみが等しいので、この二つの式を等置すると、P_C は

$$P_C = \frac{3}{8}\frac{w l_1^4}{l_1^3 + l_2^3}$$

となります。最終的に回転支点 C でのたわみは

$$y_C = \frac{w}{8EI}\frac{l_1^4 l_2^3}{l_1^3 + l_2^3}$$

となります。

さて、上の解法で、(1) のはりについては点 C から左に x 軸を取りました。もし、点 A から右に x 軸を取りたい場合、曲げモーメント $M_{(1)}(x)$ の式で $x \to l_1 - x$ とすればよいことがわかります。このようにすると、曲げモーメントの式は

$$M_{(1)}(x) = P_C(l_1 - x) - \frac{w}{2}(l_1 - x)^2$$

となりますね。念のため、この式を確かめてみましょう。まず、固定端 A での反モーメントは

$$M_A = -\frac{w}{2}l_1^2 + P_C l_1$$

です。また、この点での反力はすでに述べたせん断力の関係から、

$$R_A = -P_C + w l_1$$

です。したがって、曲げモーメントの式は

$$\begin{aligned} M(1)(x) &= M_A + R_A x - \frac{w}{2}x^2 \\ &= P_C(l_1 - x) - \frac{w}{2}(l_1 - x)^2 \end{aligned}$$

となり、前の式と一致しますね。この場合のたわみ角とたわみに関する境界条件は当然

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &; \quad \frac{dy_{(1)}(x=0)}{dx} = 0 \\ x = 0 \quad &; \quad y_{(1)}(x=0) = 0 \end{aligned}$$

になります。

5 Singularity Function の利用

前節でまでで扱った問題は、教科書や演習書にある標準的な解法です。気が付きませんでしたか?たとえば、集中荷重を受けるはりの場合、荷重点をはさんで左右のたわみ曲線を求め、それらを荷重点でのたわみ角とたわみの連続条件を使って積分定数を決めました。「それがどうした」と思うかもしれません。でも、これは結構厄介なのです。例えば、次の例を考えてみてください。

5.1 例題 0:複数の集中荷重を受ける両端単純支持はり

図 38 に示すはりの SFD、BMD、たわみ角、たわみを求めなさい。

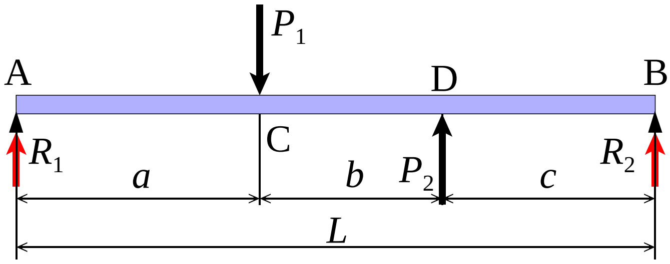


図 38: 集中荷重を受ける単純支持はり

解 まず、せん断力の分布ですが、

$$\begin{aligned} Q_{AC}(x) &= R_1 \\ Q_{CD}(x) &= R_1 - P_1 \\ Q_{DB}(x) &= R_1 - P_1 + P_2 \end{aligned}$$

ですね。各区間での曲げモーメントを求めると、点 A を原点として

$$\begin{aligned} M_{AC}(x) &= R_1 x \\ M_{CD}(x) &= R_1 x - P_1(x-a) \\ M_{DB}(x) &= R_1 x - P_1(x-a) + P_2(x-a-b) \end{aligned}$$

たわみ角は

$$\begin{aligned} \frac{dy_{AC}(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI}x^2 + c_{AC} \\ \frac{dy_{CD}(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI}x^2 + \frac{P_1}{2EI}(x-a)^2 + c_{CD} \\ \frac{dy_{DB}(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI}x^2 + \frac{P_1}{2EI}(x-a)^2 \\ &\quad -\frac{P_2}{2EI}(x-a-b)^2 + c_{DB} \end{aligned}$$

たわみは

$$\begin{aligned} y_{AC}(x) &= -\frac{R_1}{6EI}x^3 + c_{AC}x + d_{AC} \\ y_{CD}(x) &= -\frac{R_1}{6EI}x^3 + \frac{P_1}{6EI}(x-a)^3 + c_{CD}x + d_{CD} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{DB}(x) &= -\frac{R_1}{6EI}x^3 + \frac{P_1}{6EI}(x-a)^3 \\
&\qquad -\frac{P_2}{6EI}(x-a-b)^3 + c_{DB}x + d_{DB}
\end{aligned}
$$

たわみの関数を見ればわかりますが、全部で六つの積分定数があります。これらを決定する境界条件は

$$
\begin{aligned}
x = 0 \quad &; \quad y_{AC}(0) = 0 \\
x = a \quad &; \quad \frac{dy_{AC}(a)}{dx} = \frac{dy_{CD}(a)}{dx} \\
x = a \quad &; \quad y_{AC}(a) = y_{CD}(a) \\
x = a+b \quad &; \quad \frac{dy_{CD}(a+b)}{dx} = \frac{dy_{CB}(a+b)}{dx} \\
x = a+b \quad &; \quad y_{CD}(a+b) = y_{DB}(a+b) \\
x = L \quad &; \quad y_{DB}(L) = 0
\end{aligned}
$$

の六つです。これらの条件式から導かれる連立方程式は

$$
\begin{aligned}
d_{AC} &= 0 \\
c_{AC} - c_{CD} &= 0 \\
c_{AC}a - c_{CD}a - d_{CD} &= 0 \\
c_{CD} - c_{DB} &= 0 \\
c_{CD}(a+b) - c_{DB}(a+b) & \\
+d_{CD} - d_{DB} &= 0 \\
c_{DB}L + d_{DB} &= \frac{1}{6EI}[R_1L^3 \\
&\qquad -P_1(b+c)^3 + P_2c^3
\end{aligned}
$$

です。$d_{AC} = 0$ だけは単独で定まるとしても残りの五つの積分定数を決めなければなりませんね。これはとっても面倒です。正直、私にも上の連立方程式が正しいかどうか自信がありません。

もし、このようなやっかいなことをせずに簡単にたわみ関数などを求めることができるとしたら … 。そのような願いをほぼかなえてくれる方法があります。これが、Singularity Function を使った方法です。この方法は静定不静定にかかわらず用いることができる便利な方法 (特に不静定問題で威力発揮します)、ですが、我が国の教科書や演習書で紹介された例をみません。以下では、あえて御法度 (というわけでもないでしょうが) を破り、この解法を紹介します。

5.2 Singularity Function とは

日本語で表現すると、Singularity とは特異性とか特異点のことです。特異点というのは、微分可能でなくなったり解析的でなくなったりする点のことです。特異性というのは、関数自身に微分可能でない点を持っていることだと考えることができます。ここでは、Singularity Function を、とりあえず、関数空間内部に微分可能でない点を含んだ関数ということにしておきます。

さて、今までの例題から、このような関数がなかったでしょうか。たとえば、図 1 に示すような集中荷重を受ける両端単純支持はりの場合、図 3 のようにせん断力の分布は荷重点で作用している荷重分だけジャンプがありました。曲げモーメントの分布は図 6 のように連続ですが、荷重がジャンプする点の前後で傾きが変わっていました。ここで、**荷重がジャンプする点の前後で**と書いたのは、実は荷重点での曲げモーメント分布関数の傾きを定義できません。言い換えれば、荷重点では曲げモーメントの関数は微分可能ではないことになります。そのため、曲げモーメントの式は区間ごとに式 (4) と (5) のように分けて書いています。では、この二つの式を一つの式で書けて、荷重点での傾きの変化を表現できれば、… 。そこで、Singularity Function の登場です。

5.2.1 デルタ関数と単位関数

さて、Singularity をもつ関数として一般によく知られている関数を二つ述べておきます。一つは Dirac のデルタ関数 (単にデルタ関数 (場合によってはインパクト関数) とも)$\delta(x)$ で、もう一つは Heaviside の単位関数 $H(x)$ です。まず、Heaviside の単位関数は

$$H(x-x_0) \quad = \quad 1 \quad (x>x_0) \quad , \quad =0 \quad (x<x_0) \tag{83}$$

で定義されます。デルタ関数は

$$\delta(x-x_0) \quad = \quad \infty \quad (x=x_0) \quad , \quad =0 \quad (x\neq x_0) \tag{84}$$

で定義されます。この二つの関数は無関係ではなく、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)dx = H(x-x_0) \tag{85}$$

という関係があります。デルタ関数に関するよく知られた関係式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f(x)dx = f(x_0) \tag{86}$$

があります (実は、この式を満たす関数 δ をデルタ関数というのですが $\cdots$)。

5.2.2 Ramp 関数と積分関係式

新しい関数として

$$< x-x_0 >^1 = (x-x_0)H(x-x_0) \tag{87}$$

を定義します。このような関数をランプ (ramp) 関数といいますが、この関数も、明らかに $x=x_0$ で微分係数は不連続です。ついでに、少し積分の関係式を定義しておきます。$< x-x_0 >^1$ の右肩の添字に注意してください。この添字でべき次数を表すことにすると、積分関係式は普通の積分関係式と同様に

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} < \xi - x_0 >^n d\xi \quad &= \quad \frac{< x-x_0 >^{n+1}}{n+1} \\ &= \quad \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \quad (x>x_0) \\ &= \quad 0 \quad (x<x_0) \end{aligned} \tag{88}$$

と定義できます。ただし、$n \geq 0$ です。この性質は容易に理解できると思います。なお、Heaviside 単位関数 $H(x-x_0)$ を $< x-x_0 >^0$ と表現しても上の積分関係式は成り立ちます。

数学的な詳しい説明は材料力学の範囲外なのでパスして、これらの関数をいかに材料力学のはりの問題に取り込むかを考えてみましょう。

5.3 再度、例題 0

5.3.1 せん断力分布の表現

例題 0 を思い出してください。せん断力の分布は各区間で

$$\begin{aligned} Q_{AC} \quad &= \quad R_1 \\ Q_{CD} \quad &= \quad R_1 - P_1 \\ Q_{DB} \quad &= \quad R_1 - P_1 + P_2 \end{aligned}$$

でしたね。これを単位関数を使って書き換えてみると、単に

$$Q(x) = R_1 H(x) - P_1 H(x-a) + P_2 H(x-a-b)$$

となります。簡単に説明すると、まず AC 間 $(0 < x < a)$ では $H(x) = 1, H(x-a) = 0, H(x-a-b) = 0$ ですね。次に、CD 間 $(a < x < a+b)$ では $H(x) = 1, H(x-a) = 1, H(x-a-b) = 0$、さらに、DB 間 $(a+b < x < L)$ では $H(x) = 1, H(x-a) = 1, H(x-a-b) = 1$ になります。関数 $H(x-a)$ は $x = a$ でのジャンプを表していますね。これを表 1 にまとめておきます。

表 1: 各区間での単位関数の値

区間	$H(x)$	$H(x-a)$	$H(x-a-b)$
AC 間 $(0 < x < a)$	1	0	0
CD 間 $(a < x < a+b)$	1	1	0
DB 間 $(a+b < x < L)$	1	1	1

5.3.2　曲げモーメントの表現

曲げモーメントの分布は各区間で

$$\begin{aligned} M_{AC} &= R_1 x \\ M_{CD} &= R_1 x - P_1(x-a) \\ M_{DB} &= R_1 x - P_1(x-a) + P_2(x-a-b) \end{aligned}$$

でした。これをせん断力と同じように表現すると、

$$M(x) = R_1 x H(x) - P_1(x-a)H(x-a) + P_2(x-a-b)H(x-a-b)$$

でよいことが分かりますね。これから、

$$M(x) = R_1 < x >^1 - P_1 < x-a >^1 + P_2 < x-a-b >^1$$

となります。

5.3.3　たわみ角とたわみの表現

さて、曲げモーメントの表現を納得していただければ、たわみ角ははり全体にわたって一つの関数で表され、

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI} < x >^2 + \frac{P_1}{2EI} < x-a >^2 \\ &\quad - \frac{P_2}{2EI} < x-a-b >^2 + c \end{aligned}$$

となり、たわみ関数も同様に

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{R_1}{6EI} < x >^3 + \frac{P_1}{6EI} < x-a >^3 \\ &\quad - \frac{P_2}{6EI} < x-a-b >^3 + cx + d \end{aligned}$$

となります。ここで注目しなければならないことは、決めなければならない積分定数は c と d の二つであることです。これら二つの積分定数は二つの境界条件

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &; \quad y(0) = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

から決定されます。$d = 0$ は自明なので、実質二番目の条件から c を決定すればよいことになります。**例題 0** では五つの積分定数を決める必要がありましたが、Singularity Function を使うと一つの積分定数を決めるだけでよいのです。どうですか?簡単でしょう。

学生:先生！質問です。頭の部分の**例題 0** の場合は各荷重点でたわみ角とたわみの連続条件が入ってきます。そのために積分定数がたくさん出てきても物理的に納得できるのですが、Singularity Function の場合だと、たったの二つの積分定数で、しかも、今のような場合だと実質的に一つになっていしまいます。どうしてですか？
センセ:いい質問ですねぇ。今までのことをよく考えてみるとなぞは解けます。実はとても簡単なことなのです。たとえば、集中荷重を受けるはりの場合、荷重点の前後でせん断力は不連続ですね。ところが、曲げモーメントは連続です。曲げモーメントの式を積分して求めるたわみ角とたわみの場合も当然連続になります。その結果、荷重点での連続条件は自動的に満足され、結果としてたった二つの積分定数を境界条件から決めればよいだけになります。
このことを、式に戻って考えてみましょう。たわみ角は

$$\begin{aligned} \frac{dy_{AC}(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI}x^2 + c_{AC} \\ \frac{dy_{CD}(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI}x^2 + \frac{P_1}{2EI}(x-a)^2 + c_{CD} \\ \frac{dy_{DB}(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI}x^2 + \frac{P_1}{2EI}(x-a)^2 \\ &\qquad -\frac{P_2}{2EI}(x-a-b)^2 + c_{DB} \end{aligned}$$

ですし、たわみは

$$\begin{aligned} y_{AC}(x) &= -\frac{R_1}{6EI}x^3 + c_{AC}x + d_{AC} \\ y_{CD}(x) &= -\frac{R_1}{6EI}x^3 + \frac{P_1}{6EI}(x-a)^3 + c_{CD}x + d_{CD} \\ y_{DB}(x) &= -\frac{R_1}{6EI}x^3 + \frac{P_1}{6EI}(x-a)^3 \\ &\qquad -\frac{P_2}{6EI}(x-a-b)^3 + c_{DB}x + d_{DB} \end{aligned}$$

ですね。いま、たわみ角の二番目の式で、x を a に近づけて見ると、明らかに $c_{AC} = c_{CD}$ ですね。たわみの場合も明らかに $d_{AC} = d_{CD}$ が成り立ちます。たわみ角の三番目の式やたわみの三番目の式でも同じことが言えて、$c_{CD} = c_{DB}$ と $d_{CD} = d_{DB}$ が成り立ちます。したがって、未知の積分定数は c_{AC} と d_{AC} の二つだけになります。

学生:途中に曲げモーメントを、もとい、モーメントを受けるはりの場合は曲げモーメントの分布は不連続になりますが、このような場合でも使えますか？

センセ:使えます。曲げモーメントが不連続でも、たわみ角とたわみが連続であれば、モーメント付加点での連続条件は満足されます。このような例は後で述べることにしましょう。

学生:というように聞くと、この方法はオールマイティのようですが。不得意の問題はありますか？

センセ:あります。いま述べたように、**たわみ角とたわみの連続性が保証されるような場合はきわめて簡単に解ける**のですが、**不静定はり**のところで述べましたゲルバーはりのような、せん断力は連続で曲げモーメントは途中の回転支点で零、たわみ角は不連続でたわみが連続という特殊なはりには適用しないほうがよいと思います。ただ、たわみ角とたわみの連続性さえ保証されれば静定はり、不静定はり、連続はりの如何を問わず適用できます。

学生:ちょっと前の話に戻りますが、Singularity Function を使わない場合でも未知の積分定数は二つになりましたね。じゃあ、別に使う必要もないのではないですか？

センセ:たしかにそうですが、Singularity Function を使うメリットはいくつもの式を書かずにすむことでしょう。

以下では、散々使いまわしてきた例題を使って確認していきましょう。

5.4 静定問題

5.4.1 例題 1:集中荷重を受ける両端単純支持はり

図 14 に示すはりのたわみを求めなさい。

解 いきなり曲げモーメントの表現から入ります。曲げモーメントははり全域で

$$M(x) = R_1 < x >^1 - P < x - l_1 >^1$$

です。$x = L$ で曲げモーメントが零である条件から、

$$R_1 = \frac{Pl_2}{L}$$

たわみ角とたわみは

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= -\frac{1}{2EI} R_1 < x >^2 + \frac{1}{2EI} P < x - l_1 >^2 + c_1 \\ y(x) &= -\frac{1}{6EI} R_1 < x >^3 + \frac{1}{6EI} P < x - l_1 >^3 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

境界条件

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &; \quad y(0) = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

から

$$c_1 = \frac{Pl_1 l_2}{6EIL}(l_1 + 2l_2) \quad , \quad c_2 = 0$$

となります。

5.4.2 例題 2:集中モーメントを受けるはり

図 16 に示すような、はりの途中にモーメント M_0 を受けるはりのたわみを求めなさい。

解 曲げモーメントですが、式 (4) と (5) に示すように、点 A を原点とすると、$0 \leq x < l_1$ では

$$M_{AC}(x) = R_1 x$$

$l_1 < x \leq l_1 + l_2$ では

$$M_{CB}(x) = R_1 x + M_0$$

となります。この曲げモーメントの式をはり全域で表現すると、

$$M(x) = R_1 < x >^1 + M_0 H(x - l_1)$$

となります。反力は $x = L$ で $M(L) = 0$ の条件から

$$R_1 = -\frac{M_0}{L} \quad , \quad R_2 = -R_1$$

が直ちに得られます。たわみ角とたわみの関数は

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{M_0}{2EIL} < x >^2 - \frac{M_0}{EI} < x - l_1 >^1 + c_1 \\ y(x) &= \frac{M_0}{6EIL} < x >^3 - \frac{M_0}{2EI} < x - l_1 >^2 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

境界条件

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &; \quad y(0) = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

から

$$c_1 = -\frac{M_0}{6EIL}(l_1^2 + 2l_1 l_2 - 2l_2^2) \quad , \quad c_2 = 0$$

となります。

5.4.3　例題 3:途中に集中荷重を受ける片持ちはり

図 39 に示すはりの先端のたわみ角とたわみを求めなさい。

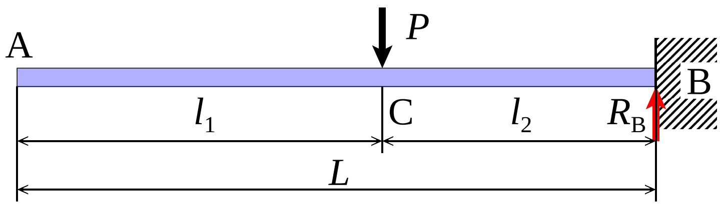


図 39: 途中に集中荷重を受ける片持ちはり

解　この問題を解く方法は、すでに不静定はりのところで述べたように、点 C を原点として座標系を設定して長さ l_2 の片持ちはりとして解き、その後、AC 間の剛体回転量を考慮して最終的に点 A のたわみを求めます。このようにして得られたたわみは式 (81 のように得られます。

ここでは、自由端 A のたわみを直接求めることにします。そのため、座標原点を点 A にとり、Singularity Funciton で曲げモーメントを表現すると、

$$M(x) = -P < x - l_1 >^1$$

となります。積分して、

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{P}{2EI} < x - l_1 >^2 + c_1 \\ y(x) &= \frac{P}{6EI} < x - l_1 >^3 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

境界条件は

$$\begin{aligned} x = L \quad &; \quad \frac{dy(L)}{dx} = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

なので、この二つの式にたわみ角とたわみの式を代入すると、

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{Pl_2^2}{2EI} \\ c_2 &= -\frac{Pl_2^3}{6EI} - c_1 L \\ &= \frac{Pl_2^2}{5EI}(2L + l_1) \end{aligned}$$

となります。たわみ角およびたわみの式これら二つの積分定数を代入して $x = 0$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{dy(0)}{dx} &= -\frac{Pl_2^2}{2EI} \\ y(0) &= \frac{Pl_2^2}{5EI}(2L + l_1)\end{aligned}$$

となります。点 A($x = 0$) でのたわみは式 (81 に一致します。また、点 C のたわみ角は点 A のたわみ角に等しいはずです。点 C のたわみ角はすでに計算したように、

$$\frac{dy(l_1)}{dx} = -\frac{Pl_2^2}{2EI}$$

となります。

5.4.4 例題 4:部分的な分布荷重を受ける両端単純支持はり

図 40 に示すはりのたわみ角とたわみを求めなさい。

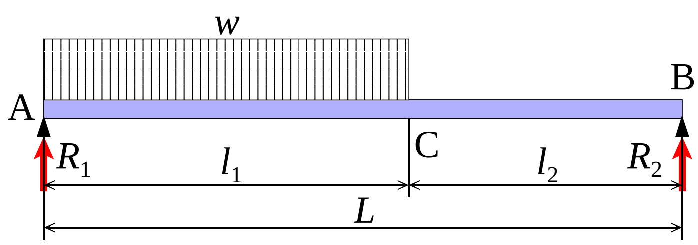


図 40: 部分的な分布荷重を受ける両端単純支持はり

解 まず、外力の分布を定めます。この例題では、$0 < x < l_1$ の間で等分布荷重が作用し、それ以外では外力としての荷重は作用していません。この等分布荷重は部分的なので、荷重分布を求めます。

はり全体 $(0 < x < L)$ にわたって分布荷重が作用している場合は、Heaviside の単位関数を用いると、

$$w(x) = wH(x)$$

で表されます。今考えている問題では、分布荷重は $0 < x < l_1$ の間でのみ作用していますので、上の荷重分布では表現できません。$l_1 < x < L$ で作用する分布荷重は同じように Heaviside の単位関数を用いると、

$$w'(x) = wH(x - l_1)$$

になります。従って、$0 < x < l_1$ の間でのみ作用する分布荷重を表現するためには、

$$wH(x) - wH(x - l_1)$$

とすればよいことが分かります。この表現を使い、せん断力分布を求めると、点 A での反力を R_1 とすれば、

$$Q(x) = R_1 - w < x >^1 + w < x - l_1 >^1$$

になります。さらに、曲げモーメントの分布は、はり全体で

$$M(x) = R_1 < x >^1 - \frac{w}{2} < x >^2 + \frac{w}{2} < x - l_1 >^2$$

となります。あとは同じようにしてたわみ角およびたわみは

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{R_1}{2EI} < x >^2 + \frac{w}{6EI} < x >^3 - \frac{w}{6EI} < x - l_1 >^3 + c_1$$

$$y(x) = -\frac{R_1}{6EI} < x >^3 + \frac{w}{24EI} < x >^4 - \frac{w}{24EI} < x - l_1 >^4 + c_1 x + c_2$$

となります。境界条件は点 B で曲げモーメントが零、点 A、B でたわみが零の全部で三つですが、このうちの点 A でたわみが零であるという条件から $c_2 = 0$ です。残る二つの条件から、

$$R_1 = \frac{w}{2L}(L^2 - l_2^2) \quad , \quad c_1 = \frac{w}{24EIL}(L^2 - l_2^2)^2$$

となります。特に、$l_1 = l_2 = L/2$ のときの中央たわみは

$$y(L/2) = \frac{5wL^4}{768EI}$$

となります。

5.5 不静定問題

5.5.1 例題 1:集中荷重を受ける一端単純支持他端固定はり

図 26 に示すはりの SFD、BMD、たわみ角、たわみを求めなさい。

解 まず、曲げモーメントの分布は、はり全体で

$$M(x) = R_1 < x >^1 - P < x - l_1 >^2$$

で与えられます。ここで、反力 R_1 は未知のままです。この曲げモーメント分布に対してたわみ角およびたわみを求めると、

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= -\frac{1}{2EI} R_1 < x >^2 + \frac{1}{2EI} P < x - l_1 >^2 + c_1 \\ y(x) &= -\frac{1}{6EI} R_1 < x >^3 + \frac{1}{6EI} P < x - l_1 >^3 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

ここでは未知の反力 R_1 を含めて全部で 3 個の未定係数があります。必要な境界条件は、単純支持点 A($x = 0$) でたわみが零、固定端 B でたわみ角とたわみが零という条件です。これらを式で表すと、

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &; \quad y(0) = 0 \\ x = L \quad &; \quad \frac{dy(L)}{dx} = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

境界条件は 3 個で未定係数も 3 個なので、全ての係数が決定されることになります。点 A での条件から得られる $c_2 = 0$ を除く 2 個の未定係数に関する連立方程式は

$$\begin{aligned} 2EIc_1 - L^2 R_1 &= -Pl_2^2 \\ 6EILc_1 - L^3 R_1 &= -Pl_2^3 \end{aligned}$$

になります。これから

$$R_1 = \frac{Pl_2^2}{2L^3}(2L + l_1) \quad , \quad c_1 = \frac{Pl_1 l_2^2}{4EIL}$$

が得られます。

5.5.2 例題 2:集中荷重を受ける一端バネ支持他端固定はり

図 35 に示すはりのバネ支持点 A でのたわみ y_A を求めなさい。

解 まず、曲げモーメントの分布は、はり全体で

$$M(x) = R_1 < x >^1 - P < x - l_1 >^2$$

で与えられます。ここで、反力 $R_1 = ky_A$ です。この曲げモーメント分布に対してたわみ角およびたわみを求めると、

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= -\frac{1}{2EI} R_1 < x >^2 + \frac{1}{2EI} P < x - l_1 >^2 + c_1 \\ y(x) &= -\frac{1}{6EI} R_1 < x >^3 + \frac{1}{6EI} P < x - l_1 >^3 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

境界条件は

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &; \quad y(0) = y_A \\ x = L \quad &; \quad \frac{dy(L)}{dx} = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \end{aligned}$$

になりますから、これらから

$$\begin{aligned} c_2 &= y_A \\ 2EIc_1 - L^2 R_1 &= -Pl_2^2 \\ 6EILc_1 + 6EIc_2 - L^3 R_1 &= -Pl_2^3 \end{aligned}$$

この式から、

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{P(Ll_2^2 + l_2^3)}{4EIL} + \frac{3y_A}{2L} \\ R_1 &= \frac{Pl_2^2}{2L^3}(2L + l_1) - \frac{3EIy_A}{L^3} \end{aligned}$$

が得られます。$R_1 = ky_A$ とおいて y_A について解けば、

$$y_A = \frac{1}{2} \frac{Pl_2^2(2L + l_1)}{kL^3 + 3EI}$$

となります。

5.5.3 例題 3:集中荷重を受ける両端固定はり

図 33 に示すはりの SFD、BMD を求めなさい。

解 考えているはりを図 34 に示すような両端に未知の曲げモーメントを受ける両端単純支持はりとして考え、固定端 A、B での曲げモーメントを図のように仮定します。曲げモーメントの分布を、固定端 A で M_1 の曲げモーメントが作用するものとして式を立てると、

$$M(x) = -M_1 H(x) + R_1 < x >^1 - P < x - l_1 >^1$$

で与えられます。これらからたわみ角とたわみ関数は

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{M_1}{EI} < x >^1 - \frac{R_1}{2EI} < x >^2 + \frac{P}{2EI} < x - l_1 >^2 + c_1 \\ y_(x) &= \frac{M_1}{2EI} < x >^2 - \frac{R_1}{6EI} < x >^3 + \frac{P}{6EI} < x - l_1 >^3 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

となります。境界条件式は

$$
\begin{array}{lcl}
x=0 & ; & y(0)=0 \\
x=0 & ; & \dfrac{dy(0)}{dx}=0 \\
x=L & ; & \dfrac{dy(L)}{dx}=0 \\
x=L & ; & y(L)=0
\end{array}
$$

の四つです。しかし、これらの条件のうち、$x=0$ における二つの条件から c_1, c_2 は全て零になるので、残る二つの条件から

$$
\begin{aligned}
-2M_1L+R_1L^2 &= Pl_2^2 \\
-3M_1L^2+R_1L^3 &= Pl_2^3
\end{aligned}
$$

の二つの式だけが残り、これらから、

$$
M_1=\frac{Pl_1l_2^2}{L^2} \quad , \quad R_1=\frac{Pl_1^2}{L^3}(3L-2l_2)
$$

が得られます。

5.5.4 例題 4:変位が指定された支点を持つ等分布荷重を受けるはり

図 41 に示すように、等分布荷重を受けるはりの途中で固定端 B より y_C だけ高い位置に単純支持点をおいた。支点 C での反力を求めなさい。

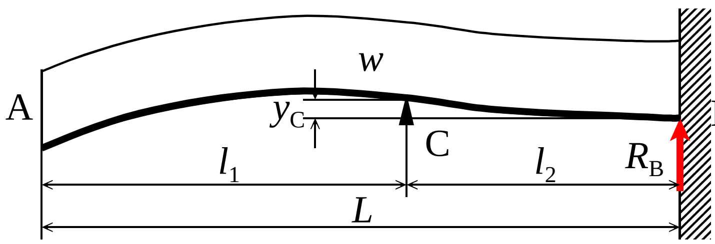


図 41: 変位が指定された支点を持つ等分布荷重を受けるはり

解 まず、曲げモーメントの分布ですが、自由端 A を座標原点として、

$$
M(x)=-\frac{1}{2}w<x>^2+R_c<x-l_1>^1
$$

となります。R_c はここで求めたい反力です。たわみ角およびたわみは

$$
\begin{aligned}
\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{w<x>^3}{6EI}-\frac{P_c}{2EI}<x-l_1>^2+c_1 \\
y(x) &= \frac{w<x>^4}{24EI}-\frac{P_c}{6EI}<x-l_1>^3+c_1x+c_2
\end{aligned}
$$

境界条件は

$$
\begin{array}{lcl}
x=l_1 & ; & y(l_1)=-y_C \\
x=L & ; & \dfrac{dy(L)}{dx}=0 \\
x=L & ; & y(L)=0
\end{array}
$$

となります。ここで、第一の境界条件で $y(l_1)=-y_C$ としているのは、下向きのたわみを正にとっているので、固定端から y_C 高い位置はたわみとしては負のたわみになるからです。

たわみ角とたわみの式を境界条件式に代入すれば、次の三つの式が得られます。

$$\begin{aligned}24EIl_1c_1+24EIc_2 &= -24EI\delta-wl_1^4\\24EILc_1+24EIc_2-4R_cl_2^3 &= -wL^4\\6EIc_1-3R_cl_2^2 &= -wL^3\end{aligned}$$

これらの式から、

$$R_c=\frac{w}{8l_2^2}(3l_2^3+8l_1l_2^2+6l_1^2l_2)+\frac{EIy_C}{3l_2^3}$$

となります。

5.5.5 例題 5:集中モーメントを受ける一端単純支持他端固定はり

図 32 に示すような、はりの途中にモーメント M_0 を受けるはりの SFD、BMD を求めなさい。

解 曲げモーメントですが、点 A を原点とすると、はり全体で

$$M(x)=R_1<x>^1+M_0H(x-l_1)$$

ですね。たわみ角は

$$\frac{dy(x)}{dx}=-\frac{R_1<x>^2}{2EI}-\frac{M_0<x-l_1>^1}{EI}+c_1$$

たわみは

$$y(x)=-\frac{R_1<x>^3}{6EI}-\frac{M_0<x-l_1>^2}{2EI}+c_1x+c_2$$

になります。境界条件は、単純支持点 A($x=0$) でたわみが零、固定端 B でたわみ角とたわみが零という条件です。これらを式で表すと、

$$\begin{aligned}x=0 \quad &; \quad y(0)=0\\x=L \quad &; \quad \frac{dy(L)}{dx}=0\\x=L \quad &; \quad y(L)=0\end{aligned}$$

点 A での条件から得られる $c_2=0$ を除く 2 個の未定係数に関する連立方程式は

$$\begin{aligned}2EIc_1-R_1L^2 &= 2M_0l_2\\6EILc_1-R_1L^3 &= 3M_0l_2^2\end{aligned}$$

これらの式から、

$$R_1=-\frac{3M_0l_2}{2L^3}(2l_1+l_2) \quad , \quad c_1=-\frac{M_0l_2}{4EIL}(2l_1-l_2)$$

というふうに求めることができます。

5.5.6 例題 6:三支点連続はり-その 1-

図 42 に示すような集中荷重を受ける連続はりの支点反力を求めなさい。

解 このような連続はりの問題は通常クラペイロンの三モーメントの公式を使って解く場合が一般的ですが、ここでは Singularity Function を使って解きます。

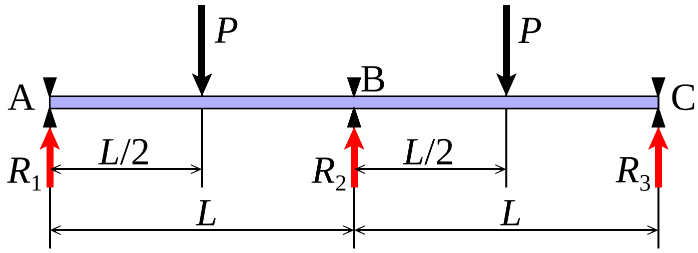


図 42: 集中荷重を受ける三支点連続はり-その 1-

曲げモーメントですが、点 A を原点とすると、はり全体で

$$\begin{aligned} M(x) &= R_1 < x >^1 - P < x - L/2 >^1 \\ &\quad + R_2 < x - L >^1 - P < x - 3L/2 >^1 \end{aligned}$$

となります。ここで、支点 A と B での反力 R_1 と R_2 は未知です。支点 A は単純支持点なので曲げモーメントは零ですね。

次に、たわみ角とたわみですが、これらは

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI} < x >^2 + \frac{P}{2EI} < x - L/2 >^2 \\ &\quad - \frac{R_2}{2EI} < x - L >^2 + \frac{P}{2EI} < x - 3L/2 >^2 + c_1 \\ y(x) &= -\frac{R_1}{6EI} < x >^3 + \frac{P}{6EI} < x - L/2 >^3 \\ &\quad - \frac{R_2}{6EI} < x - L >^3 + \frac{P}{6EI} < x - 3L/2 >^3 \\ &\quad + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

となります。境界条件は、支点 C で曲げモーメントが零であることと支点 A、B、C でたわみが零であることの四つです。すなわち、境界条件式は

$$\begin{aligned} x = 2L \quad &; \quad M(2L) = 0 \\ x = 0 \quad &; \quad y(0) = 0 \\ x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \\ x = 2L \quad &; \quad y(2L) = 0 \end{aligned}$$

です。未知の定数が二つの反力と二つの積分定数ですから、全部で四つの未知定数に対して条件が四つなのですべての定数が定まることになります。

$$\begin{aligned} 4R_1 + 2R_2 &= 4P \\ 8L^2 R_1 - 48EIc_1 &= PL^2 \\ 64L^2 R_1 + 8L^2 R_2 - 96EIc_1 &= 28PL^2 \end{aligned}$$

c_2 は二番目の条件から零です。残りの定数は

$$R_1 = \frac{5}{16}P (= R_3) \quad , \quad R_2 = \frac{11}{8}P \quad , \quad c_1 = \frac{PL^2}{32EI}$$

となります。以上のことから SFD と BMD を描くと図 43 のようになります。

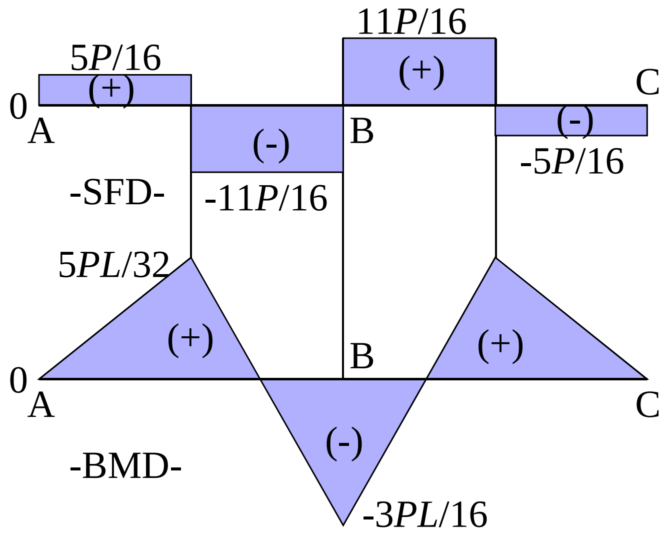


図 43: SFD と BMD

5.5.7　例題 7:三支点連続はり-その 2-

図 44 に示すような集中荷重を受ける連続はりの支点反力を求めなさい。

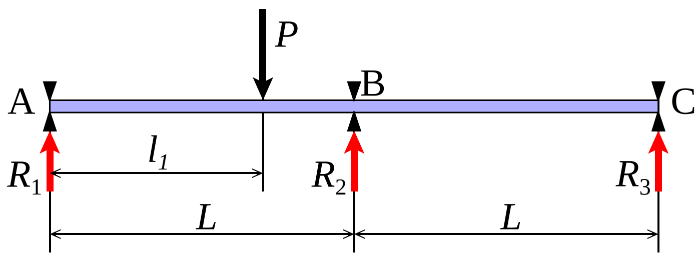


図 44: 集中荷重を受ける三支点連続はり-その 2-

解　曲げモーメントですが、点 A を原点とすると、はり全体で

$$M(x) = R_1 < x >^1 -P < x - l_1 >^1 +R_2 < x - L >^1$$

となります。ここで、支点 A と B での反力 R_1 と R_2 は未知です。
　次に、たわみ角とたわみですが、これらは

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= -\frac{R_1}{2EI} < x >^2 + \frac{P}{2EI} < x - l_1 >^2 \\ &\quad -\frac{R_2}{2EI} < x - L >^2 + c_1 \\ \\ y(x) &= -\frac{R_1}{6EI} < x >^3 + \frac{P}{6EI} < x - l_1 >^3 \\ &\quad -\frac{R_2}{6EI} < x - L >^3 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

となります。境界条件は、前の例題と同じで、支点 C で曲げモーメントが零であることと支点 A、B、C でたわみが零であることの四つです。すなわち、境界条件式は

$$
\begin{aligned}
x = 2L \quad &; \quad M(2L) = 0 \\
x = 0 \quad &; \quad y(0) = 0 \\
x = L \quad &; \quad y(L) = 0 \\
x = 2L \quad &; \quad y(2L) = 0
\end{aligned}
$$

です。未知の定数が二つの反力と二つの積分定数ですから、全部で四つの未知定数に対して条件が四つなのですべての定数が定まります。

$$
\begin{aligned}
2LR_1 + LR_2 &= (2L - l_1)P \\
L^3R_1 - 6EILc_1 &= Pl_1^3 \\
8L^3R_1 + L^3R_2 - 12EILc_1 &= (2L - l_1)^3P
\end{aligned}
$$

c_2 は二番目の条件から零です。残りの定数は

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{L - l_1}{L}P - \frac{l_1}{4L^3}(L^2 - l_1^2)P \\
R_2 &= \frac{l_1}{L}P + \frac{l_1}{2L^3}(L^2 - l_1^2)P \\
c_1 &= \frac{Pl_1}{24EIL}(L - l_1)(7L - 5l_1)
\end{aligned}
$$

となります。支点 C での反力は、

$$
R_3 = -\frac{l_1}{4L^3}(L^2 - l_1^2)P
$$

となります。以上のことから SFD と BMD を描くと図 45 のようになります。

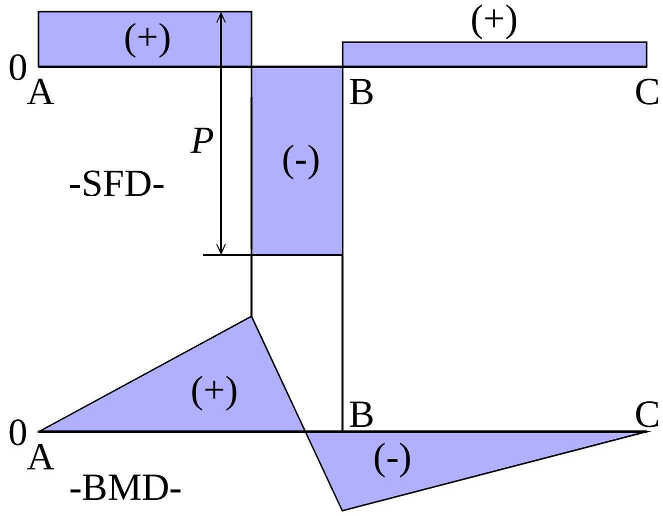


図 45: SFD と BMD