

例題で説明する

構造力学入門

関谷 壮 著

まえがき

構造力学は、土木、建築の分野では、重要な基礎科目であり、この分野を対象とした構造力学の本は、多くのものが出版されていて、橋梁、建築物、その他の建造物の設計に役立ってきた。機械系（機械、航空、車両、船舶など）の分野では、材料力学が重要な科目とされているが、構造力学もまた重要であり、実際問題に直面すると、各種の要素を組み合わせで作った機械や車両などの構造物に、静力学と材料力学の原理を応用する構造力学によって、解決されるべき問題も多い。構造力学と材料力学は、もともと別の学問でなく、構造材料力学とでもいうべき学問として、合いたずさえて進歩してきた。現代、構造解析は既製品のソフトにより、コンピューターで行われることが多くなったが、技術者は単にコンピューターのアウトプットを利用だけでなく、構造力学の最小限の基礎だけは理解しておきたいものである。

このような意味から、この本は構造力学の基礎を、簡単な例題によって、きわめて具体的に学べるように書いた入門書である。まず、簡単な例題を手計算で解決する方法をしっかり習得すれば、複雑な問題についても、手間を掛けるだけで、同様に扱うことができ、手間のかかる部分はコンピューターで扱うことができる。この本の最後の章では、コンピューターによる構造解析の基礎となるマトリックス法を、要約して述べている。

各章の最後には、読者が自力で解くことができるレベルの演習問題[A]、[B]を用意した。学習者はまず、各章の説明を例題を通じて、じゅうぶんにマスターしてから、演習問題[A]に挑戦し、さらに余裕があれば演習問題[B]も征服していただければ、深く納得することができるであろう。なお、演習問題[A]、[B]には、巻末に単なる答だけでなく、略解や詳細な解答や解説を示し、独習しやすいように配慮した。

予備知識として必要と思われる事項については、巻末に付録として解説したので、まず付録を読んでから、1章以下の本文に進んで頂いても良い。この本は、静力学、材料力学の予備知識がなくても、高校の微積分の初歩の部分の知識があれば、構造物の内力と変形の解析法を習得できるように構成してある。特に、物作りに必要であると思われるにもかかわらず、最近の理科教育で手薄になっている、静力学のいくつかの事項については、付録Aで詳細に説明した。また付録Bでは、材料力学を全く学んだことのない読者でも、手取り早く、材料力学の最小限の必要事項を習得できるよう配慮した。

この本が、初めて構造力学を学ばれる学生諸君、技術者の方々に役立てば幸いである。

著者

目次

1章 静定トラスの反力と内力	
1.1 構造物の荷重と支点的反力	1
1.2 トラスとは?	1
1.3 静定トラスの反力の求め方	2
1.4 静定トラスの部材内力の求め方	3
1.5 静定トラスの影響線	12
1.6 立体トラス	15
1章の演習問題	20
2章 構造の変形	
2.1 トラスの変形	24
2.2 はりの変形	30
2.3 ラーメンの変形 (半図式解法による)	36
2.4 ねじりと曲げを受ける構造	40
2章の演習問題	44
3章 不静定構造	
3.1 不静定トラス	48
3.2 他の不静定構造	53
3章の演習問題	61
4章 たわみ角法	
4.1 たわみ角式	66
4.2 節点方程式	77
4.3 層方程式	78
4.4 はりとラーメンの解析例	79
4章の演習問題	88
5章 マトリックス法 (コンピューターによる構造解析のための)	
5.1 局所座標系と基準座標系で表したトラスの剛性方程式	90
5.2 トラスの応力マトリックス	93
5.3 トラスの問題の解法	95
5.4 両端だけで荷重を受けるはり要素の剛性マトリックスと応力マトリックス	100
5.5 集中荷重を受けるはり	104
5.6 分布荷重を受けるはり	109
5.7 任意方向のはり要素の剛性マトリックス	111
5.8 ラーメンの解法	114
5章の演習問題	119

付録 A 静力学の必要事項

A.1 力の合成と分解	122
A.2 一点に作用する力の釣り合い	126
A.3 力のモーメント	126
A.4 偶力	128
A.5 任意の位置に作用する力を、原点に作用する力と偶力で置き換えること	129
A.6 n 個の異なる点に作用する n 個の力による平板状剛体の釣り合い	131
A.7 n 個の異なる点に作用する n 個の力による立体状剛体 (3次元剛体) の釣り合い	132

付録 B 材料力学の必要事項

B.1 引張または圧縮を受ける棒の内力	134
B.2 はりのせん断力と曲げモーメント	135
B.3 はりの分布荷重、せん断力、曲げモーメントの関係	137
B.4 はりの境界条件	139
B.5 棒のねじり	140
演習問題の答	143
索引	172

1章 静定トラスの反力と内力

1.1 構造物の荷重と支点の反力

構造物は、いろいろな力を受ける。例えば橋を通過する車両の重力、クレーンが吊り下げる貨物の重力、ビルや鉄塔に加わる風圧、飛行機の翼に加わる揚力や抗力、水中構造物に加わる水圧などである。これらの力を荷重という。構造物が荷重を受けても移動しないように支えられているとき、その支点で構造物を支える力が作用し、これを反力という。荷重も反力も構造物の外部から構造物に加わる力だから、これらを外力という

反力は、構造物の支点の状態により、種々異なるものである。通常、次の3種の反力が実際の反力を理想化したものとして、構造物の解析（構造解析）に用いられている。

(a) すべり支点の反力

これは、図 1.1(a)のように、その点で、構造物が自由に回転できるだけでなく、一方向 s にだけ自由に動くことができるような支点である。したがって、すべり面方向には抵抗は無く、すべり面方向の反力は 0 で、すべり面に垂直な方向にだけ、反力 R が作用する。

(b) 回転支点の反力

これは、図 1.2(b)のように、構造物はその点を中心として、自由に回転できるが、平行移動ができない支点である。この支点到作用する反力は、互いに直交する2つの反力成分（例えば同図に示すような s 方向の反力成分 H と n 方向の反力成分 R ）に分けて考えられる。

(c) 固定支点の反力

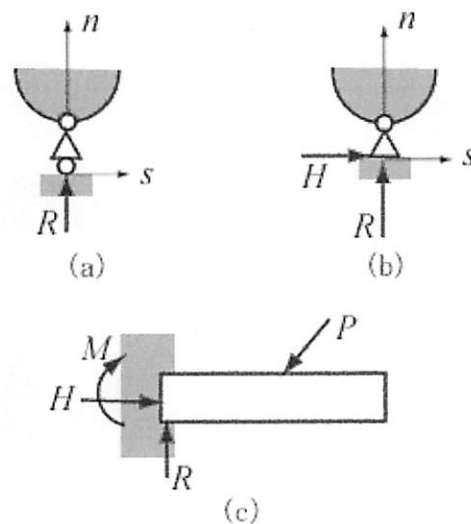


図 1.1

これは、図 1.2(c)のように、その点で平行移動も回転もできないような支点であって、この反力としては、例えば直角二方向方向の反力 H, R 、固定偶力 M が考えられる。

1.2 トラスとは？

(a) トラスとラーメン

多くのまっすぐな棒状物体を、それぞれ両端で互いに結合して作った構造物を、一般に骨組という。この骨組を作っている棒状の物体を部材といい、部材の結合点を節点という。この節点としては、摩擦のないヒンジ（モーメントを伝達しないピン継手）すなわち滑節と、部材同志を固定する（両部材端の変位と回転が一致する）剛節とが考えられている*。滑節だけから成る骨組をトラス、剛節から成る骨組をラーメンという**。

(b) 静定トラスと不静定トラス

トラスに外力が作用するとき、支点の反力、部材が受ける力すなわち部材内力が、力の釣り合い条件だけから求められる場合、このトラスを静定トラスといい、そうでない場合を不静定トラスという。

1. 3 静定トラスの反力の求め方

例題で説明しよう（付録 A, 式(A.14), (A.15), (A.16)を用いて解かれる例題である）。

例題 1.1 図 1.2 に示すトラスの支点 1, 4 での反力 R_1 , R_2 , H を与えられた荷重 P_1 , P_2 および図示の長さ L を用いて表せ。

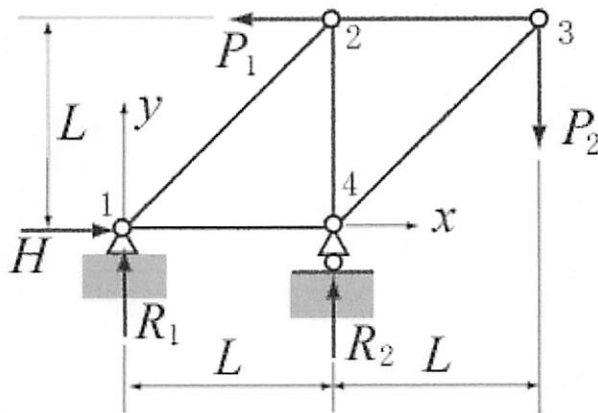


図 1.2

(解) 節点 1 を直角座標の原点とし、図 1.2 のように、水平に x 軸を、鉛直に y 軸をとる。

水平方向の力の釣り合いから (式(A.14)第 1 式)

$$-P_1 + H = 0 \tag{1}$$

鉛直方向の力の釣り合いから (式(A.14)第 2 式)

$$-P_2 + R_1 + R_2 = 0 \tag{2}$$

原点 1 のまわりのモーメントの釣り合いから (式(A.15), (A.16))

$$P_1 L - P_2 \cdot 2L + R_2 L = 0 \tag{3}$$

式(1)から

$$H = P_1 \text{ (答)} \tag{4}$$

式(3)から

* 実際の構造物の節点は滑節と剛節の中間の状態と考えられるが、設計などでの計算を可能にするため、滑節または剛節のどちらかの近い方と仮定（理想化またはモデル化）して扱うことも多い。

**実際には滑節と剛節が混在した構造も多い。

$$R_2 = 2P_2 - P_1 \quad (\text{答}) \quad (5)$$

式(5)を式(2)に代入し R_1 について解くと

$$R_1 = P_2 - R_2 = P_2 - 2P_2 + P_1 = P_1 - P_2 \quad (\text{答}) \quad (6)$$

例題 1.2 図 1.3 のトラスの支点での反力 R, H, V を求めよ。

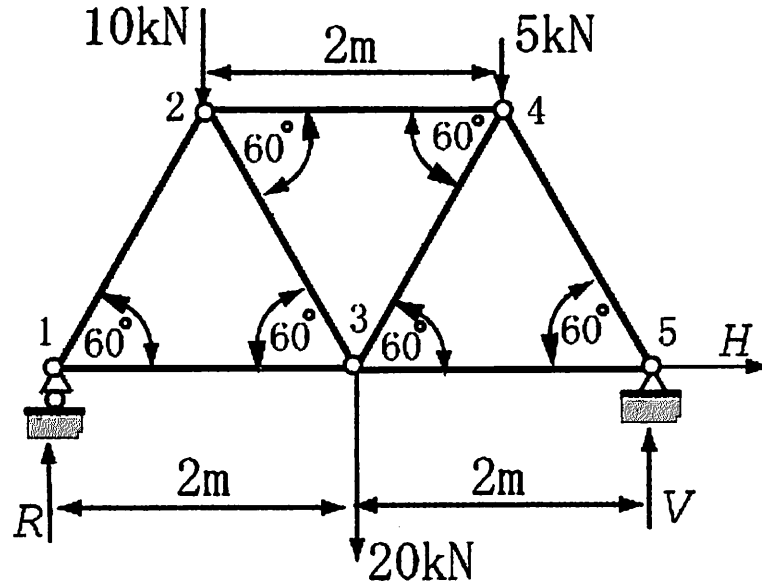


図 1.3

(解) 図 1.3 で、節点 1 を図 A.12 の原点 O とすると、このトラス全体に働く水平力、鉛直力、節点 1 のまわりのモーメントの釣り合いより、それぞれつぎの三つの式を得る：

$$H = 0 (\text{答}) \quad (1)$$

$$R + V - 10 - 20 - 5 = 0 \quad (2)$$

$$4V - 10 \times 1 - 20 \times 2 - 5 \times 3 = 0 \quad (3)$$

(3)より $V = 16.3 \text{ (kN)} \quad (\text{答}) \quad (4)$

(4)を(2)に代入 $R = 18.7 \text{ (kN)} \quad (\text{答}) \quad (5)$

1. 4 静定トラスの部材内力の求め方

トラスの各部材が受ける力、すなわち内力は、引張力と圧縮力だけと考える。これらは、軸力とも呼ばれ、節点を結ぶ直線に沿って作用するものとする*。

(a) 節点法

この解法では、トラスの各節点の近傍を切り出し、断面にその部材の内力を作用させ、各節点に働く水平力と鉛直力の釣り合い条件 (式(A.14)) を用いて、トラスの部材の内力を求める。以下、例題によって説明しよう。

* 節点を結ぶ直線が、棒の図心軸と一致しない場合、部材に曲げモーメントが作用する。この場合、断面の垂直応力の分布は、偏心軸力を受ける柱の垂直応力の計算法によって求められる (関谷、角、谷村、岡本、金岡：最新材料力学、朝倉書店 (1990), p.139)。この場合、トラスの部材 ij の内力 $S_{i,j}$ は、断面に作用する垂直応力の合力である。

例題 1. 3 図 1.2 のトラスの各部材の内力を求めよ。

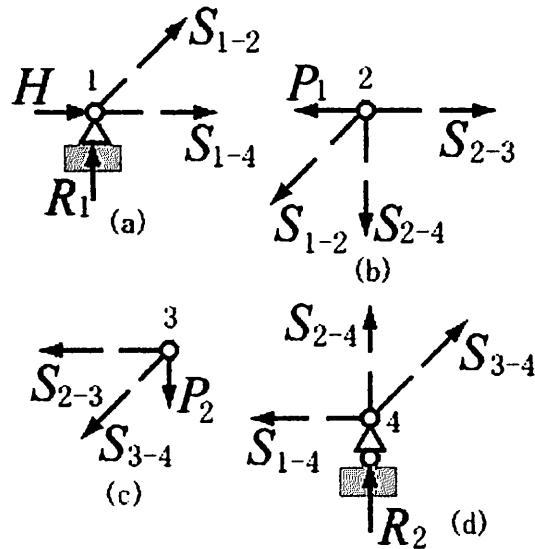


図 1.4

(解) 節点 1 の近傍を切り出すと、図 1.4(a)となる。 S_{1-2} 、 S_{1-4} は部材 12、14 の内力とする。以下では、部材 $i-j$ の引張内力を S_{i-j} とし、“ $S_{i-j} > 0$ のときは引張力、 $S_{i-j} < 0$ のときは圧縮力、 $S_{i-j} = 0$ のときは内力は働いていない”と理解する。

部材 14 の長さ=部材 24 の長さ = L
 であるから

$$\angle 214 = 45^\circ$$

となる。図 1.4(a)で水平力の釣り合いより

$$S_{1-2} \cos 45^\circ + S_{1-4} + H = 0$$

この式に例題 1.1 式(4)を代入し

$$\frac{S_{1-2}}{\sqrt{2}} + S_{1-4} = -P_1 \quad (1)$$

次に、図 1.4(a)のトラスの部分の鉛直方向の釣り合いより

$$S_{1-2} \sin 45^\circ + R_1 = 0 \quad (2)$$

この式に例題 1.1 の式(6)を代入し、 S_{1-2} について解けば

$$S_{1-2} = \sqrt{2}(P_2 - P_1) \quad (3)$$

式(3)を式(1)に代入し、簡単化すると

$$S_{1-4} = -P_2 \quad (4)$$

節点 2 の近傍を切り出すと、図 1.4(b)となる。この部分に作用する水平力の釣り合いより

$$-P_1 - S_{1-2} \cos 45^\circ + S_{2-3} = 0 \quad (5)$$

この式に式(3)を代入し、 $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ を考慮し、簡単化すると

$$S_{2-3} = P_2 \quad (6)$$

図 1.4(b)のトラス部分の鉛直方向の釣り合いより

$$-S_{1-2} \sin 45^\circ - S_{2-4} = 0 \quad (7)$$

この式を S_{2-4} について解き、式(3)を代入すると

$$S_{2-4} = -\frac{S_{1-2}}{\sqrt{2}} = -(P_2 - P_1) = P_1 - P_2 \quad (8)$$

節点 3 の近傍を切り出すと図 1.4(c)となる。この部分に作用する水平力の釣り合いより

$$-S_{2-3} - S_{3-4} \cos 45^\circ = 0 \quad (9)$$

この式を S_{3-4} について解き、式(6)を代入すると

$$S_{3-4} = -\frac{S_{2-3}}{\cos 45^\circ} = -\frac{S_{2-3}}{(1/\sqrt{2})} = -\sqrt{2}S_{2-3} = -\sqrt{2}P_2 \quad (10)$$

節点 3 の近傍の鉛直力の釣り合い条件は

$$-S_{3-4} \sin 45^\circ - P_2 = 0 \quad (11)$$

この式に式(10)を代入すると

$$\text{左辺} = -(-\sqrt{2}P_2) \times \frac{1}{\sqrt{2}} - P_2 = P_2 - P_2 = 0 = \text{右辺}$$

となり、鉛直力の釣り合い条件(11)は、確かに満たされている。この条件は、検算に用いられる。

節点 4 の近傍を切り出すと、図 1.4(d)となる。この部分に作用する水平力の釣り合い条件は

$$-S_{1-4} + S_{3-4} \cos 45^\circ = 0 \quad (12)$$

この左辺に式(4), (10)を代入すると

$$\text{左辺} = -S_{1-4} + S_{3-4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -(-P_2) + (-\sqrt{2}P_2) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = P_2 - P_2 = 0 = \text{右辺}$$

となり、水平力の釣り合い条件(12)は、確かに満たされている。

節点 4 の 近傍の鉛直力の釣り合い条件は

$$S_{2-4} + S_{3-4} \sin 45^\circ + R_2 = 0 \quad (13)$$

この左辺に式(8), (10), 例題 1.1 の式(5)を代入すると

$$\text{左辺} = P_1 - P_2 + (-\sqrt{2}P_2) \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2P_2 - P_1 = P_1 - P_2 - P_2 + 2P_2 - P_1 = 0 = \text{右辺}$$

となり、鉛直力の釣り合い条件(13)は、確かに満たされている。

例題 1.4 図 1.3 のトラスの部材の内力を求めよ。

(解) このトラスの反力は、前例題 1.2 で求めたから、これは既知として話を進める。各節点近傍を切り出して、釣り合いを考え、各部材に作用する内力を求めて行く。

節点 1 (図 1.5(a)) :

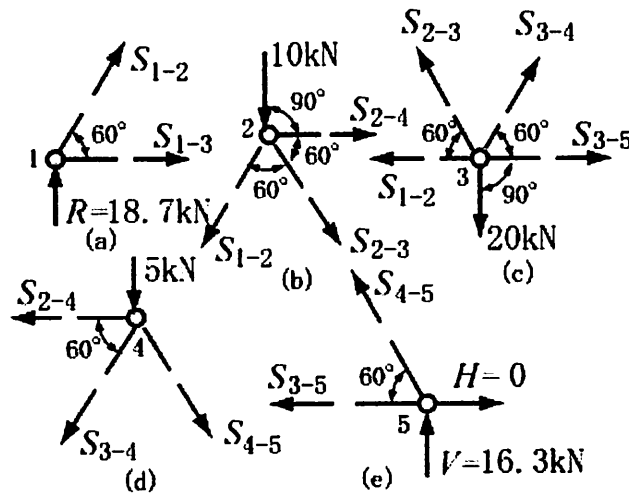


図 1.5

水平力の釣り合い

$$S_{1-2} \cos 60^\circ + S_{1-3} = 0 \quad (1)$$

鉛直力の釣り合い (18.8 は例題 1.2 で求めた反力 R の値)

$$S_{1-2} \sin 60^\circ + 18.7 = 0 \quad (2)$$

(2)より

$$S_{1-2} = -\frac{18.7}{\sin 60^\circ} = -\frac{18.7}{0.866} = -21.6 \text{ (kN)} \quad (3)$$

(3)を(1)に代入し

$$\begin{aligned} -21.6 \times 0.5 + S_{1-3} &= 0 \\ \therefore S_{1-3} &= 10.8 \text{ (kN)} \end{aligned} \quad (4)$$

節点 2 (図 1.5(b)) :

水平力の釣り合い

$$-S_{1-2} \cos 60^\circ + S_{2-3} \cos 60^\circ + S_{2-4} = 0 \quad (5)$$

鉛直力の釣り合い

$$-S_{1-2} \sin 60^\circ - S_{2-3} \sin 60^\circ - 10 = 0 \quad (6)$$

式(6)の両辺を $-\sin 60^\circ$ で割り、(3)を代入すると

$$\begin{aligned} -21.6 + S_{2-3} + 11.5 &= 0 \\ \therefore S_{2-3} &= 10.1 \text{ (kN)} \end{aligned} \quad (7)$$

(3), (7)を(5)に代入し

$$\begin{aligned} -(-21.6) \times \cos 60^\circ + 10.1 \times \cos 60^\circ + S_{2-4} &= 0 \\ \therefore S_{2-4} &= -15.9 \text{ (kN)} \end{aligned} \quad (8)$$

節点3 (1.5(c)) :

水平力の釣り合い

$$\begin{aligned} -S_{1-3} - S_{2-3} \cos 60^\circ + S_{3-4} \cos 60^\circ + S_{3-5} &= 0 \\ \therefore -S_{1-3} - 0.5S_{2-3} + 0.5S_{3-4} + S_{3-5} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

鉛直力の釣り合い

$$S_{2-3} \sin 60^\circ + S_{3-4} \sin 60^\circ - 20 = 0 \quad (10)$$

(10)の両辺を $\sin 60^\circ$ で割り、(7)を代入すると

$$\begin{aligned} 10.1 + S_{3-4} - 23.1 &= 0 \\ \therefore S_{3-4} &= 13.0 \text{ (kN)} \end{aligned} \quad (11)$$

(9)に(4), (7), (11)を代入し

$$\begin{aligned} -10.8 - 10.1 \times 0.5 + 13.0 \times 0.5 + S_{3-5} &= 0 \\ \therefore S_{3-5} &= 9.4 \text{ (kN)} \end{aligned} \quad (12)$$

節点4 (図 1.5(d)) :

水平力の釣り合い

$$-S_{2-4} - S_{3-4} \cos 60^\circ + S_{4-5} \cos 60^\circ = 0 \quad (13)$$

この式を S_{4-5} について解き、(8), (11)を代入すると

$$\therefore S_{4-5} = 2S_{2-4} + S_{3-4} = 2 \times (-15.9) + 13.0 = -18.8 \text{ (kN)} \quad (14)$$

鉛直力の釣り合い

$$-5 - S_{3-4} \sin 60^\circ - S_{4-5} \sin 60^\circ = 0 \quad (15)$$

この式の左辺に(11), (14)を代入して見ると

$$(15)の左辺 = -5 - 13.0 \times 0.866 - (-18.8) \times 0.866 = 0 = (15)の右辺$$

となり、今まで求めた内力は、節点4の鉛直力の釣り合い条件(15)を満たすことが、確認される。したがって、内力を求める計算は、(14)までで終わっており、それ以後の釣り合い条

件は、内力の計算に必要でなく、内力が正しく求められているかどうかの検算に利用される。

節点 5 (図 5(e)) :

水平力の釣り合い

$$-S_{3-5} - S_{4-5} \cos 60^\circ + H = 0 \quad (16)$$

今まで求めた内力が、(16)を満たすことを確かめる。(16)の左辺に(12), (14)および例題 1.2 の(1)を代入すると

$$(16)の左辺 = -9.4 + 18.8 \times \frac{1}{2} + 0 = -9.4 + 9.4 = 0 = (16)の右辺$$

となり、(16)は満たされている。

鉛直力の釣り合い

$$S_{4-5} \sin 60^\circ + V = 0 \quad (17)$$

(17)の左辺に(14), 例題 1.2 の(4)を代入すると

$$(17)の左辺 = -18.8 \times 0.866 + 16.3 = -16.3 + 16.3 = 0 = (17)の右辺$$

となり、(17)は満たされている。

以上のように、(15), (16), (17)は、検算に利用された。

(b) 切断法

この方法はトラスを、1点で交わらない3部材を横切る断面 t-t で切断して、二つの部分に分け、切断された部材の切断面に、切断前の内力を外力のように作用させ、切断された二つの部分のどちらか一方について（どちらで考えても同じ結果が得られる）、力の釣り合いまたはモーメントの釣り合いを考えて、切断された部材の内力を求める方法である。この場合、力の釣り合いを用いる方法をクルマン(Culmann)の方法、一点のまわりのモーメントの釣り合いを用いる方法をリッター(Ritter)の方法という。こうこれらの方法を一つのトラスの解析に混合して用いることができる。以下、このことを二三の例題で説明しよう。

例題 1.5 図 1.7 に示すトラスの部材 2-5, 3-4, 3-5, 4-6, 5-6, 5-7 の内力を切断法で求めよ。

(解) 図 1.7 のトラスの形状と荷重は、部材 4-5 に対して左右対称で、荷重はすべて鉛直方向であるから、左右の支点 1, 8 での反力は等しく、図 1.7 のように、同一の上向き力 R である。まずこの反力は、トラスの鉛直方向の力の釣り合いから

$$R + R = \frac{P}{2} + P + P + P + \frac{P}{2}$$
$$\therefore R = 2P \quad (1)$$

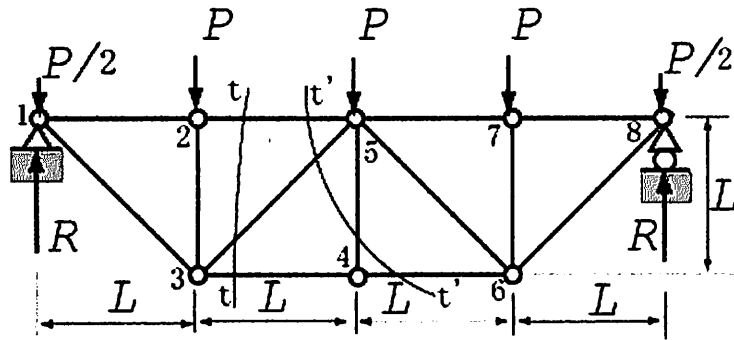


図 1.7

図 1.7 の断面 t-t の左右の部分を取り出して見ると、図 1.8(a)となり、この左側部分に作用する水平力、鉛直力、節点 3 のまわりのモーメントの釣り合いから

$$S_{3-4} + S_{2-5} + S_{3-5} \cos 45^\circ = 0 \quad (2)$$

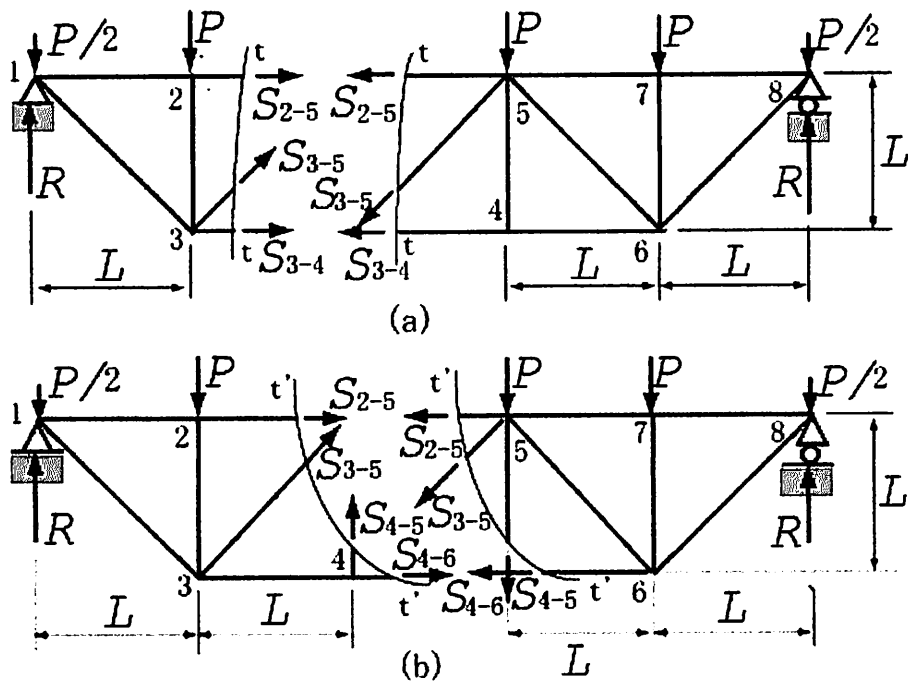


図 1.8

$$S_{3-5} \sin 45^\circ + R - \frac{P}{2} - P = 0 \quad (3)$$

$$S_{2-5}L + RL = \frac{P}{2}L \quad (4)$$

となる。(1)を(4)に代入し、 S_{2-5} について解けば

$$S_{2-5} = -\frac{3}{2}P \quad (5)$$

(1) を(3)に代入し、 S_{3-5} について解けば

$$S_{3-5} = -\frac{P}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

(5), (6)を(2)に代入し

$$\begin{aligned} S_{3-4} + \left(-\frac{3}{2}P\right) + \left(-\frac{P}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \\ \therefore S_{3-4} &= 2P \end{aligned} \quad (7)$$

次に、図 1.8(b)の断面 v-v より左側の部分の鉛直方向の釣り合いから

$$S_{3-5} \sin 45^\circ + S_{4-5} + R - \frac{P}{2} - P = 0 \quad (8)$$

(1), (6)を(8)に代入し、 S_{4-5} について解くと

$$S_{4-5} = 0 \quad (9)$$

他の部材の内力も同様に求められる。この問題では、トラスの形状と荷重が部材 4-5 に対して対称であるから、トラスの左半分の部材の内力を求めると、右半分の部材の内力は対称性から図 1.7 と式(5), (6), (7)を参照して

$$\left. \begin{aligned} S_{5-7} &= S_{2-5} = -\frac{3P}{2} \\ S_{5-6} &= S_{3-5} = -\frac{P}{\sqrt{2}} \\ S_{4-6} &= S_{3-4} = 2P \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。

以上は、切断面の左側部分の釣り合いによって考えたが、右側部分の釣り合いによって考えてもよく（読者各自で試みられたい）、どちらによっても同じ結果が得られる。

例題 1.6 図 1.9 に示すトラスの部材 2-4, 3-4, 3-5, 4-5 の内力をリッターの方法で求めよ。

(解) 図 1.9 の断面 t-t より左側のトラスの部分を取り出し、部材断面に切断前に加っていた内力を作用させると、図 1.10(a)となる。

この図で、節点 3 のまわりのモーメントの釣り合いを考えると

$$\begin{aligned} S_{2-4} L \tan 30^\circ &= PL \\ \therefore S_{2-4} &= \sqrt{3}P \end{aligned}$$

節点 1 のまわりのモーメントの釣り合いを考えると

$$\begin{aligned} S_{3-4} \cdot 2L \sin 30^\circ &= PL \\ \therefore S_{3-4} &= P \end{aligned}$$

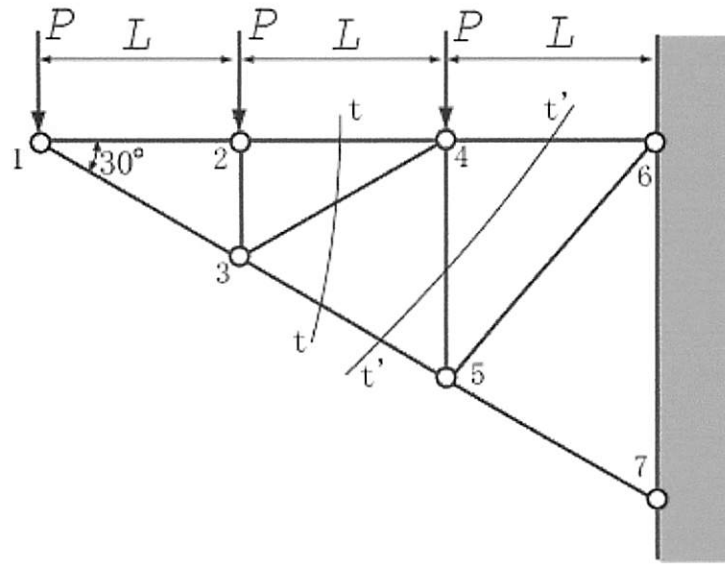
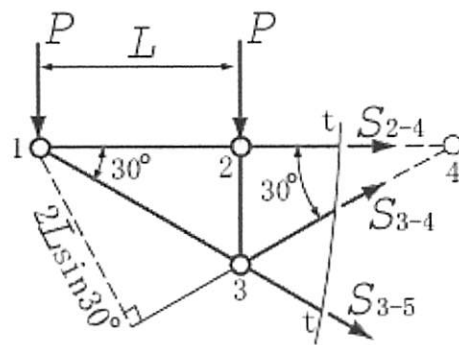
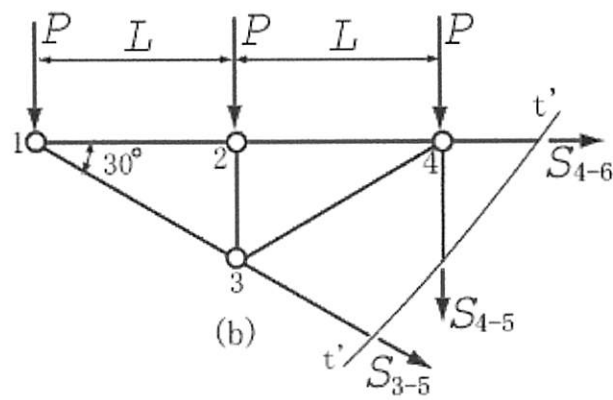


図 1.9



(a)



(b)

図 1.10

図 1.9 の断面 $t-t'$ より左側のトラスの部分を取り出し (図 1.10(b))、節点 4 のまわりのモーメントの釣り合いを考えると

$$z \quad S_{3-5} \cdot 2L \sin 30^\circ + P \cdot 2L + P \cdot L = 0$$

$$\therefore S_{3-5} = -3P$$

次に図 1-9 の断面 t-t' より左側のトラスの部分を切り出し、断面の切断前に加わっていた内力を作用させると、図 1.10(b)となる。

この図で、節点 1 のまわりのモーメントの釣り合いを考えると

$$S_{4-5} \cdot 2L + PL + P \cdot 2L = 0$$

$$\therefore S_{4-5} = -\frac{3}{2}P$$

1.5 静定トラスの影響線

天井走りクレーンの台車からクレーンに加わる荷重のように、構造物に加わる荷重の位置が変化したときに、構造物の部材の内力がどのように変化するかを示す線図を影響線という。次に具体的に例題で説明しよう。

例題 1.7 図 1.11(a)のトラスで、図に示すような鉛直下向き単位荷重 $P=1$ が、トラスの上弦材*1-2-3-4-5-6-7 上で移動するとき、上弦材 1-2, 2-3, 3-4 と下弦材 1'-3', 3'-5' の内力の値を、単位荷重の直下に示した図、すなわち、これらの部材内力の影響線を描け。

(解) 図 1.11(a)のように、単位集中荷重 $P=1$ の着力点の、左端の節点 1 からの距離を x 、右端の節点 7 からの距離を x' とする。 x 、 x' は荷重の位置に応じて変化する変数である。以下この例題では、リッターの方法を用いる。

トラスの反力：

図 1.11(a)のトラスの単位荷重 $P=1$ による左右支点の反力 R_1 、 R_7 は

$$R_1 = \frac{x'}{6L}, \quad R_7 = \frac{x}{6L} \quad (1)$$

で与えられる。

部材の途中に作用する荷重の扱い：

通常、トラスでは荷重は節点に作用するとしているが、例えば図 1.11 の単位荷重 $P=1$ のように、部材 4-5 の途中に作用しているときは、この単位荷重 $P=1$ は隣接節点 4, 5 までの距離 ξ 、 $L-\xi$ に反比例して、節点 4, 5 に振り分けられ、 $P_4 = 1 \times (L-\xi)/L$ が節点 4 に、 $P_5 = 1 \times \xi/L$ が節点 5 に作用すると考えて扱われる。

上弦材の影響線

部材 1-2

* このトラスの例でいえば、部材 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7 を上弦材、部材 1'-3', 3'-5', 5'-7 を下弦材、部材 1'-2, 2'-3, 3'-3, 3'-4, 4'-5, 5'-5, 5'-6, 6'-7 を腹材、腹材の中の 3'-3, 5'-5 を鉛直材という。

図 1.11(a)に示すように、単位荷重より左側で断面 t_1-t_1 によって、部材 1-2, 1'-2, 1'-3' を横切ってトラスを切断し、その左側だけを切り出して、部材切断面に部材内力を作用させて、節点 1' のまわりのモーメントの釣り合いを考えると

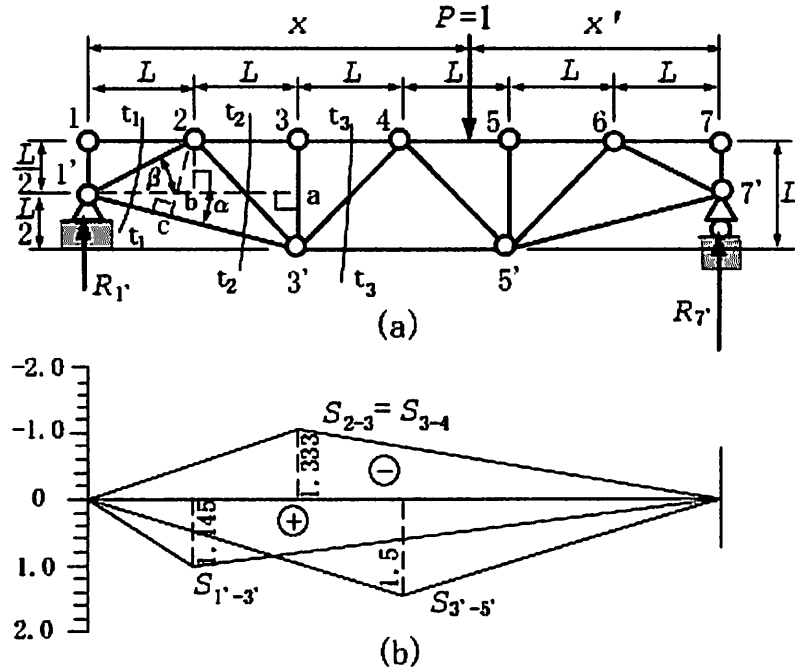


図 1.11

$$S_{1-2} = 0$$

を得る。ここで、単位荷重 $P = 1$ が部材 1-2 の途中で作用している場合は、単位荷重 $P = 1$ は、節点 1 に作用する $P_1 = (L-x)/L$ と節点 2 に作用する $P_2 = x/L$ に振り分けられ、節点 1 に作用する分力 P_1 は節点 1' のまわりにモーメントを作らない。

部材 2-3

(i) 図 1.11(a) の節点 3 より左に単位荷重 $P = 1$ が作用しているとき ($0 \leq x \leq 2L$)

部材 2-3, 2-3', 1'-3' を横切って任意の断面 t_2-t_2 を考える。

もし単位荷重 $P = 1$ が、上弦材 1-2 上に作用しているならば ($0 \leq x \leq L$)、断面 t_2-t_2 より右のトラスの部分の節点 3' のまわりのモーメントの釣り合いを考えることにより

$$S_{2-3} \cdot L + R_7 \cdot 4L = 0$$

$$\therefore S_{2-3} = -4R_7 = -4 \frac{x}{6L} = -\frac{2x}{3L} \quad (2)$$

もし単位荷重 $P = 1$ が、上弦材 2-3 上に作用しているならば ($L \leq x \leq 2L$)、この単位荷重 $P = 1$ を節点 2 に作用する $P_2 = (2L-x)/L$ と、節点 3 に作用する $P_3 = (x-L)/L$ に分けて作用させる。断面 t_2-t_2 より右側の部分の節点 3' のまわりの釣り合いを考えると、 P_3 は節点 3' のまわりにモーメントを作らないから、式(2)と同一の式を得る。したがって、式(2)は $0 \leq x \leq 2L$ に対し成り立つ式である。

(ii) 図 1.11 の節点 3 より右に単位荷重 $P = 1$ が作用しているとき ($2L \leq x \leq 6L$)

部材 2-3 を横切って断面 t_2-t_2 を考え、それより左の部分の節点 3' のまわりのモーメントの釣り合いを考えると、

$$R_1 \cdot 2L + S_{2-3} \cdot L = 0$$

$$\therefore S_{2-3} = -2R_1 = -2 \times \frac{x'}{6L} = -\frac{x'}{3L} = -\frac{6L-x}{3L} \quad (3)$$

節点 3 に単位荷重 $P = 1$ が作用しているときは、式(2)、(3)のいずれを使ってもよく、(2)、(3)で $x = 2L$ として

$$(S_{2-3})_{x=2L} = -\frac{4}{3} \quad (4)$$

を得る。式(2) ($0 \leq x \leq 2L$) および式(3) ($2L \leq x \leq 6L$) のグラフが S_{2-3} の影響線で、これを図 1.11(b) に示す。この図で、 $0 \leq x \leq 2L$ のグラフ (式(2)) はこう配 $-2/3L$ の直線、 $2L \leq x \leq 6L$ のグラフ (式(3)) はこう配 $1/3L$ の直線である。これらのグラフは $x = 2L$ で同一の値 (式(4)) をとるので、影響線は $x = 2L$ で連続である。しかしこの影響線のこう配は、 $x = 2L$ で不連続的に変化する。

部材 2-3 の内力の影響線について、以上ではやや詳しく説明した。他の部材内力の影響線についても同様であるので、以下では詳細な説明を避け、簡単に要点を示すだけとする。

部材 3-4

図 1.11 で、部材 3-4、3'-4、3'-5' を横切って断面 t_3-t_3 を考える。節点 3' のまわりのモーメントの釣り合いを考えることにより、式(2)、(3)で S_{2-3} の代わりに S_{3-4} とした式を得る。なお、このようにするまでもなく、節点 3 で節点法を用い、水平力の釣り合いを考えれば

$$S_{2-3} = S_{3-4} \quad (5)$$

であることから、 S_{3-4} の影響線と S_{2-3} の影響線は一致することが分かる。

部材 4-5, 5-6, 6-7

部材 4-5, 5-6, 6-7 の影響線は、節点 4 を通る鉛直線に対し、部材 3-4, 2-3, 1-2 の影響線と対称な図形となる。ここでは、煩雑を避けて、これらの影響線の図は示さない。

下弦材

部材 1'-3'

(i) 単位荷重 $P = 1$ が、節点 2 より左にあるとき ($0 \leq x \leq L$)

図 1.11(a) で、単位荷重 $P = 1$ より右で節点 2 より左に想定された断面 t_1-t_1 または断面 t_2-t_2 より右のトラスの部分の節点 2 のまわりのモーメントの釣り合いより

$$S_{1'-3'} \cdot h = R_7 \cdot 5L$$

を得る。ここで、 $h =$ 節点 2 から部材 1'-3' に引いた垂線 2-c (図中破線で示す) の長さ*

* 図 1.11(a) より $\tan \alpha = a_3'/1'a = 0.5/2 = 0.25$, $\tan \beta = 2b/1'b = 0.5 \therefore \alpha = 14.0^\circ$, $\beta = 26.6^\circ \therefore \alpha + \beta = 40.6^\circ$
 $\therefore h = 1'2 \sin(\alpha + \beta) = 1'2 \sin 40.6^\circ$, ここで 1'2 は直角三角形 121' に三平方の定理を適用して求められる。 $\therefore h = 0.729L$

$$\therefore S_{1'-3'} = \frac{5R_7 L}{h} = \frac{5(x/6L) \cdot L}{0.729L} = 1.14 \frac{x}{L} \quad (6)$$

(ii) 単位荷重 $P=1$ が、節点 2 より右にあるとき ($L \leq x \leq 6L$)

図 1.11(a)で、切断線 t_1-t_1 より左、または単位荷重より左にとられた切断線 t_2-t_2 より左のトラスの部分の節点 2 のまわりの釣り合いより

$$S_{1'-3'} h = R_1 L$$

$$\therefore S_{1'-3'} = \frac{R_1 L}{h} = \frac{(x'/6L)L}{0.729L} = \frac{6L-x}{0.729 \times 6L} = \frac{6L-x}{4.37L} \quad (7)$$

単位荷重 $P=1$ が節点 2 上に作用するとき、式(6), (7)のどちらかで $x=L$ としても、同じ

$$S_{1'-3'} = 1.14$$

が得られる。式(6)のこう配は $1.14/L$ 、式(7)のこう配は $-(1/4.37L) = -0.229/L$ である。これらのこう配の絶対値の比は約節点 2 の両端からの距離の反比 5:1 に等しい。

以上より下弦材 $1'-3'$ の影響線は $0 \leq x \leq L$ に対し式(6)、 $L \leq x \leq 6L$ に対し式(7)のグラフとなり、図 1.11 に示すようである。

部材 $3'-5'$

(i) 単位荷重 $P=1$ が、節点 4 より左にあるとき

図 1.11(a)で、断面 t_3-t_3 を単位荷重 $P=1$ より右にとると、断面 t_3-t_3 より右のトラスの部分の節点 4 のまわりの釣り合いより

$$S_{3'-5'} L = R_7 \cdot 3L$$

$$\therefore S_{3'-5'} = \frac{(x/6L) \cdot (3L)}{L} = \frac{x}{2L} \quad (8)$$

(ii) 単位荷重 $P=1$ が、節点 4 より右にあるとき

図 1.11(a)で、切断線 t_3-t_3 より左のトラスの部分の節点 4 のまわりのモーメントの釣り合いより

$$S_{3'-5'} L = R_1 \cdot (3L)$$

$$\therefore S_{3'-5'} = \frac{3R_1 L}{L} = \frac{x'}{2L} = \frac{6L-x}{2L} \quad (9)$$

単位荷重 $P=1$ が、節点 4 に作用するとき、すなわち $x=3L$ のときは、式(8), (9)より

$$S_{3'-5'} = \frac{3}{2} = 1.5$$

となり、式(8) ($0 \leq x \leq 3L$)、式(9) ($3L \leq x \leq 6L$) は $x=3L$ で連続な影響線を与える。

以上より図 1.11(b)のような、上弦材と下弦材の内力に対する影響線を得る。

1.6 立体トラス

前節までのトラスでは部材の図心軸と力の作用線が、 x, y 面内にある場合(平面トラス)を扱った。この節では、図心軸と力の作用線が、一般に x, y, z 方向の成分(射影)を持つ場合(立体トラス)を扱う。

問題の解き方は、平面トラスのときと同様であるので、ここでは簡単な例題の説明だけとする。

例題 1.11 図 1.12 に示すように、柱 1-2 を鉛直に立て、棒 1-5 と共に節点 1 でピン継ぎ手によって、床に結合する。また、柱 1-2, 棒 1-5 は、ワイヤーロープ 2-3, 2-4, 2-5 で保持され、節点 5 に同図のように荷重 P を吊り下げる。各部材の長さや部材 1-5 の取り付け角は、同図のようである。ワイヤーロープ 2-3, 2-4 に作用する張力および、節点 1 での反力を求めよ。

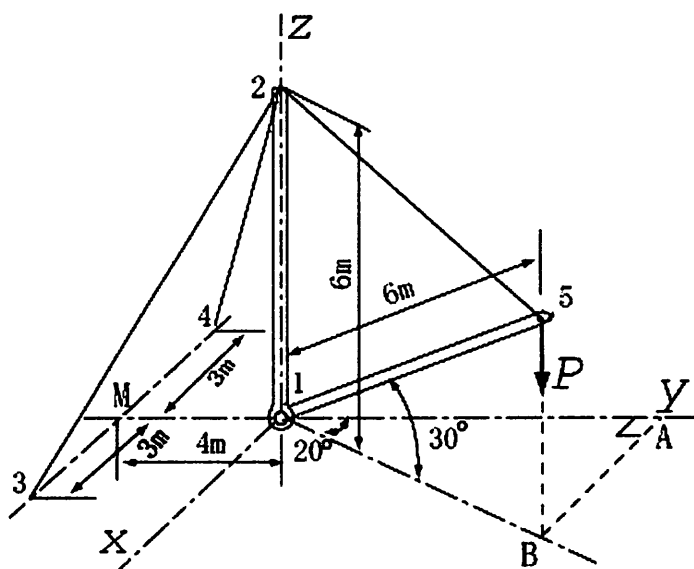


図 1.12

(解) ワイヤロープ 2-3, 2-4, 2-5 に加わる張力を、それぞれ S_{2-3} , S_{2-4} , S_{2-5} , 柱 1-2, 棒 1-5 の内力をそれぞれ S_{1-2} , S_{1-5} とする。点 1 での地面の反力の x, y, z 成分を R_x, R_y, R_z とし、各反力成分と節点 2 に加わるロープの張力は、図 1.13 に示す通りである。

節点 2 の座標は $(0, 0, 6)$

節点 3 の座標は $(3, -4, 0)$

節点 4 の座標は $(-3, -4, 0)$

であるから

$$\text{部材 2-3 の長さ} = \text{部材 2-4 の長さ} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{61} = 7.81 \text{ (m)}$$

ロープ 2-3 から柱の節点 2 に加わる張力 S_{2-3} の方向余弦を $\cos \alpha_{2 \rightarrow 3}$, $\cos \beta_{2 \rightarrow 3}$, $\cos \gamma_{2 \rightarrow 3}$ とすれば*

* 節点 2 から節点 3 に向かう方向を 2→3 で表す。この方向と x, y, z 方向の間の角の余弦 (方向余弦) を考えている。以下同様である。

$$\cos \alpha_{2 \rightarrow 3} = \frac{3-0}{7.81} = \frac{3}{7.81} = 0.384$$

$$\cos \beta_{2 \rightarrow 3} = \frac{-4-0}{7.81} = \frac{-4}{7.81} = -0.512$$

$$\cos \gamma_{2 \rightarrow 3} = \frac{0-6}{7.81} = \frac{-6}{7.81} = -0.768$$

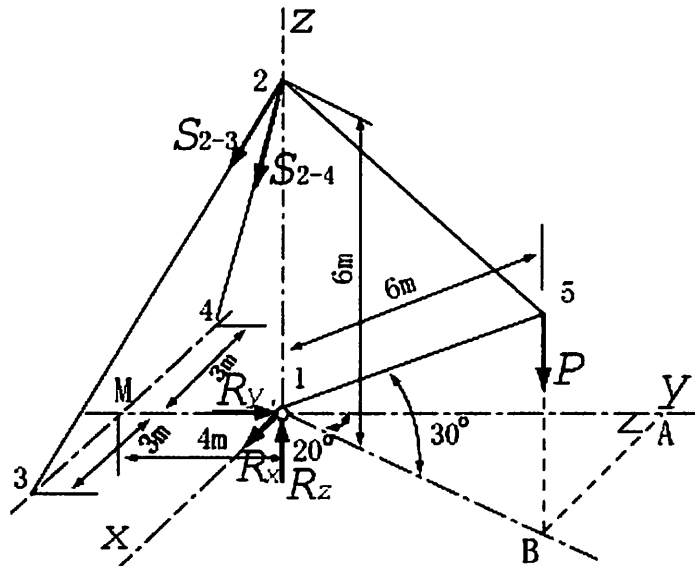


図 1.13

ロープ 2-4 から柱の節点 2 に加わる張力 $S_{2 \rightarrow 4}$ の方向余弦を $\cos \alpha_{2 \rightarrow 4}$, $\cos \beta_{2 \rightarrow 4}$, $\cos \gamma_{2 \rightarrow 4}$ とすれば

$$\cos \alpha_{2 \rightarrow 4} = \frac{-3-0}{7.81} = \frac{-3}{7.81} = -0.384$$

$$\cos \beta_{2 \rightarrow 4} = \frac{-4-0}{7.81} = \frac{-4}{7.81} = -0.512$$

$$\cos \gamma_{2 \rightarrow 4} = \frac{0-6}{7.81} = \frac{-6}{7.81} = -0.768$$

ロープから節点 2 に加わる張力 S_{2-3} , S_{2-4} の x, y, z 方向の成分を、それぞれ $S_{2 \rightarrow 3, x}$, $S_{2 \rightarrow 3, y}$, $S_{2 \rightarrow 3, z}$ および $S_{2 \rightarrow 4, x}$, $S_{2 \rightarrow 4, y}$, $S_{2 \rightarrow 4, z}$ とする。これらは、 x, y, z 座標軸の正方向を正とする。

$$\left. \begin{aligned} S_{2 \rightarrow 3, x} &= S_{2-3} \cos \alpha_{2 \rightarrow 3} = 0.384 S_{2-3} \\ S_{2 \rightarrow 3, y} &= S_{2-3} \cos \beta_{2 \rightarrow 3} = -0.512 S_{2-3} \\ S_{2 \rightarrow 3, z} &= S_{2-3} \cos \gamma_{2 \rightarrow 3} = -0.768 S_{2-3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

同様に

$$\left. \begin{aligned} S_{2 \rightarrow 4, x} &= S_{2-4} \cos \alpha_{2 \rightarrow 4} = -0.384 S_{2-4} \\ S_{2 \rightarrow 4, y} &= S_{2-4} \cos \beta_{2 \rightarrow 4} = -0.512 S_{2-4} \\ S_{2 \rightarrow 4, z} &= S_{2-4} \cos \gamma_{2 \rightarrow 4} = -0.768 S_{2-4} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1), (2)の成分、反力の成分および荷重を x, y, z 方向毎にまとめると、表 1.7 となる。

表 1.1

力	x 方向成分	y 方向成分	z 方向成分
S_{2-3}	$0.384 S_{2-3}$	$-0.512 S_{2-3}$	$-0.768 S_{2-3}$
S_{2-4}	$-0.384 S_{2-4}$	$-0.512 S_{2-4}$	$-0.768 S_{2-4}$
反力	R_x	R_y	R_z
荷重	0	0	$-P$

したがって、力の釣り合い条件 (式(A.18)) を用いると、表 1.17 の各成分を縦に合計して

$$\left. \begin{aligned} 0.384 S_{2-3} - 0.384 S_{2-4} + R_x &= 0 \\ -0.512 S_{2-3} - 0.512 S_{2-4} + R_y &= 0 \\ -0.768 S_{2-3} - 0.768 S_{2-4} + R_z - P &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。

次に、図 1.13 より

$$1 \cdot B \text{ の長さ} = 6 \cos 30^\circ = 5.20 \text{ m}$$

$$1 \cdot A \text{ の長さ} = (1 \cdot B \text{ の長さ}) \times \cos 20^\circ = 4.89 \text{ m}$$

$$AB = (1 \cdot B \text{ の長さ}) \times \sin 20^\circ = 1.78 \text{ m}$$

したがって、図 1.14 に示すように、 x, y, z 軸まわりのモーメント M_x, M_y, M_z の正方向を、 x, y, z 座標の正方向に進む右ねじの回転方向に取れば、各力による x, y, z 軸まわりのモーメントは、表 1.2 のようになる (R_x, R_y, R_z は x, y, z 軸まわりのモーメントを生じないから同表に記載していない)。モーメントに関して、式(A.19)を適用すれば、表 1.2 より

$$\left. \begin{aligned} \sum M_x &= 3.07 S_{2-3} + 3.07 S_{2-4} - 4.89 P = 0 \\ \sum M_y &= 2.30 S_{2-3} - 2.30 S_{2-4} + 1.78 P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\sum M_z = 0$ は満足されているから、考慮する必要はない。したがって、式(3), (4)を連立方程式として解くことにより、 S_{2-3} , S_{2-4} , R_x , R_y , R_z を求めることができる。まず、式(4)より

$$S_{2-3} = 0.408P, \quad S_{2-4} = 1.18P \quad (5)$$

これらを式(3)に代入すると

$$R_x = 0.296P, \quad R_y = 0.812P, \quad R_z = 2.22P \quad (6)$$

また、反力 \bar{R} の大きさは

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 2.38P \quad (7)$$

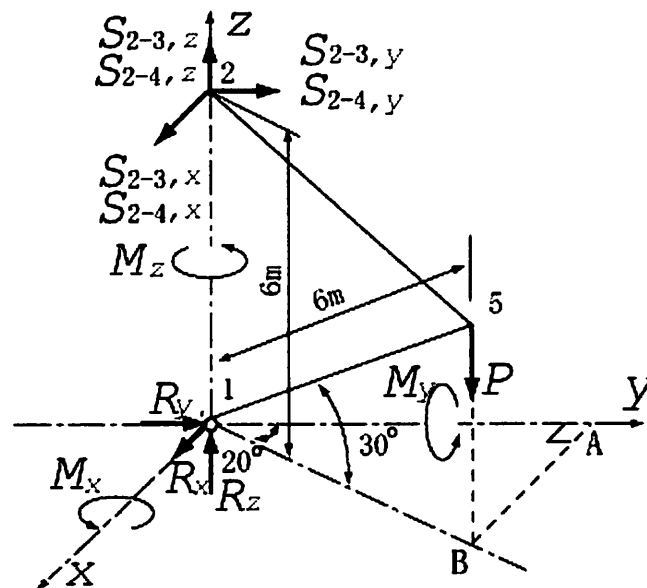


図 1.14

反力 \bar{R} と x , y , z 軸の間の角をそれぞれ α , β , γ とすると

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= R_x / R = 0.124 & \therefore \alpha &= 82.9^\circ \\ \cos \beta &= R_y / R = 0.341 & \therefore \beta &= 70.1^\circ \\ \cos \gamma &= R_z / R = 0.933 & \therefore \gamma &= 21.1^\circ \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。

表 1.2

力	x 軸まわり	y 軸まわり	z 軸まわり
$S_{2-3,x}$	0	$0.384S_{2-3} \times 6$	0
$S_{2-3,y}$	$0.512S_{2-3} \times 6$	0	0
$S_{2-3,z}$	0	0	0
$S_{2-4,x}$	0	$-0.384S_{2-4} \times 6$	0
$S_{2-4,y}$	$0.512S_{2-4} \times 6$	0	0
$S_{2-4,z}$	0	0	0
P	$-4.89P$	$1.78P$	0

1 章の演習問題

[A]

(1.1a) 図 1.15 の静定トラスの支点反力と部材内力を、節点法によって求めよ。

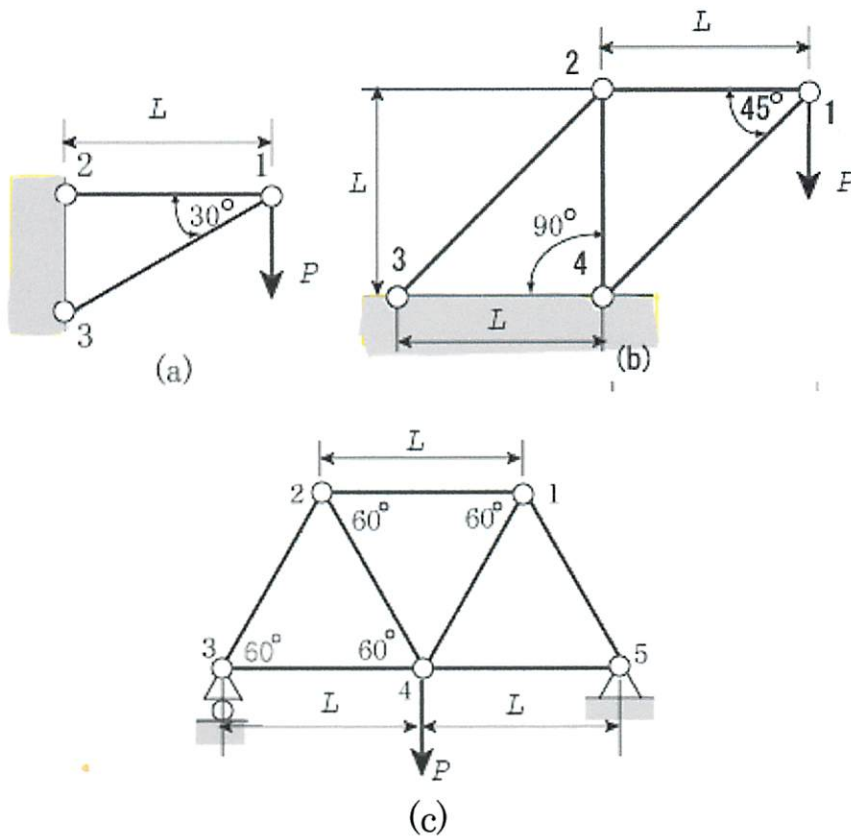


図 1.15

(1.2a) 図 1.15(b), (c) のトラスの各部材の内力を、リッターの法によって求めよ。

(1.3a) 図 1.16 のトラスの部材内力 S_{2-4} , S_{3-4} , S_{3-5} , S_{4-5} , S_{4-6} を切断法で求めよ*。

(1.4a) 図 1.11(a) のトラスで、同図に示すような鉛直下向き単位荷重 $P = 1$ が、トラスの上

* 線 t-t または v-v で切断して考えよ。

弦材 1-2-3-4-5-6-7 上で移動するとき、このトラスの斜材 3'-4、鉛直材 3-3'の内力の影響線を描け。

(1.5a) 図 1.17 のトラスの部材 1-3, 2-3, 3-4 の内力 S_{1-3} , S_{2-3} , S_{3-4} を求めよ。

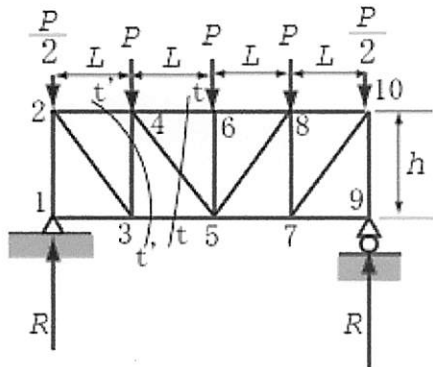


図 1.16

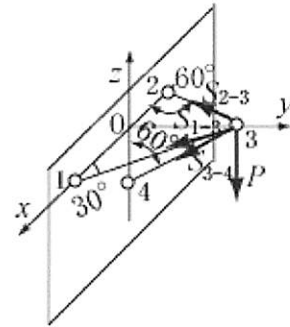


図 1.17

[B]

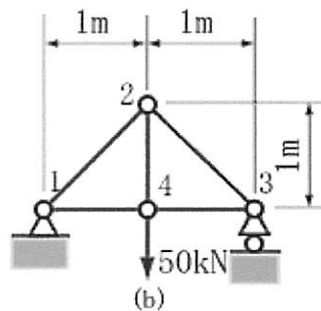
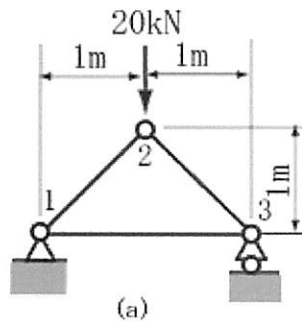
(1.1b) 図 1.18 のトラスの支点反力と部材内力を、節点法によって求めよ。

(1.2b) 図 1.18(e) のトラスの部材 23, 24, 34, 35 の内力 S_{2-3} , S_{2-4} , S_{3-4} , S_{3-5} を切断法で求めよ。

(1.3b) 図 1.19 のトラスの部材 24, 25, 35, 45 の内力 S_{2-4} , S_{2-5} , S_{3-5} , S_{4-5} をリッターの方法で求めよ。

(1.4b) 図 1.20 のトラスで、同図に示すように、鉛直下向き単位荷重 $P = 1$ が、下弦材 1-3-5 上で移動するとき、このトラスの部材 1-2, 1-3, 2-3, 2-4, 3-4 の内力の影響線を描け。

(1.5b) 図 1.21 の立体トラスの各部材内力を求めよ。



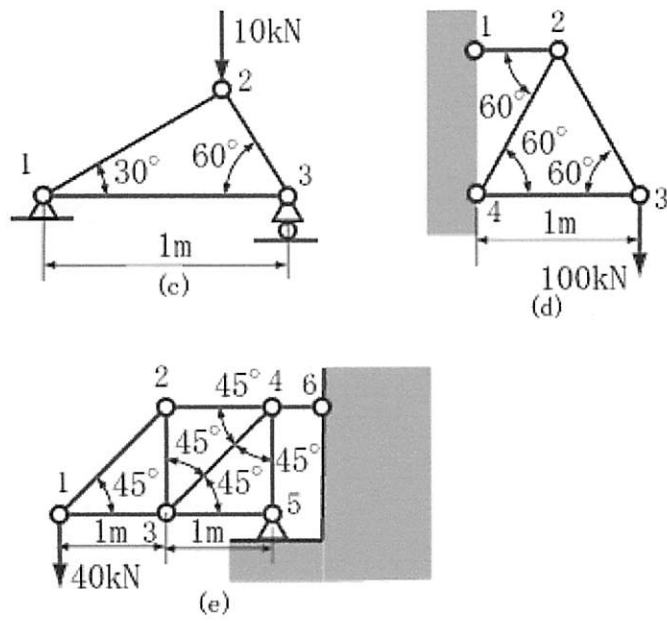


图 1.18

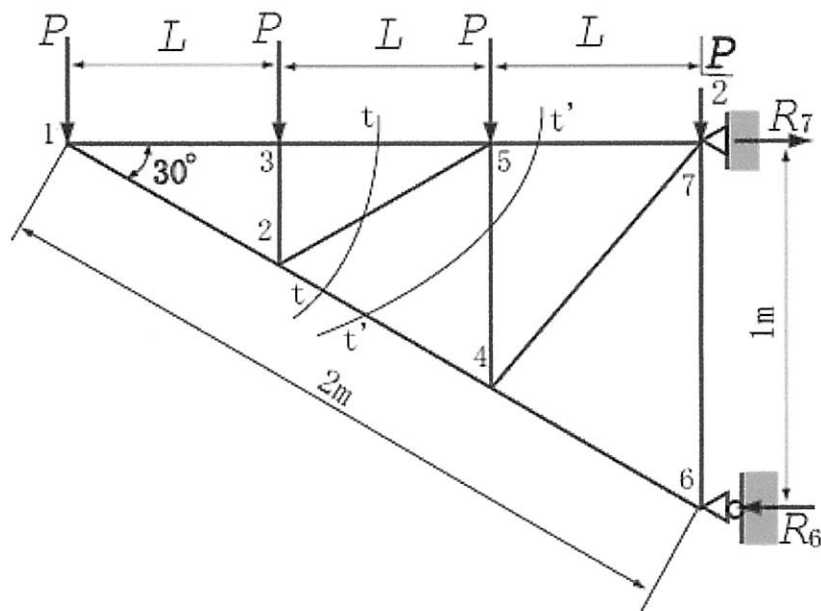


图 1.19

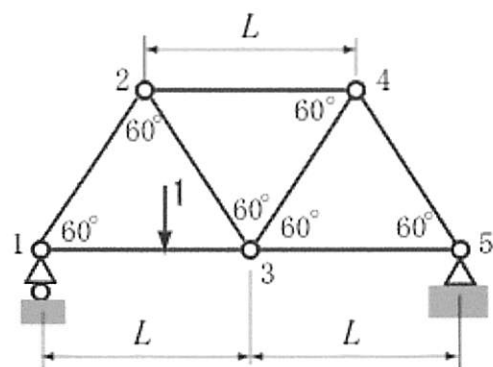


图 1.20

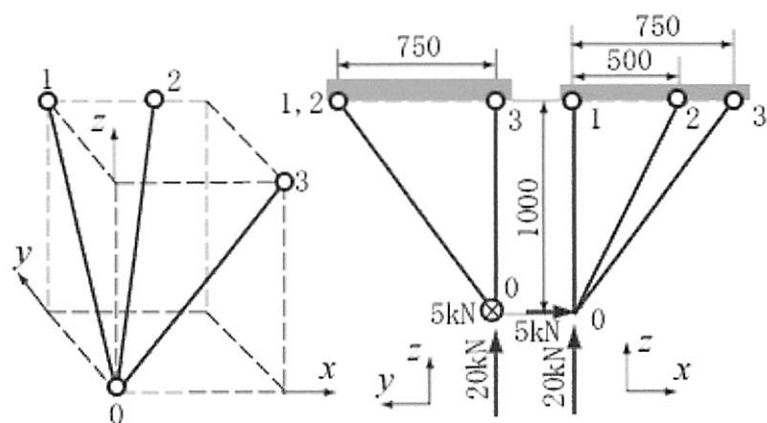


图 1.21

2章 構造の変形

2.1 トラスの変形

(a) 引張または圧縮のひずみエネルギー

図 2.1(a)のように、変形前の長さ L の真直棒を、 S_a の力で引張って（あるいは圧縮して）、弾性限度内で変形させ、 δ_a の伸び（あるいは縮み）を生じたとき、外部からなされる仕事または棒にたくわえられるひずみエネルギー U は、図 2.1(b)より次の式で与えられる：

$$U = \frac{S_a \delta_a}{2} \quad (2.1)$$

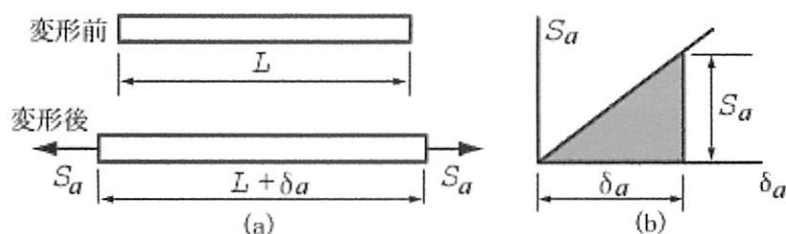


図 2.1

弾性限度内で、図 2.2(a)のように、二つの荷重 S_a , S_b を個別に受ける場合の変形（伸びまたは縮み）を、 δ_a , δ_b とすると、これらの荷重を同時に受けた場合の荷重は $S_a + S_b$, 変形は $\delta_a + \delta_b$ となる。この場合、外部からなされる仕事、または棒に蓄えられるひずみエネルギーは、荷重が加えられる順序に無関係で次式のいずれかによって与えられる（図 2.2(b), (c)）：

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (S_a + S_b) (\delta_a + \delta_b) \\ &= \frac{1}{2} S_a \delta_a + \frac{1}{2} S_b \delta_b + S_a \delta_b \\ &= \frac{1}{2} S_b \delta_b + \frac{1}{2} S_a \delta_a + S_b \delta_a \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\therefore S_a \delta_b = S_b \delta_a \quad (2.3)$$

式(2.3)の関係をベッチの相反定理という。

(b) 単位仮想荷重の方法によるトラスの変形の解析

図 2.3(a)のトラスが、同図のような荷重 P を受けるとする。まず手始めとして、非常に簡単な場合を考える。すなわちこのトラスで、上弦材 12 だけが弾性体であり、他の部材は剛体とする。そのとき荷重 P によって、上弦材には内力 S と伸び δ を生じるが、他の部材は剛体だから変形は生じない。このとき、荷重 P によって生じる着力点の P と同方向のたわみ成分 w_p は、 P と比例する。また、上弦材の内力 S と伸び δ も、たがい比例する。

外力のする仕事は、部材にたくわえられるひずみエネルギーに等しいから

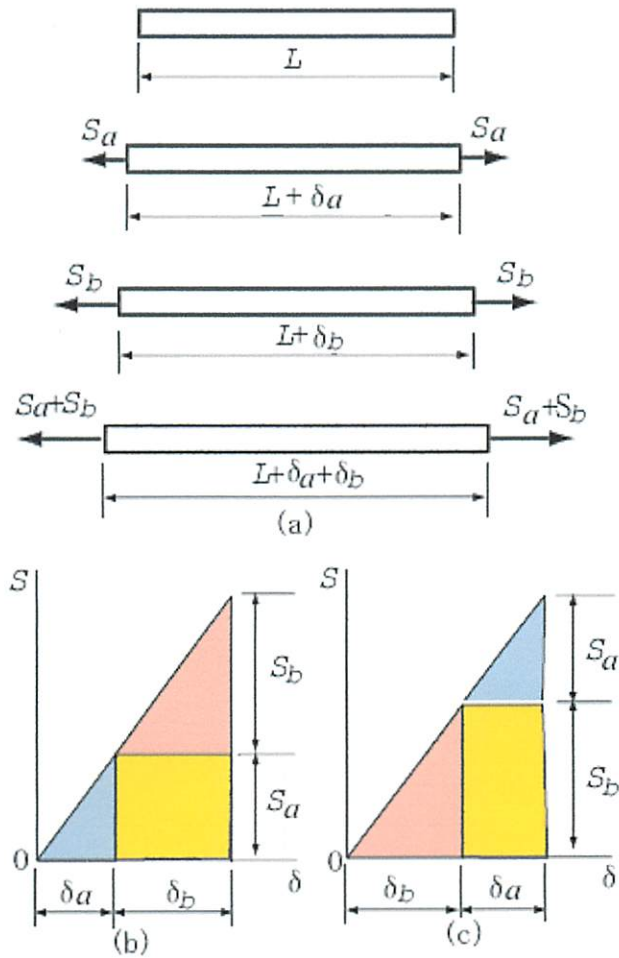


図 2.2

$$\frac{Pw_p}{2} = \frac{S\delta}{2} \quad (2.4)$$

となる。ここで、式(2.4)の左辺は、外力のする仕事、右辺は弾性体と仮定した上弦材が蓄えるひずみエネルギーである。この式(2.4)から荷重 P の着点のたわみ w_p を得ることができる。この式で w_p 以外は、与えられた荷重と、トラスの幾何学的形状、部材の寸法、材質から定まる既知量である*。着点以外の点のたわみや、多数の荷重を受けたときに生じるたわみは、以上の方法では取り扱えない。したがって、以下に一般的な方法について述べよう。

図 2.3(a)に示したような、荷重 P の着点 3 以外の節点 2 の荷重 P による鉛直下向きのたわみ w を求めるには、図 2.3(b)に示すように、たわみを求めようとする節点 2 に、求めようとするたわみの方向（鉛直下向き方向）に、単位荷重 1 だけを受けた、問題のトラス

* 前章で扱ったトラスの内力の求め方によって、上弦材の内力 s が求められ、付録 B、式 (B.5)より伸び Δl （ここでは上弦材の伸び δ ）が既知となる。したがって、式(2.4)より着点のたわみ w_p が求められる。

と同形のトラスを考える。この単位荷重 1 は単位仮想荷重と呼ばれ、問題の荷重 P となんら関係を持たないもので、たわみの解析のために仮想される荷重である。

単位仮想荷重により、図 2.3(b)に示されているように、弾性部材すなわち上弦材に引張内力 u を生じる。あらかじめ節点 2 に単位仮想荷重 1 だけが加わっている図 2.3(b)のトラスに、

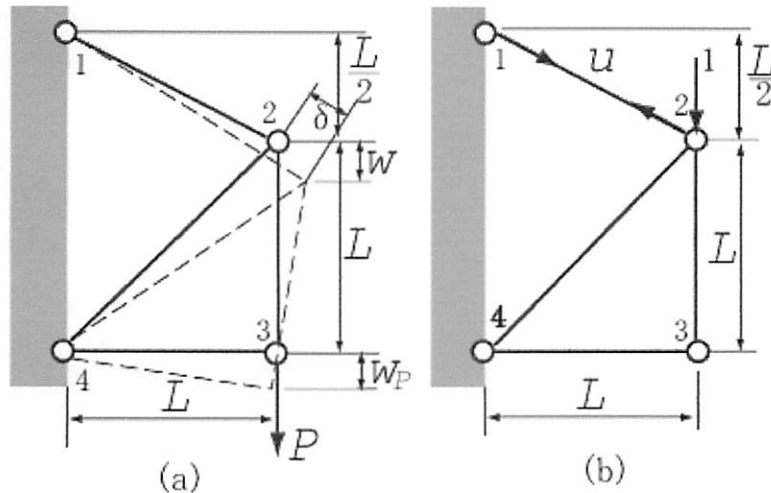


図 2.3

さらに図 2.3(a)に示す問題の本来の荷重 P が節点 3 に追加されて加わって、生じる追加たわみは、単位仮想荷重があらかじめ節点 2 に加わっていない無負荷のトラスに荷重 P が加わったとき (図 2.3(a)のトラス) に生じるたわみ w_p に等しい。このことは、トラスの任意点の変位は、トラスの各節点に加わる外力の 1 次関数で表される、と仮定されていることによる。変形が小さい範囲では、この仮定は成り立つと考えられ、これを一般化されたフックの法則という。

P および単位仮想荷重 1 による全仕事は、弾性部材内のひずみエネルギーに等しい。したがって、単位仮想荷重 1 だけが節点 2 に加わっている状態を最初の状態と考えて、その後さらに節点 3 に問題の本来の荷重 P が加わったとき、その後の外部仕事と構造内の弾性ひずみエネルギーを等しいとおけば

$$\frac{Pw_p}{2} + 1 \cdot w = \frac{S\delta}{2} + u \cdot \delta \quad (2.5)$$

となる。この式で左辺の $1 \cdot w$ は、単位仮想荷重 1 は、荷重 P によってたわみ w を生じる間じゅう、終始一定値 1 のままで加わっていることによる項である*。右辺の $u \cdot \delta$ も、 δ は単位仮想荷重が加えられた後、本来の荷重 P を加えたために、部材に生じた追加的な伸びであり、この伸びを生じる間、部材力 u は full にかかっていることにより、この形をとる。

* ここでは、まず単位仮想荷重 1 が加えられ、その後本来の荷重 P が加えられていることに注意しよう。荷重 P はたわみ w_p , w と共にたがいに比例しながら、0 から最終値 P, w_p, w まで変化している。ここでたわみ w_p, w には、最初加えた単位仮想荷重 1 によるたわみは含まれておらず、単位仮想荷重 1 の後で加えた本来の荷重 P による節点 2, 3 の追加たわみを w_p, w としていることに注意されたい。

式(2.5)から式(2.4)を差し引くと

$$1 \cdot w = u \cdot \delta \quad \therefore w = u\delta \quad (2.6)$$

として、節点 2 のたわみは求められる。

以上では簡単のため、トラスの 1 つの部材だけが弾性体で、その他の全部材は剛体と仮定した。もしトラスのすべての部材が弾性体ならば、ひずみエネルギーの項および仮想仕事の項は、あらゆる部材に対する以上と同様な項の和を含まねばならない。したがって一般に、このようなトラスのたわみは、次の式で与えられる：

$$w = \sum u \cdot \delta \quad (2.7)$$

ここで Σ はトラスのすべての部材についての合計を表す。 δ は、与えられた荷重による部材の伸びであって、弾性変形を仮定すれば、部材内力を S 、部材の長さを L 、部材の断面積を A 、部材材料の縦弾性係数（ヤング率）を E として、付録 B、式(B.5)より次式で与えられる：

$$\delta = \frac{SL}{AE} \quad (2.8)$$

式(2.8)を式(2.7)に代入すると

$$w = \sum \frac{SuL}{AE} \quad (2.9)$$

となる。次に示す例題によって、以上で述べたことを理解されたい。

例題 2.1 図 2.3(a)に示すトラスで

(a) 荷重 P の着点（節点 3）の、鉛直下向きなたわみ w_p

(b) 荷重 P の着点以外の節点 2 の鉛直下向きなたわみ w

を求めよ。ここで、全部材の断面積を A 、縦弾性係数を E とする。

(解) 与えられた荷重 P による部材 $i-j$ の内力を S_{i-j} 、たわみを求めたい節点に、求めたい

たわみ成分の方向に、単位仮想荷重 1 を加えたときの、部材 $i-j$ の内力を u_{i-j} とする。以下

では部材の内力を、節点法で求める。

(a) の場合（節点 3 に鉛直下向き荷重 P だけを受ける、図 2.3(a) の場合）：

図 2.3 のトラスの部材 $i-j$ の内力 S_{i-j} を節点法で求める。

節点 2：

水平力の釣り合いより*

$$-S_{1-2} \cos 26.6^\circ - S_{2-4} \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

鉛直力の釣り合いより

* 部材 1-2 の傾斜角 $= \tan^{-1}\{(L/2)/L\} = \tan^{-1}(1/2) = \tan^{-1}0.5 = 26.6^\circ$

$$S_{1-2} \sin 26.6^\circ - S_{2-4} \sin 45^\circ - S_{2-3} = 0 \quad (2)$$

節点 3 :

水平力の釣り合いより

$$S_{3-4} = 0 \quad (3)$$

鉛直力の釣り合いより

$$S_{2-3} - P = 0 \quad (4)$$

連立方程式(1), (2), (3), (4)を解いて

$$\left. \begin{aligned} S_{1-2} &= 0.745P, & S_{2-3} &= P \\ S_{2-4} &= -0.942P, & S_{3-4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

たわみを求めたい位置 (節点 3) に、求めたいたわみの方向 (鉛直下向き方向) に、単位
仮想荷重 1 が作用した場合の部材 $i-j$ の内力 u_{i-j} は、式(5)で $P=1$ としたもので

$$\left. \begin{aligned} u_{1-2} &= 0.745, & u_{2-3} &= 1 \\ u_{2-4} &= -0.942, & u_{3-4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

以上の結果を式(2.9)に代入して、表 2.1 のようにたわみ w_p を計算する。ここで L_{i-j} は部
材 $i-j$ の長さである。

表 2.1

部材 $i-j$	L_{i-j} / L	S_{i-j} / P	u_{i-j}	$S_{i-j} u_{i-j} L_{i-j} / PL$
1-2	1.12	0.75	0.75	0.63
2-3	1.00	1.00	1.00	1.00
2-4	1.41	-0.94	-0.94	1.25
3-4	1.00	0.00	0.00	0.00

$$\sum S_{i-j} u_{i-j} L_{i-j} = 2.88PL$$

式(2.9)より、節点 3 の鉛直下向きのたわみ (変位の鉛直下向き成分) は

$$w_p = \sum \frac{S_{i-j} u_{i-j} L_{i-j}}{AE} = \frac{2.88PL}{AE} \quad (\text{答}) \quad (7)$$

となる。

(b)の場合

L_{i-j} , S_{i-j} は(a)の場合と同じである。たわみを求めたい位置 (節点 2) に求めたいたわみ

の方向（鉛直下向き方向）に、単位仮想荷重 1 が作用した場合（図 2.3(b)）の部材 $i-j$ の内力 u_{i-j} を節点法で求める。

節点 2 :

水平力の釣り合いより

$$-u_{1-2} \cos 26.6^\circ - u_{2-4} \cos 45^\circ = 0 \quad (8)$$

鉛直力の釣り合いより

$$u_{1-2} \sin 26.6^\circ - u_{2-4} \sin 45^\circ - u_{2-3} - 1 = 0 \quad (9)$$

節点 3 :

水平力の釣り合いより

$$u_{3-4} = 0 \quad (10)$$

鉛直力の釣り合いより

$$u_{2-3} = 0 \quad (11)$$

連立方程式(8), (9), (10), (11)より

$$\left. \begin{aligned} u_{1-2} &= 0.745, & u_{2-3} &= 0 \\ u_{2-4} &= -0.942, & u_{3-4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

以上の結果を式(2.9)に代入して、表 2.2 のようにたわみ w を計算する。このような方法を単位仮想荷重の方法という。

表 2.2

部材 $i-j$	L_{i-j} / L	S_{i-j} / P	u_{i-j} / P	$S_{i-j} u_{i-j} L_{i-j} / PL$
1-2	1.12	0.75	0.75	0.62
2-3	1.00	1.00	0.00	0.00
2-4	1.41	-0.94	-0.94	1.25
3-4	1.00	0.00	0.00	0.00

$$\sum S_{i-j} u_{i-j} L_{i-j} = 1.88PL$$

式(2.9)より、節点 2 の鉛直下向きのたわみ（変位の鉛直下向き成分）は

$$w = \sum \frac{S_{i-j} u_{i-j} L_{i-j}}{AE} = \frac{1.88PL}{AE} \quad (\text{答}) \quad (13)$$

(注意) (a)の場合のたわみ w_p (式(7)) は、(b)の場合のたわみ w (式(13)) より、部材 2-3 の張力 S_{2-3} による伸び

$$\frac{S_{2-3}L}{AE} = \frac{PL}{AE}$$

だけ多くなっている。

2.2 はりの変形

(a) はりの曲げのひずみエネルギー

図 2.4 のように、はりが曲がった後、微小長さ dx だけ隔たるはりの 2 つの直断面間の角が $d\theta$ のとき*弾性限度内で

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx \quad (2.10)$$

ここで

M = 曲げモーメント

E = はり材料の縦弾性係数

I = はりの断面 2 次モーメント

である。

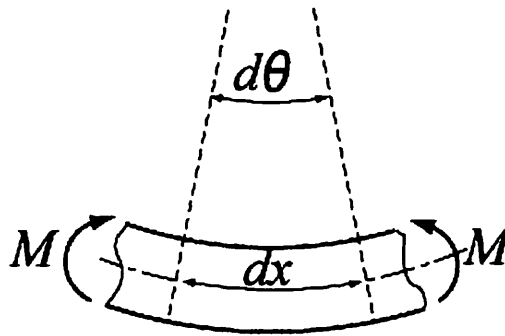


図 2.4

この式から分かるように、 $d\theta \propto M$ である ($d\theta$ と M は正比例する)。したがって、図 2.1 で δ_a の代わりに $d\theta$ 、 S_a の代わりに M とすれば分かるように、はりの dx の長さの部分 (図 2.4 の部分) に蓄えられるひずみエネルギーは $(1/2)Md\theta$ である。したがって、はり全体に蓄えられるひずみエネルギーは、式(2.10)より

$$U = \int \frac{M}{2} d\theta = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2.11)$$

となる。ここで、積分は、はりの全長にわたって行う ($x=0$ から $x=l$ までの定積分)。

次に図 2.5 のように、2 つの曲げモーメント m 、 M を同時に受けたはりを考えよう。 m だけを受けたとき、 dx だけ離れた直断面間の角は、式(2.10)と同様

$$d\theta_1 = \frac{m dx}{EI} \quad (2.12)$$

* 関谷：SIによる材料力学演習、森北(1996), p.61, 式(5.37)に、 $\theta = -dy/dx$ を代入した式である。この θ の式右辺の負号は、はりの曲げモーメント M が正 (付録 B, 図 B.5(a)) のとき、たわみ y は減少関数で、 $dy/dx < 0$ となることによる。図 B5, 式(2.10)では、 θ 、 $d\theta$ は正に取っているの、上記の負号が付く。要するにこの場合、 θ 、 $d\theta$ の正、負は曲げモーメント M の正、負と一致させている。

で与えられる。

したがって、 m 、 M を同時に受けたとき、はりの長さ dx の部分に蓄えられるひずみエネルギーは、図2.6から分かるように

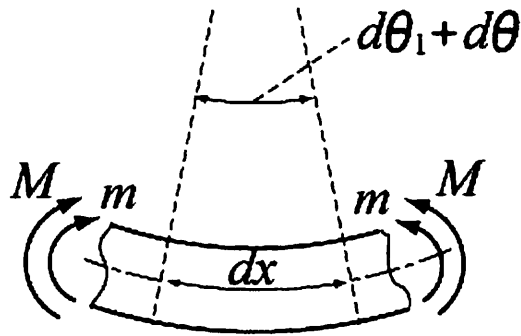


図 2.5

$$dU = \frac{1}{2} m d\theta_1 + \frac{1}{2} M d\theta + m d\theta \quad (2.13)$$

となる。したがって、 m 、 M を受けたはり全体に蓄えられるひずみエネルギーは、式(2.10)、(2.12)を代入し、上式を構造物全体にわたって積分し

$$U = \int \frac{m^2}{2EI} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{Mm}{EI} dx \quad (2.14)$$

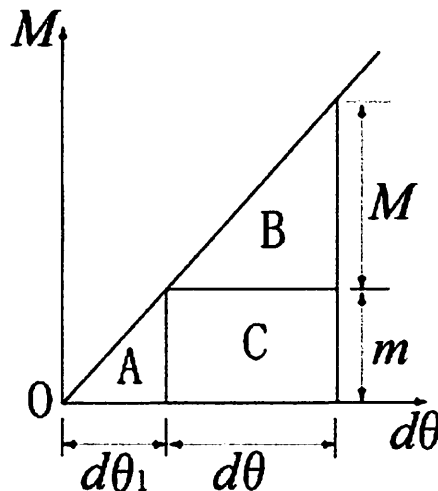


図 2.6

(b) 単位仮想荷重の方法による構造の変形の解析

図2.7(a)のはりを考える。この図のように、荷重 P の直下のたわみを δ_p とすると、弾性たわみでは、 $P \propto \delta_p$ で、荷重を0から徐々に P まで増加させるとき、荷重 P がはりにする

仕事は、 $\frac{1}{2}P\delta_p$ でこれは、はりに蓄えられるエネルギーの式(2.11)の U に等しい。すなわち

$$\frac{P\delta_p}{2} = \int \frac{M^2}{2EI} dx \quad (2.15)$$

式(2.15)を δ_p について解けば、荷重直下のたわみ δ_p が求められるが、式(2.15)では、荷重の作用する点（荷重点）以外の点のたわみは得られない。

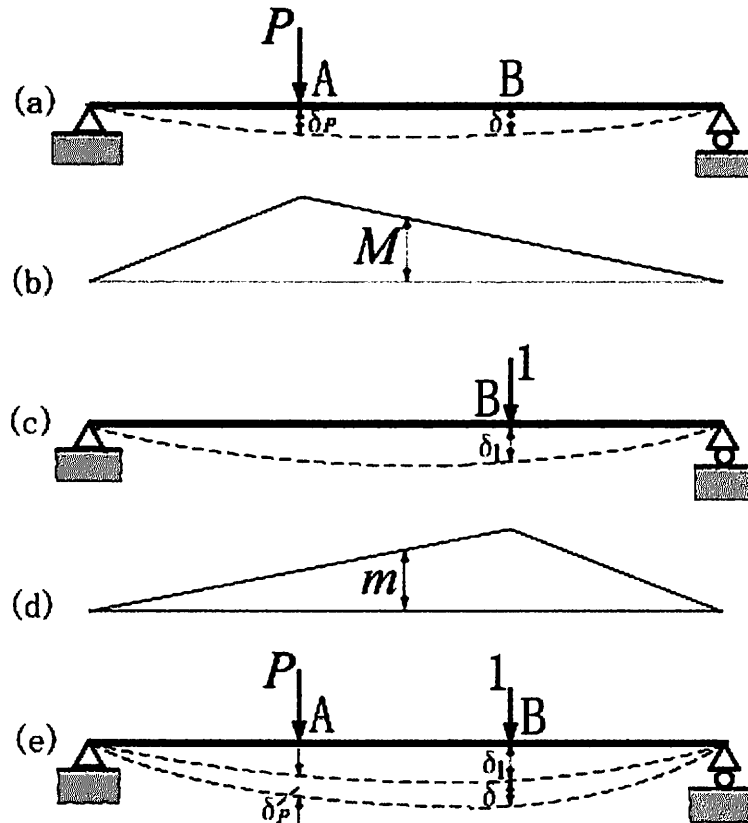


図 2.7

荷重点以外の点のたわみを求めるため、図 2.7(b)のようにまず、たわみを求めたい点 B に、求めたいたわみの方向（鉛直下向き方向）に、単位仮想荷重 1 だけを加えた場合を考え、そのためにこの仮想荷重直下に、たわみ δ_1 を生じたとしよう。そのとき式(2.15)と同様に考えると

$$\frac{1 \times \delta_1}{2} = \int \frac{m^2}{2EI} dx \quad (2.16)$$

となる。

単位仮想荷重 1 が点 B に先に加えられ（図 2.7(b)）続いて荷重 P が点 A に加えられるならば（図 2.7(c)）、 P のために起こる追加たわみは、一般化されたフックの法則（前節）から、 P が単独に加えられたときのたわみに等しい。このとき 2 つの荷重によってされる仕事は、

式(2.14)で与えられるひずみエネルギーに等しい。図 2.6 を考慮し、式(2.5)のときと同様に考えて

$$\frac{1 \times \delta_1}{2} + \frac{P \times \delta_P}{2} + 1 \times \delta = \int \frac{m^2}{2EI} dx + \int \frac{M^2}{2EI} dx + \int \frac{Mm}{EI} dx \quad (2.17)$$

この式(2.17)に式(2.15), (2.16)を代入し、求める点 B の荷重 P だけによるたわみ δ は

$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} dx \quad (2.18)$$

となる。式(2.18)に式(2.10)を代入し

$$\delta = \int m d\theta \quad (2.19)$$

となり、式(2.19)は式(2.7)と同様、求めるたわみは、たわみを求めようとすれ点に、求めようとするたわみの方向に、単位仮想荷重を加えたときに生じる内力（この場合曲げモーメント）が、与えられた荷重による変形（この場合たわみ角）に対してする仕事に等しいことを表している。この関係により、たわみを求めるこの例題の方法は、以前にも述べた単位仮想荷重の方法である。

例題 2.2 図 2.8 に示すはりで、5kN の荷重の作用点のたわみを求めよ。ここで $EI = 3 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{mm}^2$ とする。

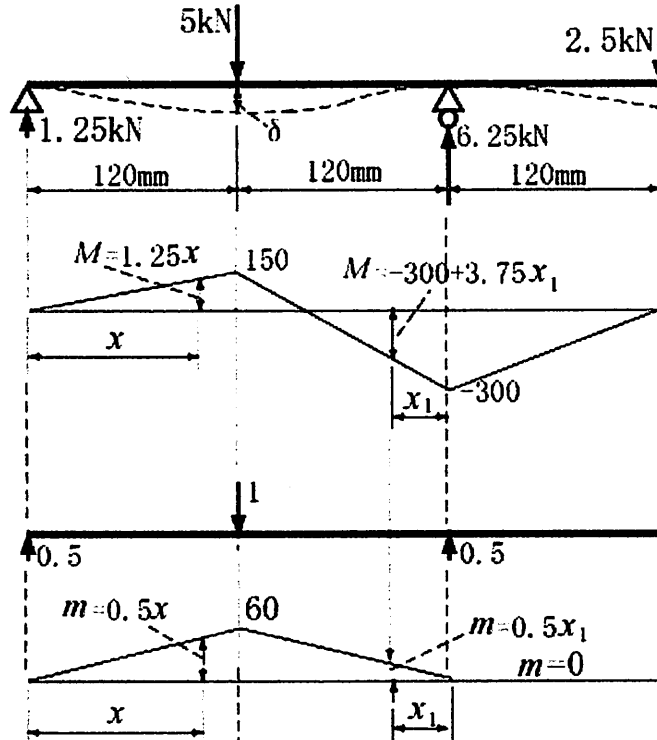


図 2.8

$$\begin{aligned}
 \text{(解)} \quad EI\delta &= \int Mm dx = \int_0^{120} 1.25x \times 0.5x dx + \int_0^{120} (-300 + 3.75x_1) \times 0.5x_1 dx_1 \\
 &= 0.625 \times \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{120} + \left[-150 \times \frac{x_1^2}{2} + 1.88 \times \frac{x_1^3}{3} \right]_0^{120} \\
 &= 3.6 \times 10^5 - 1.08 \times 10^6 + 1.08 \times 10^6 = 3.6 \times 10^5
 \end{aligned}$$

題意により $EI = 3 \times 10^5 \text{ kN} \cdot \text{mm}^2$ であるから、上式を δ について解いて

$$\delta = \frac{3.6 \times 10^5}{3 \times 10^5} = 1.2 \text{ (mm)} \quad \text{(答)}$$

を得る。

例題 2.3 図 2.9(a) に示す中央最高点に集中荷重 P を受ける半円形アーチは、同図のように、反力が鉛直になるように支えられている。 EI が一定のとき、右支点の水平変位 δ を求めよ。

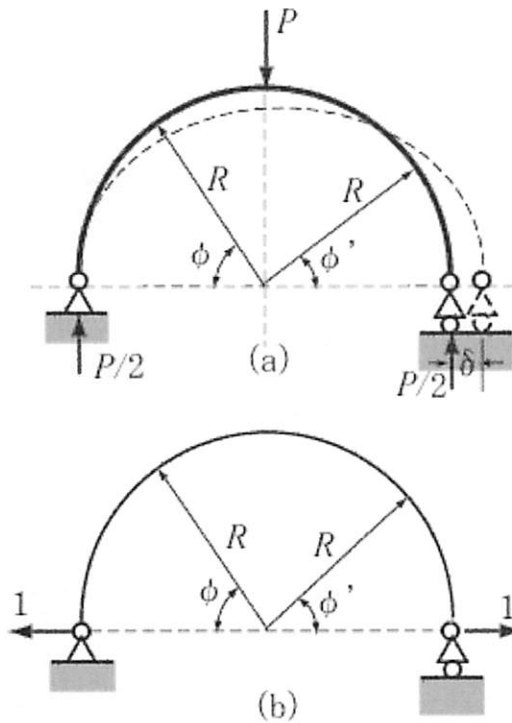


図 2.9

(解) アーチ上の任意点の位置は、図 2.9 に示す角 ϕ および ϕ' で与えられる。与えられた鉛直下向き荷重 P による、この点の曲げモーメント M はアーチの外側を圧縮する向きの曲げモーメントを正と定めると、 $0 \leq \phi \leq \pi/2$ の任意点に対し

$$M = \frac{PR}{2}(1 - \cos\phi) \tag{1}$$

となる。 $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$ の任意点に対し、その点の右側で曲げモーメントを考え

$$\phi' = \pi - \phi \quad (2)$$

とすれば ($0 \leq \phi' \leq \pi/2$)、式(1)と全く同様にして

$$M = \frac{PR}{2}(1 - \cos \phi') \quad (3)$$

変位を求めようとする点に、求めようとする変位の方に、単位仮想荷重を加えた同図(b)のとき、任意点の曲げモーメント m は、 $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \phi' \leq \pi/2$ のそれぞれに対し

$$m = R \sin \phi, \quad m = R \sin \phi' \quad (4)$$

となる。したがって、式(1), (2), (3), (4)の M , m を式(2.18)に代入し、求める水平変位は

$$\begin{aligned} \delta &= \int \frac{Mm}{EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{PR^3}{2EI} (1 - \cos \phi) \sin \phi d\phi + \int_0^{\pi/2} \frac{PR^3}{2EI} (1 - \cos \phi') \sin \phi' d\phi' \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{PR^3}{2EI} (1 - \cos \phi) \sin \phi d\phi = \frac{PR^3}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\phi d\phi \right] = \frac{PR^3}{2EI} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

2.3 半図式積分法

単位仮想荷重の方法を用いて構造物の変形解析を行うとき、時々 $\int M_1 M_2 dx$ の形の積分を計算する必要が起こる。ここで、多くの場合、 M_1 , M_2 は曲げモーメントやねじりモーメントであり、しかも M_1 , M_2 のうち、どちらかが x の1次関数であることが多い。

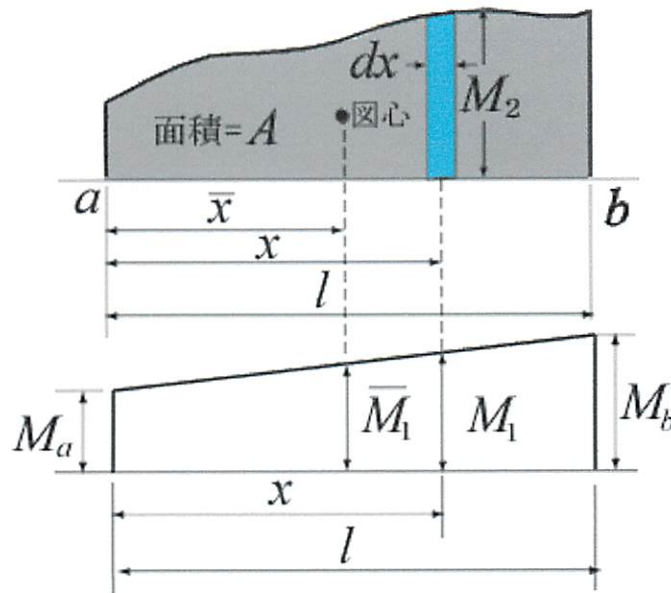


図 2.10

ここでは M_1 が x の1次関数であると、図 2.10 の上の図が M_2 , 下の図が M_1 の線図で

$$M_1 = M_a + \frac{x}{l}(M_b - M_a) \quad (2.20)$$

としよう。ここで l は、図 2.10 の点 a と点 b の距離であり、 x は同図のように、点 a と任意

点の距離である。 M_a と M_b は、これらの点 $x = a$, $x = b$ での M_1 の値である。式(2.20)より

$$\int_a^b M_1 M_2 dx = M_a \int_a^b M_2 dx + \frac{M_b - M_a}{l} \int_a^b M_2 x dx \quad (2.21)$$

となる。右辺の第1積分は、 M_2 線図（上の図で灰色に塗りつぶした領域）の面積であり、これを A と表す。第2積分は、 M_2 線図の点 a のまわりのモーメントであり、これを $A\bar{x}$ と表す。ここで、 \bar{x} は、図 2.10 の上の図に示すように、 a から M_2 線図の図心までの距離である。したがって、式(2.21)は次のように書き換えられる：

$$\int_a^b M_1 M_2 dx = A \left\{ M_a + \frac{\bar{x}}{l} (M_b - M_a) \right\} \quad (2.22)$$

ここで、中括弧{ }内は式(2.20)より、 M_2 線図の図心の位置 $x = \bar{x}$ での M_1 線図の値である。これを \bar{M}_1 で表す。したがって、式(2.22)は次式で与えられる：

$$\int_a^b M_1 M_2 dx = A \bar{M}_1 \quad (2.23)$$

以上の積分法を半図式積分法と呼ぶことにする*。

2.4 ラーメンの変形

いきなり、例題で説明する。他の問題でもこの例題にならって解くことができる。

例題 2.4 図 2.11(a)に示されたラーメンの右支点の水平変位 δ を、単位仮想荷重の方法と半図式積分法で求めよ。ここで、

$EI = 2.4 \times 10^7 \text{ kN} \cdot \text{mm}^2$ とする。

(解) 反力：

図 2.11(a)のように、左支点の水平反力を X , 鉛直反力を Y_1 , 右支点の鉛直反力を Y_2 とする。ラーメン全体を平面剛体と考え、この釣り合い条件を考えると、式(A.14), (A.15), (A.16)から、反力 X , Y_1 , Y_2 を未知数とする方程式を得ることができる。

まず、式(A.14)の第1式（水平方向の力の釣り合い式）より

$$X + 18 = 0 \quad (1)$$

式(A.14)の第2式（鉛直方向の力の釣り合い式）より

$$Y_1 + Y_2 - 36 = 0 \quad (2)$$

座標の原点（図 A.12 の原点 O）を図 2.11(a)の点 A と考え、この点のまわりの外力のモーメントを M_A とすると、原点 A のまわりのモーメントの釣り合い条件（式(A.15)）は、この M_A が 0 となることであり

$$M_A = (1.2 + 1.2)Y_2 - 18 \times 1.8 - 1.2 \times 36 = 0 \quad (3)$$

ここで、右辺第1項のモーメントは、反時計方向だから正、第2項、第3項のモーメントは時計方向だから負の値とした。

方程式(1)より

* D. J. Peery: Aircraft Structures, McGraw-Hill(1950), p.430.

$$X = -18 \text{ (kN)} \quad (4)$$

式(4)より、点 A での水平反力は負の値であるから、図 2.11 の X のような右向きでなく、実は左向きに作用する 18kN の水平反力ということになる。

式(3)より

$$\begin{aligned} 2.4Y_2 &= 32.4 + 43.2 = 75.6 \\ \therefore Y_2 &= 31.5 \text{ (kN)} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)を式(2)に代入し、 Y_1 について解くと

$$Y_1 = 36 - Y_2 = 36 - 31.5 = 4.5 \text{ (kN)} \quad (6)$$

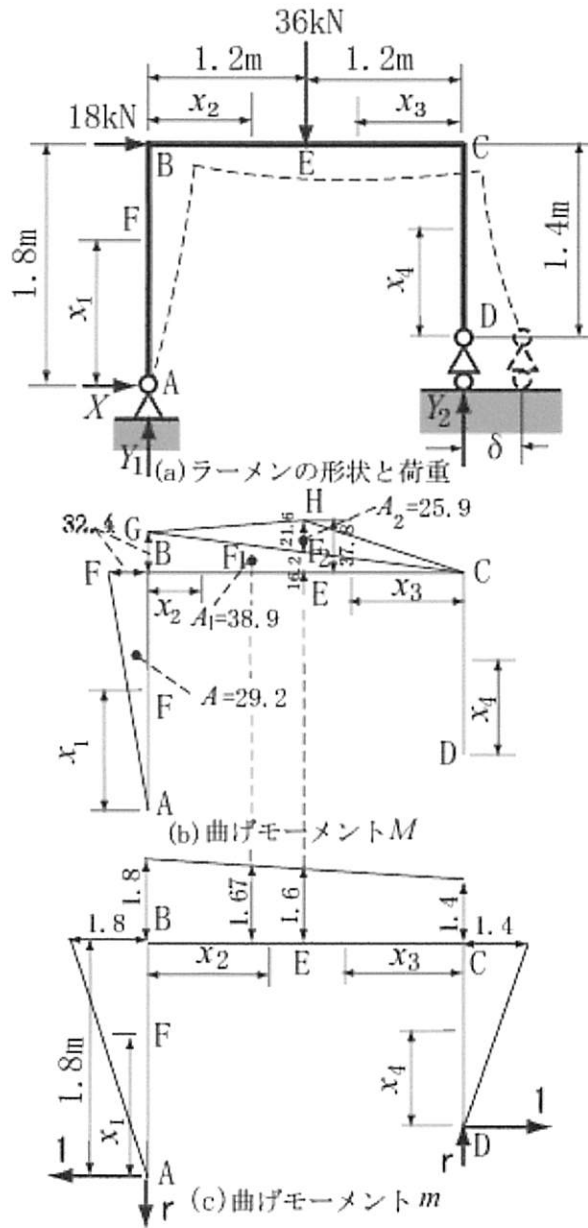


図 2.11

となり、 Y_1 、 Y_2 はいずれも正の値であるから、いずれも上向きの反力となる。

曲げモーメント：

ラーメンの曲げモーメントは、はりの曲げモーメントと同様、曲げモーメントを求めようとする点で、ラーメンを二つの部分に切断したと仮定したとき、どちらか一方の側に作用する外力の、切断点まわりのモーメントとして求められ、どちら側で計算しても、同一の値となる。ここでは、ラーメンの外側の表面が圧縮、内側の表面が引張を受ける向きの曲げモーメントを正、その逆の場合を負として統一して置く*。以後、曲げモーメント図は、ラーメンの形状の外側に向かって正の曲げモーメントを描く。

与えられた荷重によるラーメンの曲げモーメント：

(i)AB 間

点 A から AB 間任意点 F までの距離を、図 2.11(a)のように x_1 とすると、この点での曲げモーメントは、式(4)を代入して（上記曲げモーメントの正負のルールに注意）

$$M = -Xx_1 = 18x_1 \quad (7)$$

となる。点 A での曲げモーメント M_A は、式(7)で $x_1 = 0$ として

$$M_A = 0 \quad (8)$$

点 B での曲げモーメント M_B は、 $x_1 = 1.8$ として

$$M_B = 18 \times 1.8 = 32.4 \text{ (kN} \cdot \text{m)} \quad (9)$$

となるが、AB 間の途中では、式(7)は x_1 の 1 次式であることから、曲げモーメント図は図 2.11.(b)のように線分 AF となる。

(ii)BE 間

点 B では、前項式(9)で求めた曲げモーメント M_B が作用し、BE 間では、この偶力と支点 A の鉛直反力 Y_1 によって、曲げモーメントは次式で与えられる：

$$M = M_B + Y_1x_2 = 32.4 + 4.5x_2 \quad (10)$$

点 B では $x_2 = 0$ であるから、前項と同じ値

$$M_B = 32.4 \text{ (kN} \cdot \text{mm)} \quad (11)$$

が得られ、点 E では $x_2 = 1.2$ であるから

$$M_E = 32.4 + 4.5 \times 1.2 = 37.8 \text{ (kN} \cdot \text{m)} \quad (12)$$

となり、BE 間は、式(10)が x_2 の 1 次式だから、式(11)、(12)の値の点を結ぶ線分 GH となる。

(iii)EC 間

EC 間任意点の C からの距離を x_3 とすれば、この点の曲げモーメントは、この点より右側に加わる外力のこの点のまわりのモーメントで考えて

$$M = Y_2x_3 = 31.5x_3 \quad (13)$$

点 E では、 $x_3 = 1.2$ であるから

$$M_E = 31.5 \times 1.2 = 37.8 \text{ (kN)} \quad (14)$$

* この章で述べる、単位仮想荷重の方法を用いる場合、ここで述べるのと全く反対向きの曲げモーメントを正と定めてもよい。いずれにしても、問題を解く間じゅう、曲げモーメントの正方向のルールを変えずに、押し通す必要がある。

となり、これは式(12)と一致している。また、点 C では $x_3 = 0$ であるから

$$M_C = 0 \quad (15)$$

以上より、BC 間 (BE 間+EC 間) の曲げモーメント図は図 2.11(b)の BGHC となるが、これを

$$\text{四辺形 BGHC} = \triangle BGC + \triangle GHC \quad (16)$$

と分解する。 $\triangle BGC$ は与えられたラーメンに、点 B で水平右向き之力 18kN だけが、作用するときの曲げモーメント図 (このときの曲げモーメントを M_1 とする)、 $\triangle GHC$ は与えられたラーメンに、点 E で鉛直下向き之力 36kN だけが、作用するときの曲げモーメント図 (このときの曲げモーメントを M_2 とする) である。したがって、BC 間の曲げモーメント M は (ここで述べる M_1 , M_2 は、図 2.10 で述べた M_1 , M_2 とは無関係である)

$$M = M_1 + M_2 \quad (17)$$

(iv)CD 間

点 C から点 D までの外力は、点 D に作用する反力 Y_2 だけであるから、CD 間の曲げモーメントは

$$M = 0 \quad (18)$$

となる。

以上より、図 2.11(b)の曲げモーメント図を得る。

単位仮想荷重によるラーメンの曲げモーメント m :

次に、問題のラーメンの変位を求めようとする右支点 D に、求めようとする変位の方向 (水平右向き方向) に単位荷重を加えたときの曲げモーメント m を求める (図 2.11(c))。

(i)AB 間

任意点から点 A 側の部分に加わる力のモーメントを考えると

$$m = 1 \times x_1 = x_1 \quad (19)$$

点 A で $x_1 = 0$ であるから

$$m_A = 0 \quad (20)$$

点 B では $x_1 = 1.8$ であるから

$$m_B = 1.8 \quad (21)$$

となる。したがって、図 2.11(c)に示すような、AB 間の曲げモーメント図を得る。

(ii)CD 間

任意点から点 D 側の部分に加わるモーメントを考え

$$m = 1 \times x_4 = x_4 \quad (22)$$

点 C では $x_4 = 1.4$ であるから

$$m_C = 1.4 \quad (23)$$

点 D では $x_4 = 0$ であるから

$$m_D = 0 \quad (24)$$

となる。したがって、図 2.11(c)に示すような CD 間の曲げモーメント図を得る。

(iii)BC 間

この区間には外力は作用していないから、この区間の曲げモーメント図は、点 B の曲げモーメント m_B 、点 C の曲げモーメント m_C の間を直線的に変化し、図 2.11(c) のような BC 間の直線の曲げモーメント図となる。この直線の線図で、図 2.11(b) の $\triangle BGC$ の図心 F_1 直下の値は、同図(c) のように 1.67、同図(b) の $\triangle CGH$ の図心 F_2 直下の値は、同図(c) のように 1.6 となる。

変形の計算：

与えられたラーメンの点 D の水平右向き変位を求めるには、与えられたラーメンの曲げモーメント M と、変位を求めたい点 D に求めたい変位方向（水平右向き方向）に、単位仮想荷重 1 を受けたときの曲げモーメント m から、式(2.18)の両辺を EI 倍した次式で求められる：

$$EI\delta = \int Mm dx = \int_{ABCD} Mm dx = \int_{AB} Mm dx + \int_{BC} (M_1 + M_2)m dx + \int_{CD} Mm dx$$

この式の右辺は前述の半図式積分法より

$$EI\delta = 29.2 \times 1.2 + 38.9 \times 1.67 + 25.9 \times 1.6 = 141 \text{ kN} \cdot \text{m}^3 = 1.41 \times 10^2 \text{ (kN} \cdot \text{m}^3)$$
$$\approx 1.4 \times 10^8 \text{ (kN} \cdot \text{mm}^3)$$

$$\therefore \delta = \frac{1.4 \times 10^8}{2.4 \times 10^7} = 0.58 \times 10 = 5.8 \text{ (mm)}$$

2.5 ねじりと曲げを受ける構造

図 2.12(a) に示したねじりモーメント T を受ける片持円形断面軸を考えよう。この自由端に取り付けた剛体の腕（黒く塗った部分）上の点 A のたわみを考えよう。図 2.12(a), (b) のように、与えられたねじりモーメント T は、軸の微小長さ dx に $d\phi$ の相対ねじり角を生じ、それは式(B.19)で、 l の代わりに dx 、 ϕ の代わりに $d\phi$ （したがって、 θ の代わりに $d\phi/dx$ ）としてから、 $d\phi$ について解いた次式で与えられる：

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx \quad (2.24)$$

ここで、円形断面軸に対し

$$J = \text{断面 2 次極モーメント} = \frac{\pi d^4}{32}, \quad G = \text{横弾性係数} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad d = \text{円形断面軸の直径},$$

$$E = \text{縦弾性係数 (ヤング率)}, \quad \nu = \text{ポアソン比}$$

である。

図 2.12(a) の点 A の鉛直下向きなたわみ δ を求めるには、点 A でこの方向に単位仮想荷重を作用させ、これによるねじりモーメントを m_t とする。そのとき、はりの曲げの場合の式(2.19)と全く同様にして、たわみ δ は次式で与えられる：

$$\delta = \int m_t d\phi \quad (2.25)$$

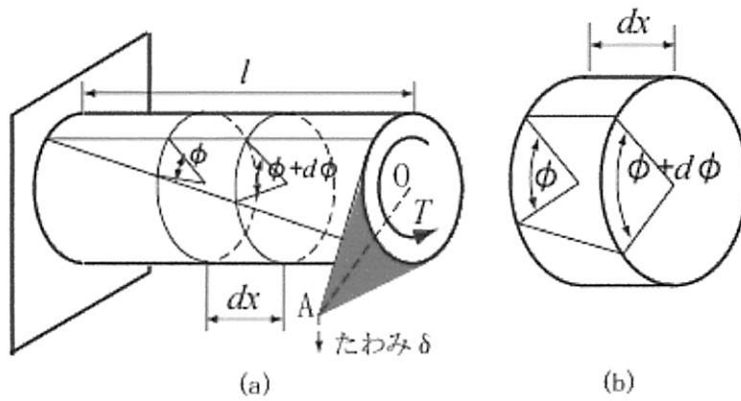


図 2.12

式(2.24)を式(2.25)に代入し

$$\delta = \int \frac{Tm_t}{GJ} dx \quad (2.26)$$

例題 2.5 図 2.13 に示された構造は、 $I = 6 \times 10^5 \text{ mm}^4$ 、 $E = 75 \text{ kN/mm}^2$ 、 $G = 30 \text{ kN/mm}^2$ の円管で作られている。各部材はまっすぐで、座標軸のどれかと平行である。同図の点 A の鉛直下向き変位（たわみ）を求めよ。

（解）図 2.14(a)の曲げモーメント図は、座標面に平行な面内の曲げモーメントで示す。曲げモーメントは、部材の圧縮側にグラフで描かれている。ねじりモーメント図は図 2.14(b)で、曲がった矢印で示された方向のねじりに対し、グラフで描かれている。

m および m_t の値、すなわち図 2.13 の点 A に加えられた単位鉛直下向き荷重から生じる曲げおよびねじりモーメントは、図 2.14(c), (d) にグラフで描かれている。 M および m が反対方向である場合には、それらの積は負である。式(2.18), (2.26)に対する積分の値は、半図積分法によって計算される。

図 2.13 に示す部材 CO のねじり変形が、点 A のたわみに貢献し、他の部材のねじり変形は、点 A のたわみに貢献しない。なぜなら、部材 CO 以外の部材に対しては、図 2.14(d)に示すように、 $m_t = 0$ であるからである。 m_t はたわみを求めようとする点に、求めようとするたわみの方向に、単位荷重を加えたとき、それによって生じるねじりモーメントであり、図 2.13 の CO=230mm の長さ、図 2.14(b)の 1350kN・mm、図 2.14(d)中の 150mm より

$$\int_{CO} Tm_t ds = Tm_t \int_{CO} ds = 1350 \times 150 \times 230 \approx 4.66 \times 10^7 \quad (1)$$

曲げモーメントの項は、あらゆる部材に対して現れる。部材 AB に対しては、鉛直面での曲げモーメントだけが、鉛直たわみに貢献する。なぜなら、図 2.14(c)で部材 AB に対し、鉛直面(yz 面)の曲げモーメントしか存在しないからである。したがって

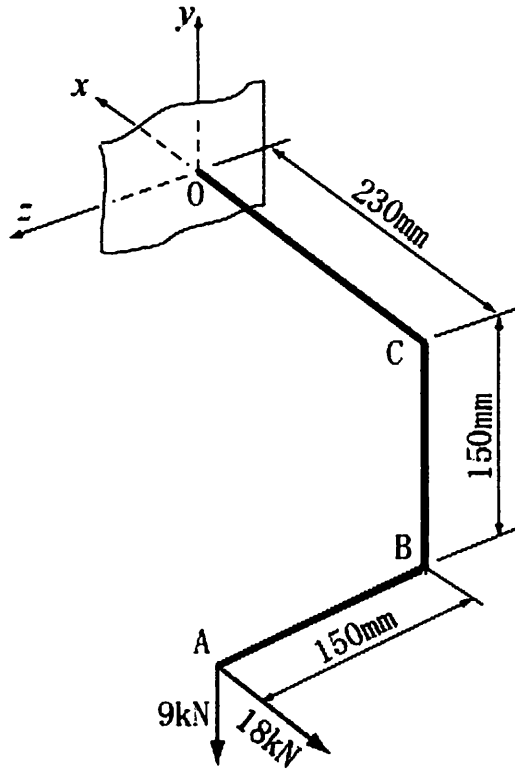


図 2.13

$$\int_{AB} M m ds = \frac{1350 \times 150}{2} \times 100 \approx 1.01 \times 10^7 \quad (2)$$

↑ ↑

図 2.14(a)で部材 左記三角形
 AB の下に描いた の図心位置
 三角形の面積 での図 2.14(c)
 のグラフの値

部材 BC に対し、図 2.14(c)での yz 面内の曲げモーメントだけが考えられる。なぜなら、 m は、yz 面に対するものであり、図 2.14(a)での xy 面の曲げモーメントは、点 A の鉛直方向のたわみには影響しないからである。したがって

$$\int_{BC} M m ds = 1350 \times 150 \times 150 \approx 3.04 \times 10^7 \quad (3)$$

↑ ↑

図 2.14(a)での M 線図図心
 M 線図の面積 での m

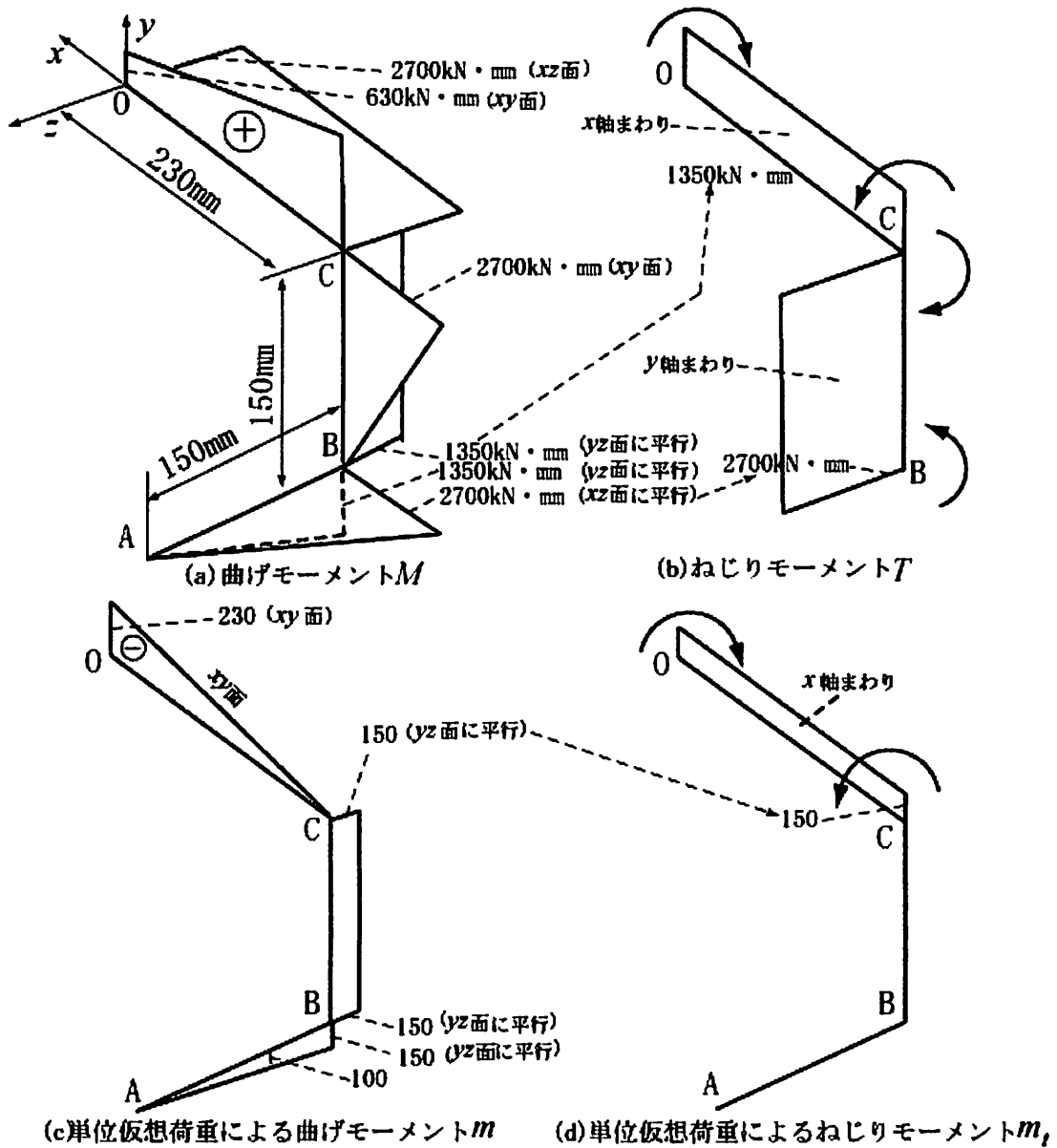


図 2.14

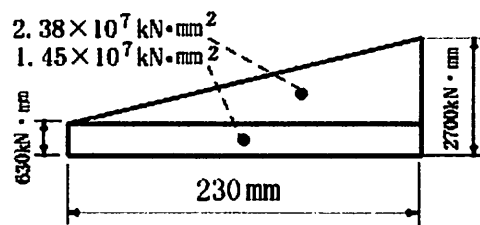


図 2.15

部材 CO に対し、鉛直面の曲げモーメントだけが考えられる。 M 線図は図 2.15 に示すように、面積が $630 \times 230 = 1.45 \times 10^5$ の長方形の部分と、面積が

$(2700 - 630) \times 230 / 2 = 2.38 \times 10^5$ の三角形の部分からできている。積分値は負になる。なぜなら、 M と m は反対符号を持つからである。この部材に対しては

$$\int_{e_0} M m ds = \overset{\text{上記長方形の面積}}{\downarrow} (1.45 \times 10^5) \times 115 - \overset{\text{上記三角形の面積}}{\downarrow} (2.38 \times 10^5) \times \frac{230}{3} = -3.49 \times 10^7 \quad (4)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{長方形図心での } m & & \text{上記三角形図心での } m \end{array}$$

全たわみは、あらゆる部材に対する項の和として求められる。すなわち

$$\delta = \int \frac{Mm}{EI} ds + \int \frac{Tm_t}{GJ} ds$$

$$= \frac{1.01 \times 10^7 + 3.04 \times 10^7 - 3.49 \times 10^7}{EI} + \frac{4.66 \times 10^7}{GJ} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{式(2), (3), (4)より} & & \text{式(1)より} \end{array}$$

ここで

$$EI = 75 \times 6 \times 10^5 = 4.5 \times 10^7 \text{ kN} \cdot \text{mm}^2$$

$$GJ = 2IG = 2 \times 6 \times 10^5 \times 30 = 3.6 \times 10^7 \text{ kN} \cdot \text{mm}^2$$

であるから、式(5)は次記となる：

$$\delta = \frac{0.56 \times 10^7}{4.5 \times 10^7} + \frac{4.66 \times 10^7}{3.6 \times 10^7} = 0.12 + 1.29 = 1.41 \text{ mm}$$

2章の演習問題

[A]

(2.1a) 前章演習問題中の図 1.15(a), (b), (c) のトラスの荷重点 (荷重が作用する点) でのたわみ (鉛直下向きの変位) を求めよ。ここで、すべての部材の断面積を A 、縦弾性係数を E とする。

(2.2a) 図 2.16 のように、任意点に集中荷重 P を受ける両端支持はりで、集中荷重 P の着力点 (左支点 O から距離 a 、右支点から距離 b の位置) でのはりのたわみを、半図式積分法で求めよ。ここで、はりの曲げ剛性を EI とする。

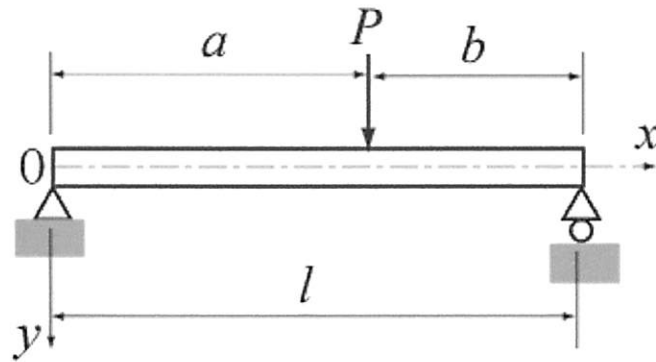


図 2.16

(2.3a) 図 2.17 に示すように、上部水平材に等分布荷重（単位長さ当り q ）を受ける門形ラーメンの右支点の水平変位を半図式解法で求めよ。ここで、すべての部材の曲げ剛性を EI とする。

(2.4a) 図 2.18 に示した構造は、水平面内で 90° の中心角を持つ円弧状の曲りはりで、断面は円形である。その一端 C は固定され、他端 B に鉛直下向き荷重 P を受ける。またこの曲りはりの断面 2 次モーメント、縦弾性係数、中心線の半径、ポアソン比をそれぞれ I , E , R , $\nu = \frac{1}{3}$ とする。点 B の下向きたわみ, を求めよ。

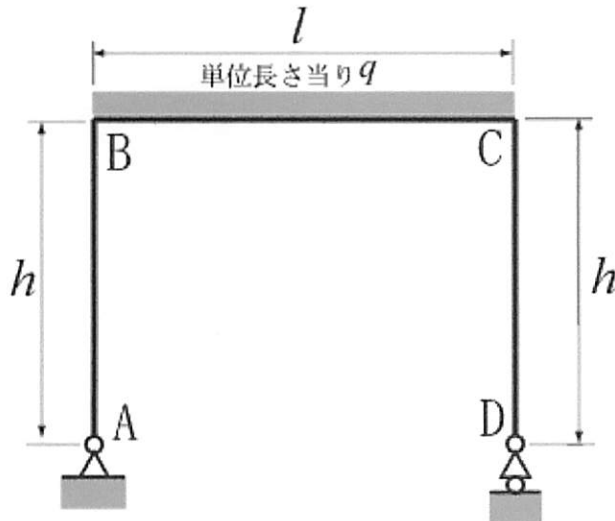


図 2.17

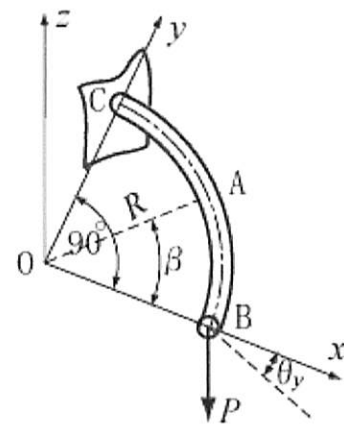


図 2.18

[B]

(2.1b) 前章演習問題中の図 1.18(a), (b), (c), (d) のトラスの荷重点でのたわみを求めよ。こ

ここでトラスの材料の縦弾性係数を $E = 206 \text{ kN/mm}^2 (= 206 \text{ GPa:ギガパスカル})$ 、各トラスの部材の断面積 $A \text{ (mm}^2)$ 、は各間毎に一定で、次の表 2.3 のようであるとする

表 2.3

問題	(a)	(b)	(c)	(d)
断面積 A (mm^2)	320	240	12	650

(2.2b) 図 2.19 のように、両端で集中偶力 M_0 、 M_l を受ける両端単純支持はりで、左端から a の位置での下向き変位 (たわみ) を半図式積分法で求めよ。このはりの曲げ剛性を EI とする。

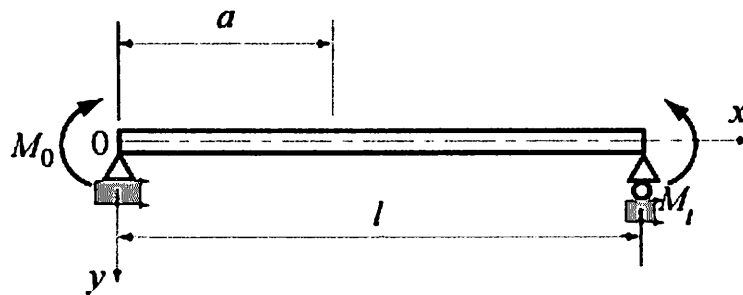


図 2.19

(2.3b) 図 2.20 のように、上部水平材の中心に、大きさ P の集中荷重を受ける門形ラーメンの右支点の右向き水平変位を求めよ。ここで、部材の曲げ剛性を EI とする。

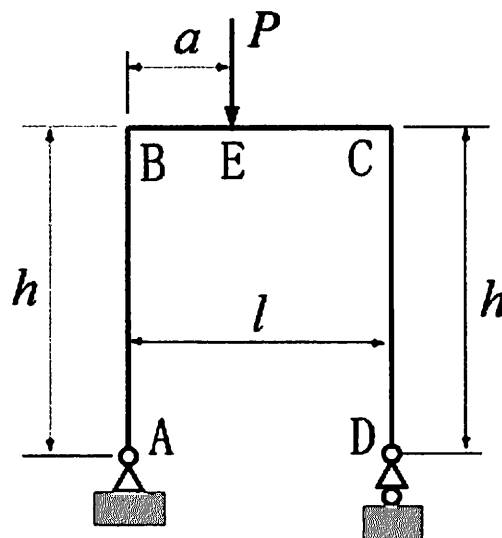


図 2.20

(2.4b) 図 2.21 のように、直角に折れ曲がった、直径 d の円形断面を持つ片持はりの先端に鉛直下向き方向に荷重 P が作用するとき、先端 (荷重 P の作用点) のたわみを求めよ。

材料の縦弾性係数を E ，ポアソン比を $\nu = \frac{1}{3}$ とする。

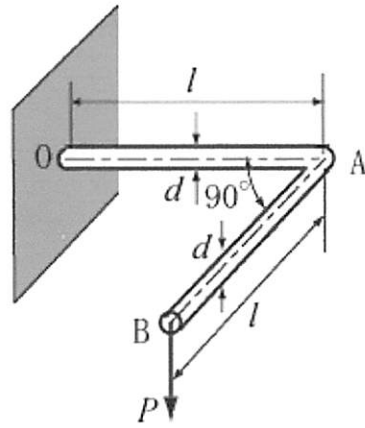


図 2.21

3章 不静定構造

3.1 不静定トラス

トラスの支点反力、部材内力を力の釣り合い条件式(A.14), (A.15), (A.16)または式(A.18), (A.19)を用いて求めようとしても、条件式の個数が不足して、部材内力が求められない場合、このトラスを不静定トラスといい、条件式が r 個不足している場合、 r 次不静定トラスという、支点反力が力、力のモーメントの釣り合い条件だけで求められない場合を、外的不静定トラス、もし反力が求められたとしたとき、部材内力が力、力のモーメントの釣り合い条件だけで求められない場合、このトラスを内的不静定トラスという。以下ではいくつかの例題によって不静定平面トラスの解法を説明しよう。不静定立体トラスの場合も考え方は全く同様である。

例題 3.1 図 3.1 のトラスで、部材は、外力 P が加えられる前には、内力を受けていないとする。このトラスの反力と部材内力を求めよ。

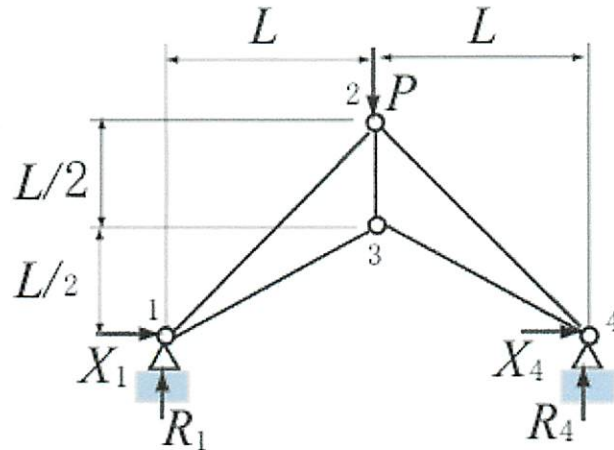


図 3.1

(解) 支点 1, 4 は両方とも回転支点である。図 3.1 のように水平反力成分は X_1, X_4 , 鉛直反力成分は R_1, R_4 で、合計 4 つの反力が未知数であるが、力、力のモーメントの釣り合い条件は、式(A.14), (A.15)の 3 つで、これらを図 3.1 のトラスに適用すると

$$\left. \begin{aligned} X_1 + X_4 &= 0 \\ R_1 + R_4 - P &= 0 \\ 2LR_4 - PL &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

となる。この第 1 式は水平力の釣り合い条件、第 2 式は鉛直力の釣り合い条件、第 3 式は節点 1 のまわりのモーメントの釣り合い条件である。この第 1 式を変形し

$$X_1 = -X_4 \equiv X_a \quad (3.2)$$

と置く (記号 “ \equiv ” は “置く” という意味である)。式(3.1)の第 2, 第 3 式を R_1, R_4 につい

て解けば

$$R_1 = R_4 = \frac{P}{2} \quad (3.3)$$

となるから、図 3.1 は図 3.2(a)となる。式(3.3)はトラスおよび荷重の対称性から明白であろう。式(3.1)は4つの未知数 X_1 , X_4 , R_1 , R_4 に対する3つの式であるので、これらの未知数(未知反力)を決定するには、条件式の数が1つ足りない。このようなトラスを1次不静定トラスという*この場合、水平反力成分 X_a を過剰反力と考えることができる**。同図(a)の不静定トラスの部材内力を S で表す。これを求める方法を以下で述べる。

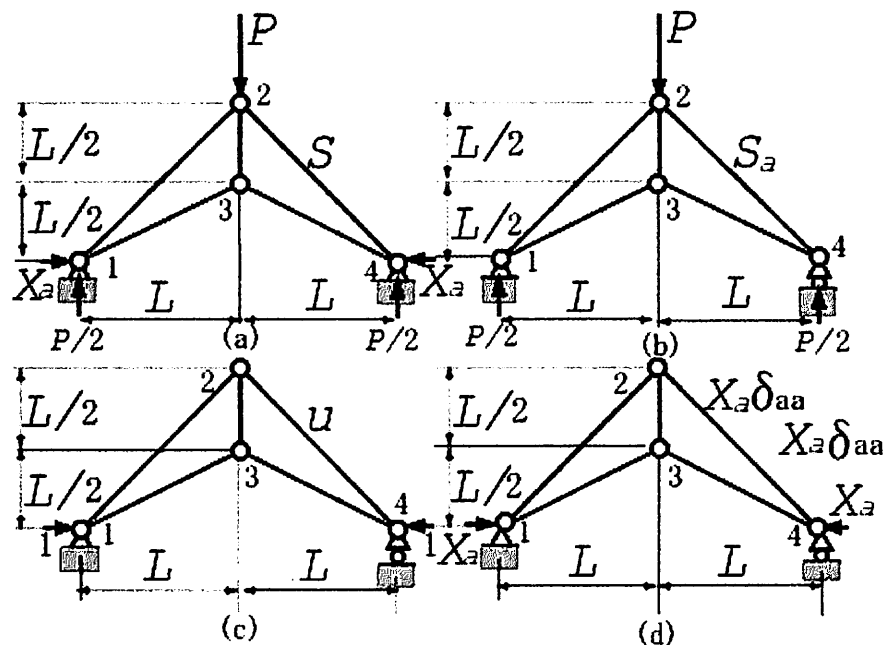


図 3.2

まず、過剰反力 X_a の加わる支点 4 を、図 3.2(b)のように移動支点に変更して静定化したトラスを考える。したがって、支点 4 では水平反力成分 X_a は無くなり、鉛直反力成分 $P/2$ だけとなる。同図(b)のように、そのトラスが問題のトラス(同図(a))と同じ外力 P を受けたとき、その部材内力を 1.4 節の方法で求め S_0 とする。次に同図(b)で、荷重 P を取り去り、支点 4 に同図(a)の X_a と同じ方向に単位力(大きさ1の力)を加えた同図(c)のような静定トラスの部材内力を、1.4 節の方法で求め、これを u とする。次に、同図(d)のように、同図(b)と同じ静定トラスに、過剰反力 X_a と同じ外力が作用したときを考えると、そのときの部材内力は、同図(c)のトラスの部材内力の X_a 倍、すなわち $X_a u$ である。なぜなら、同図(d)

*条件が1つ足りない場合を1次不静定トラス、 n 個足りない場合、 n 次不静定トラスという。

** 連立1次代数方程式(3.1)の未知数は X_1 , X_4 , R_1 , R_4 の4個で、式数は3個である。したがって、4個の未知数のうち3個、例えば X_4 , R_1 , R_4 を残りの1つ $X_1 (= X_a)$ を用いて表すことができる。この残りの1つの反力を過剰反力という。

の荷重は、同図(c)の荷重の X_a 倍で、方向と作用点は、両者とも同じだからである。

次にこれらのトラスの支点での、過剰反力方向の変位を考えよう。同図(b)のトラスの右支点の左向き水平変位を δ_{a0} は式(2.9)より

$$\delta_{a0} = \sum \frac{S_0 ul}{AE} \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで

l = 部材の長さ

A = 部材の断面積

E = 部材材料の縦弾性係数

である。また \sum は、トラスのすべての部材について計算した $S_0 ul / AE$ を総計することを意味する。

まったく同様、図 3.2(c)のトラスの右支点の左向き水平変位を δ_{aa} とすれば式(2.9)より

$$\delta_{aa} = \sum \frac{u^2 l}{AE} \quad (3.5)$$

となる。同図(d)のトラスは、同図(c)のトラスの X_a 倍の荷重を受けているので、水平左向きの変位は、式(3.5)の X_a 倍すなわち

$$X_a \delta_{aa} = X_a \sum \frac{u^2 l}{AE} \quad (3.6)$$

となる。

次に図 3.2(b), (d)の2つの場合の荷重 P , X_a を同時に受けた静定トラス (図 3.2(b)のように、右支点を移動支点にしたトラス) を考えると、この支点の左向き水平変位は、式(3.4)と式(3.6)の和すなわち

$$\delta_{a0} + X_a \delta_{aa} = \sum \frac{S_0 ul}{AE} + X_a \sum \frac{u^2 l}{AE} \quad (3.7)$$

で与えられる。

ここで、式(3.7)で与えられる変位が0となるように X_a を決めることにすると、その X_a は、式(3.7)を0に等しいとおいて、 X_a について解いたもので

$$X_a = -\frac{\delta_{a0}}{\delta_{aa}} = -\frac{\sum \frac{S_0 ul}{AE}}{\sum \frac{u^2 l}{AE}} \quad (3.8)$$

で与えられる。この状態では、右支点の水平変位がないから、これまでこの支点を移動支点と考えていたが、事実上回転支点と同じである。この支点に加わる外力 X_a は、この支点の水平変位をとめるための反力で、回転支点の反力の水平成分と見なすことができる。したがって、図 3.2(b), (d)の外力を同時に受け、右支点の反力が式(3.8)で与えられるトラスは、

図 3.2(a)の不静定トラスにほかならない。しかもこの不静定トラスの部材内力 S は、図 3.2(b), (d)の内力の和で

$$S = S_0 + X_a u \quad (3.2)$$

となる。以上は、ただ1つの例について説明したが、他の不静定トラスについても、同様の考え方ができる。

例題 3.2 図 3.1 のトラスで、 $P = 180 \text{ kN}$ 、 $L = 1 \text{ m}$ のとき、各部材の内力と支点反力を求めよ。ここで、材料の縦弾性係数を 69 GPa 、部材 1-2, 2-3, 2-4 の断面積を $2.5 \times 10^3 \text{ mm}^2$ 、部材 1-3, 3-4 の断面積を $2.3 \times 10^3 \text{ mm}^2$ とする。

(解) 図 3.2 で説明した方法で計算すればよい。計算は、表 3.1 に示すようである。図 3.2 についてこれまで述べたのと同様、 X_a を過剰反力とする。図 3.2(b)のように、与えられた外力を受ける静定化したトラスの部材内力は、1章の方法で得られ、表 3.1 の列(1)に示されている。各部材の長さ l は図 3.1 から計算でき、この計算結果を同表の列(2)に示す。これより各部材の断面積 A と、材料の縦弾性係数 E を用いて l/AE を計算し、同表の列(3)に示す。また、図 3.2(c)のような、過剰反力方向の単位荷重を受けた、静定化したトラスの部材力を、1章の方法で求め、これを同表の列(4)に示す。以上の数値より $S_0 u / AE$ 、 $u^2 l / AE$ を各部材に対して求め、同表の列(5), (6)に示す。これらの2つの列の数値を総計

表 3.1

部材	(1) S_0 (kN)	(2) l (mm)	(3) l/AE (mm/kN)	(4) u	(5) $S_0 u / AE$ (mm)	(6) $u^2 l / AE$ (mm/kN)	(7) $X_a u$ (kN)	(8) S (kN)
1-2	-255	1414	0.00820	1.41	-2.95	0.0163	164	-91
1-3	201	1118	0.00704	-2.24	-3.17	0.0353	-260	-59
2-3	180	500	0.00290	-2.00	-1.04	0.0116	-232	-52
2-4	-255	1414	0.00820	1.41	-2.95	0.0163	164	-91
3-4	201	1118	0.00704	-2.24	-3.17	0.0353	-260	-59
Σ	-13.3	0.115

して $\sum(S_0 u / AE)$ と $\sum(u^2 l / AE)$ が得られ、これを式(3.8)に代入し、過剰反力 X_a は

$$X_a = -\frac{(-13.3)}{0.115} = 116 \text{ (kN)}$$

となる。したがって、この X_a と表 3.1 の列(1)の S_0 、列(4)の u を式(3.9)に代入して、同表の列(8)に、図 3.1 のトラスで $P = 180 \text{ kN}$ のときの部材内力が得られる。

支点の反力については、左右の支点 1, 4 共に鉛直反力成分は、式(3.3)あるいはトラスの形状と荷重の左右対称性から、与えられた荷重 180 kN の半分の 90 kN の鉛直上向き反力成

分となる。左右の支点の水平反力成分は、支点 1 に上記 $X_a = 116$ (kN) が右向きに作用し、これと釣り合う力として、支点 4 に反力 $X_a = 116$ (kN) が左向きに作用する (図 3.2(d))。

例題 3.3 図 3.3(a) に示すトラスの部材内力を求めよ。このトラスは前問のトラス (図 3.1 または図 3.2(a)) に部材 1-3 を追加したものである。この部材 1-3 の断面積を $2 \times 10^3 \text{ mm}^2$ とする。なお前例題では、右側支点を回転支点にしているが、この例題ではこれを、移動支点にしている。その他はすべて前例題と同じとする。

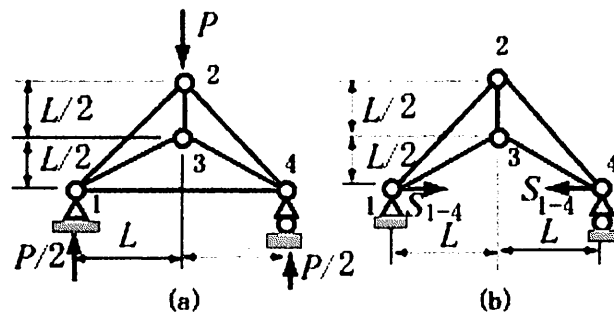


図 3.3

(解) 部材 1-3 は、過剰部材と考えられ、その内力は引張力 S_{1-3} であるとする (圧縮力の場合は、負の値となる)。もし部材 1-3 を取り去ったトラスで、問題で与えられた荷重 $P = 180$ kN だけが作用する場合と、節点 1, 3 に、部材 1-3 を取り去る前に作用していた内力 S_{1-3} だけが作用する場合 (図 3.3(b)) を合成すると、図 3.3(a) のトラスと同等となり、節点 3 の変位 δ は

$$\delta = \left[\begin{array}{l} \text{与えられた荷重 } P \text{ による、} \\ \text{部材 1-3 を除いた構造の} \\ \text{節点 3 の変位} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{図 3.3(b) に示す力 } S_{1-3} \\ \text{による、部材 1-3 を除い} \\ \text{たトラスの節点 3 の変位} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{与えられたトラス} \\ \text{の部材 1-3 の引張力} \\ S_{1-3} \text{ による伸び} \end{array} \right]$$

となる。この式は前例題 1.9 と同じ記号を用いて、次の式で表される ($u_{1-3} = 1$ で、これは前例題の単位仮想荷重に相当する) :

$$\delta = \sum \frac{S_0 u l}{AE} + S_{1-3} \sum \frac{u^2 l}{AE} = -\frac{S_{1-3} l_{1-3}}{A_{1-3} E_{1-3}} = -\frac{S_{1-3} u_{1-3}^2 l_{1-3}}{A_{1-3} E_{1-3}}$$

ここで \sum は、部材 1-3 を除いたトラスの全部材についての合計を表す。部材 1-3 の伸びを表す項 (上式右辺) の前の負号は、上式左辺の変位が前例題 3.1, 3.2 と同様、左向きを正としていたのに対し、ここで取り出した部材 1-3 の引張力 S_{1-3} による伸びは、部材の左端 1 を支点 1 (節点 1) に結合して不動とし、右端 3 を上記の伸びにより自由に変位するとすれば、節点 4 の変位は右向きで、左辺 (前例題 3.1, 3.2) と逆向きになっていることによる。

この式から

$$S_{1-3} = \frac{-\sum \frac{S_0 u l}{AE}}{\sum \frac{u^2 l}{AE} + \left(\frac{u_{1-3}^2 l_{1-3}}{A_{1-3} E_{1-3}} \right)} \quad (3.10)$$

この式で過剰部材 1-3 の内力 S_{1-3} を求め、これより図 3.3(a) のトラスの内力 S を求める手順は、前例題 3.2 の表 3.1 の結果により次のように行われる。すなわち、部材 1-3 に対し

$$\frac{u_{1-3}^2 l_{1-3}}{A_{1-3} E_{1-3}} = \frac{1^2 \times 2000}{2000 \times 69} = 1.45 \times 10^{-2}$$

この値を、表 3.1 より値と共に式(3.10)に代入し

$$S_{1-3} = \frac{13.3}{0.115 + 0.0145} = 102 \text{ (kN)}$$

したがって、この例題の部材内力は、表 3.2 のように求められる。

表 3.2

部材	S_0 (kN)	u	uS_{1-3} (kN)	$S = (S_0 + uS_{1-3})$ (kN)
1-2	-255	1.41	145	-109
1-3	201	-2.24	-230	-29
2-3	180	-2.00	-206	-26
2-4	255	1.41	145	-109
3-4	201	-2.24	-230	-29
1-3	0	1.00	103	103

支点の反力は左右の支点で上向きの 90kN で、水平成分は 0 である。

(注) 例題 3.1, 3.2 は、外的不静定トラスの例であり、例題 3.3 は内的不静定トラスの例である。

3.2 他の不静定構造

この節では、構造の支点反力、支点反偶力を、力やモーメントの釣り合い条件だけで求

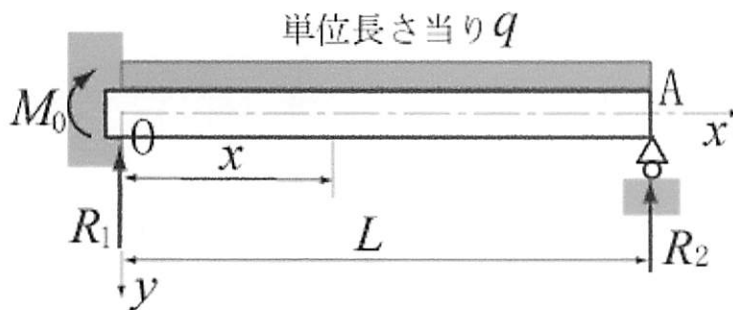


図 3.4

めようとしても、条件式の数不足する場合について、例題によって説明する。

例題 3.3 図 3.4 に示す不静定はりの左右支点の反力 R_1 , R_2 , 左支点の反偶力 M_0 を求め、せん断力図、曲げモーメント図を描け。

(解) 力、モーメントの釣り合い条件として考えられるのは、鉛直力の釣り合い条件と x , y 面内の偶力の釣り合い条件で、合計 2 条件である*。これに対し、支点反力は、左支点 O ($x=0$) での反力 R_1 , 反偶力 (固定モーメント) ** M_0 および右支点 ($x=L$) での反力 R_2 で、合計 3 つの未知量がある。したがって、未知量 (未知反力と未知反偶力) を決めるための条件数が、未知量の個数より 1 つ少なく、条件数が 1 つ不足している。すなわち、外的 1 次不静定である。

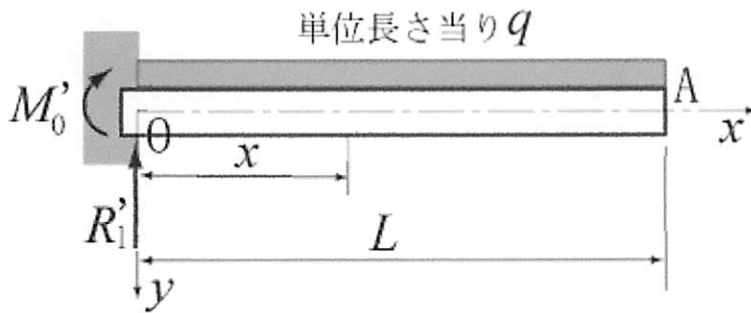


図 3.5

そこで、図 3.4 のはりの右支点を取り除き、図 3.5 の片持はりにすると、図 3.5 で座標 x の点の曲げモーメント M' は

$$M' = -\frac{q(L-x)^2}{2} \quad (1)$$

で与えられる。

図 3.5 の片持はりで、先端 (自由端) A のたわみを求めよう。たわみを求めようとする点 A に、求めようとするたわみの方向 (鉛直下向き方向) に単位仮想荷重 1 だけを受けた、同

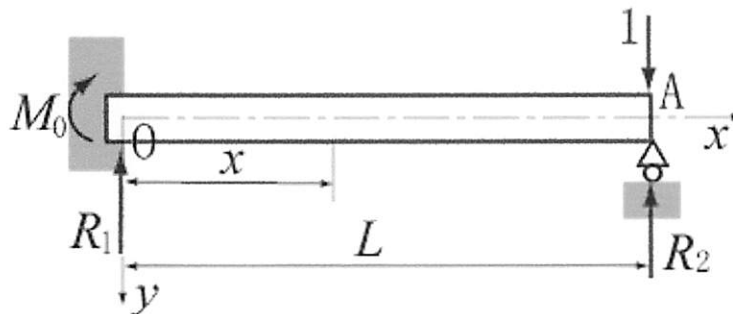


図 3.6

* この例題の場合、水平力の釣り合い条件がみたまされていることは、自明であるから考えないことにする。

** 図 3.4 のように時計回転方向を正としておく。実際、反時計方向に働くなら、 M_0 の値は負 (マイナス) となる。

じ片持はり（図 3.6）を考える。

このはりの任意点の曲げモーメントは

$$m = (-1) \times (L - x) = -(L - x) \quad (2)$$

したがって、点 A のたわみ δ_{a0} は、単位仮想荷重の方法により

$$\delta_{a0} = -\frac{q}{EI} \int_0^L M' m dx = -\frac{q}{2EI} \int_0^L (L - x)^2 dx = \frac{qL^3}{6EI} \quad (3)$$

となる。この結果は、通常の方法の結果*と一致している。

次に図 3.4 の右支点反力** R_2 だけによる、同じ片持はり（図 3.7）の自由端 A のたわみを考える。この場合は、図 3.6 の場合の点 A に加わる単位荷重の代わりに、その $-R_2$ 倍の荷重が加わった場合であるから、図 3.6 のはりのたわみ δ_{aa} の $(-R_2)$ 倍のたわみが点 A に生じる。すなわち図 3.7 のはりで

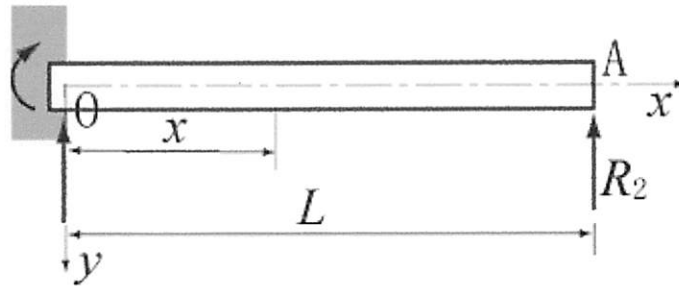


図 3.7

$$\text{点 A のたわみ} = (-R_2) \times \delta_{aa} = (-R_2) \times \frac{1}{EI} \int_0^L m^2 dx = -\frac{R_2}{EI} \int_0^L (L - x)^2 dx = -\frac{R_2 L^3}{3EI} \quad (4)$$

となる。ここで、図 3.7 のはりの点 A の鉛直下向きたわみを求めたが、結果は負号の付いた $-R_2 L^3 / 3$ となった。したがって、点 A のたわみは、実は上向きの $R_2 L^3 / 3$ のたわみとなる。この絶対値は通常の方法の結果*と一致していることが理解できるであろう。

図 3.4 は、図 3.5 と図 3.7 を合成した状態であるから、図 3.4 の点 A（座標 $x = L$ の点）でのたわみは、式(3)と式(4)を合成したもので、右支点 A では、たわみが 0 であるから

$$(y)_{x=L} = \delta_{a0} + (-R_2) \delta_{aa} = \frac{qL^3}{6EI} - \frac{R_2 L^3}{3EI} = 0$$

となり、この式を不静定反力 R_2 について解くと

$$R_2 = \frac{3}{L^3} \cdot \frac{qL^3}{6} = \frac{qL}{2} \quad (5)$$

となり、点 A には、上向きの反力が作用していることが分かる。この結果により、支点 O

* 関谷：SI による材料力学演習、森北(1996)p.64 式(5.57).

** この R_2 は、元のはり（図 3.4）を静定化して図 3.5 のはりとするとき、取り除いた反力で、このように不静定構造を静定構造にするとき取り除く反力を過剰反力という。

* 関谷：前出 p.63, 式(5.50)

での反力、反偶力は、はり全体に作用する外力およびそのモーメントの釣り合いから求められる。

図 3.4 より、上下方向（鉛直方向）の力の釣り合い条件は

$$R_1 + R_2 = R_1 + \frac{3qL}{8} = qL$$

$$\therefore R_1 = qL - \frac{3qL}{8} = \frac{5qL}{8} \quad (6)$$

点 O のまわりのモーメントの釣り合いから

$$M_0 + \frac{qL^2}{2} = R_2L = \frac{3qL^2}{8}$$

$$\therefore M_0 = \frac{3qL^2}{8} - \frac{qL^2}{2} = -\frac{qL^2}{8} \quad (7)$$

したがって、 M_0 は実際は、図 3.4 と逆向き（反時計方向）で、大きさは $qL^2/8$ であることが分かる。

図 3.4 のはりの任意点（座標 x ）でのせん断力 Q は

$$Q = R_1 - qx = \frac{5}{8}qL - qx = \frac{q}{8}(5L - 8x) \quad (8)$$

である。 $x=0$ （左端）および $x=L$ （右端）でのせん断力は式(5), (6)も考慮して、それぞれ

$$(Q)_{x=0} = \frac{5}{8}qL = R_1, \quad (Q)_{x=L} = -\frac{3}{8}qL = -R_2 \quad (9)$$

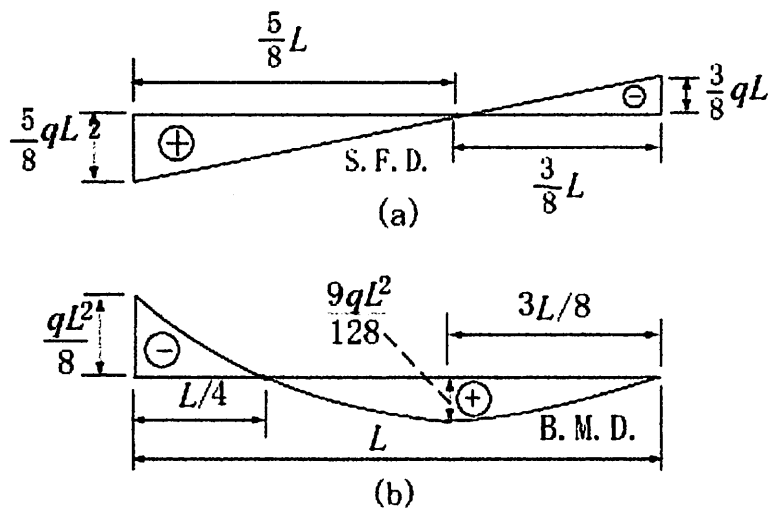


図 3.8

となる。したがって、図 3.4 のはりのせん断力図は、図 3.8(a)となる。

図 3.4 のはりの任意点（座標 x ）の曲げモーメントは

$$M = M_0 + R_1x - \frac{1}{2}qx^2 = -\frac{qL^2}{8} + \frac{5}{8}qLx - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{q}{8}(L-x)(L-4x) \quad (10)$$

となる。式(10)より

$$(M)_{x=0} = M_0 = -\frac{qL^2}{8}, \quad (M)_{x=\frac{L}{4}} = 0, \quad (M)_{x=L} = 0 \quad (11)$$

$$(M)_{\min} = "dM/dx = Q = 0" \text{ の点の } M = -\frac{q}{8}(L-\frac{5}{8}L)(L-\frac{5}{8}L \times 4) = -\frac{qL^2}{128} \quad (12)$$

以上より、図 3.4 のはりの曲げモーメント図は、図 3.8(b)となる。

例題 3.4 図 3.9 に示す半円形アーチの任意点での曲げモーメントを求めよ。曲げ剛性 EI の値は、アーチのすべての断面に対し一定とする。

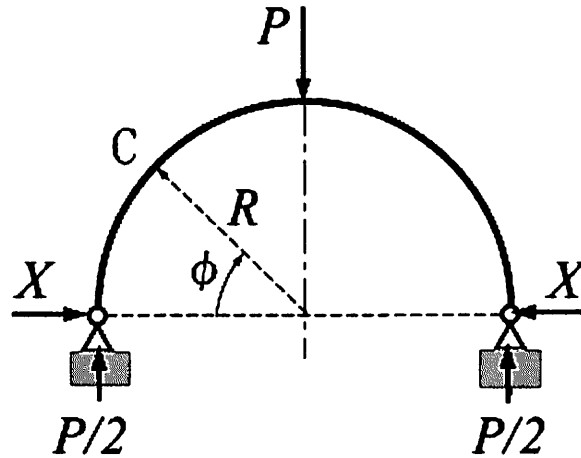


図 3.9

(解) このアーチは、鉛直中心線(図 3.9 中で一点鎖線で示す)に関して対象である。式(2.18)のような積分は、アーチの左半分に対して計算したものを、2倍して求められる。水平反力 X を過剰反力と考え、まず右支点を移動支点として静定化すると、図 2.9(a)のアーチとなる。この静定化したアーチの任意点の曲げモーメントは、例題 2.3 解答中の式(1), (3)で与えられる。図 3.9 の左右支点での過剰反力 X だけを受ける同形のアーチは、図 2.9(b)のアーチの $(-X)$ 倍の荷重を受けるので、曲げモーメントは例題 2.3 の式(4)の $(-x)$ 倍となる。したがって、図 3.9 中の過剰反力 X だけによる、静定化したアーチの右支点の右向き変位は、図 2.9(b)のアーチ右支点の右向き変位の $(-X)$ 倍すなわち

$$-X \int \frac{m^2}{EI} ds = -\frac{X}{EI} \int R^2 \sin^2 \phi R d\phi = -\frac{R^3 X}{2EI} \int (1 - \cos 2\phi) d\phi = -\frac{\pi R^3 X}{2EI} \quad (1)$$

となる。

この例題は、図 2.9(a)の場合(例題 2.3 の最後の答)と図 2.9(b)の $(-X)$ 倍の荷重を受けた場合(上式(1))を合成した状態であり、図 3.9 に見るように、右支点の水平変位は零で

あることより

$$\frac{PR^3}{2EI} - \frac{\pi R^3 X}{2EI} = 0 \quad (2)$$

となり、この式を過剰反力 X について解いて

$$X = \frac{P}{\pi} \quad (3)$$

を得る。

図 3.9 のアーチに対する曲げモーメントは、荷重 P による曲げモーメントと過剰反力 (上式(3)) による曲げモーメントを合成したもので $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ に対し

$$M = \frac{PR}{2}(1 - \cos \phi) - \frac{PR}{\pi} \sin \phi \quad (4)$$

で与えられる。 $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ に対しては、図 2.9 のときと同様、同図の角 ϕ' を上式(4)中の ϕ の

代わりに置き換えればよい。このとき $0 \leq \phi' \leq \frac{\pi}{2}$ である。

例題 3.5 図 3.10 に示すラーメンの支点反力と曲げモーメントを求めよ。ここで、材料は全構造を通じて同じで、断面 2 次モーメントは、図に記入されている値とする。

(解) 右側の支点の水平反力 X を、過剰反力と考えよう。この反力を除いて静定化した構造、すなわち右支点を移動支点とした図 3.11(a)の構造に対する曲げモーメント M_0 を求めよう。先ず支点反力を求める。水平力の釣り合いより (R_3 は図 3.11(a)に示す左支点の水平反力)

$$4 - R_3 = 0 \quad \therefore R_3 = 4$$

次に、左右支点の鉛直反力 R_1 , R_2 を

$$R_1 = R_1' + R_1'', \quad R_2 = R_2' + R_2''$$

と分け、 (R_1', R_2') は与えられた水平力 4 kN および反力 R_3 と釣り合う部分、 (R_1'', R_2'') は水平材に加わる 3 kN/m の等分布荷重と釣り合う部分とする。前者は図 3.11(b)、後者は図 3.11(c)に示されている。図 3.11(b)で、鉛直力の釣り合いから $R_1' + R_2' = 0$, R_1' の作用点すなわち左支点まわりのより $3.6R_2' = 4 \times 1.5$, したがって $R_1' = -1.67$ kN, $R_2' = 1.67$ kN を得る。次に、図 3.11(c)での力の釣り合いより、荷重の左右対称性を考えて、ただちに $R_1'' = R_2'' = (3 \times 3.6) / 2 = 5.4$ kN を得る。

曲げモーメント M_0 は、それぞれ、図 3.11(b), (c)の曲げモーメント M_0' , M_0'' を求めて加え合わせるとよい*。部材 AC は、図 3.11(c)では、曲げモーメントを受けないから、図 3.11(b)の曲げモーメント M_0' だけ考えればよい。このときの曲げモーメントは、AB 間では $M_0 = M_0' = 4x_1$, 点 A では $x_1 = 0$ で $M_0 = 0$, 点 B では $x_1 = x_2 = 1.5$ で $M_0 = 6$ である。

* 曲げモーメントは、ラーメンの外側を圧縮、内側を引張にするものを正とする。

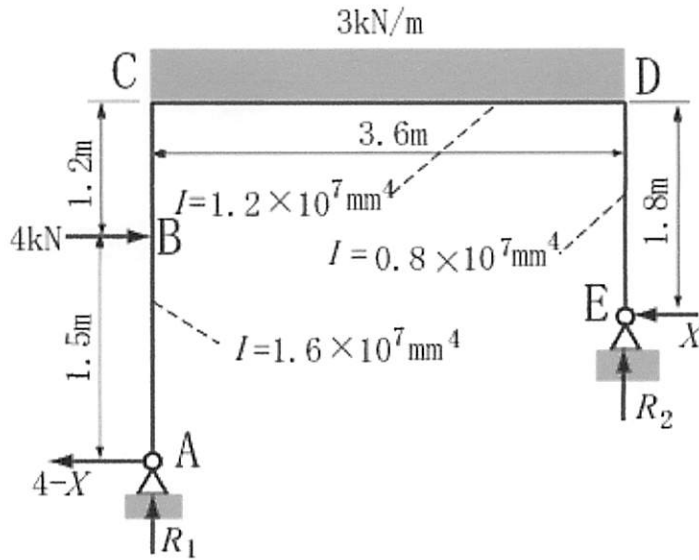


図 3.10

次に、BC 間では、 $M_0 = M_0' = 4x_2 - 4(x_2 - 1.5) = 6$ で一定である。水平材 CD に対する曲げモーメントも、図 3.11(b) に対するもの M_0' と、図 3.11(c) に対するもの M_0'' より成る。図 3.11(b) に対するものは

$$M_0' = 6 - 1.67x_3$$

点 C では $x_3 = 0$ で $M_0' = 6$ 、点 D では $x_3 = 3.6$ で $M_0' = 0$ 、この両端の間では直線的に変化する。図 3.11(c) に対する水平材 CD の曲げモーメントは

$$M_0'' = 5.4x_3 - 1.5x_3^2$$

点 C で $x_3 = 0$ であるから $M_0'' = 0$ 、点 D では $x_3 = 3.6$ で $M_0'' = 0$ 、また、 M_0'' の最大値は

$$\frac{dM_0''}{dx_3} = 5.4 - 3x_3 = 0$$

とおいて、 $x_3 = 1.8$ すなわち CD の中点で起こり $M_0''_{\max} = 4.86$ である。これらの点の間では、上記 M_0'' の式にしたがって放物線的に変化する。部材 DE の曲げモーメントは、この部材の任意点より E 側の外力のモーメントが 0 であることから、 $M_0 = 0$ である。

以上より曲げモーメント図を描けば、図 3.11(d) となる。

過剰反力を単位外力（大きさ 1 の外力）として、静定化した構造に加えたときの反力および曲げモーメントも容易に得られ、図 3.11(e) のようである。

M_0 の線図の各部の図心に対する m の値は、図 3.11(e) に記入したようである。したがって、2.3 節の半図式積分法を用いて*

* 図 3.11(d) の曲線部分の面積は、この曲線の方程式を積分して求めた。すなわち（次ページ脚注に続く）

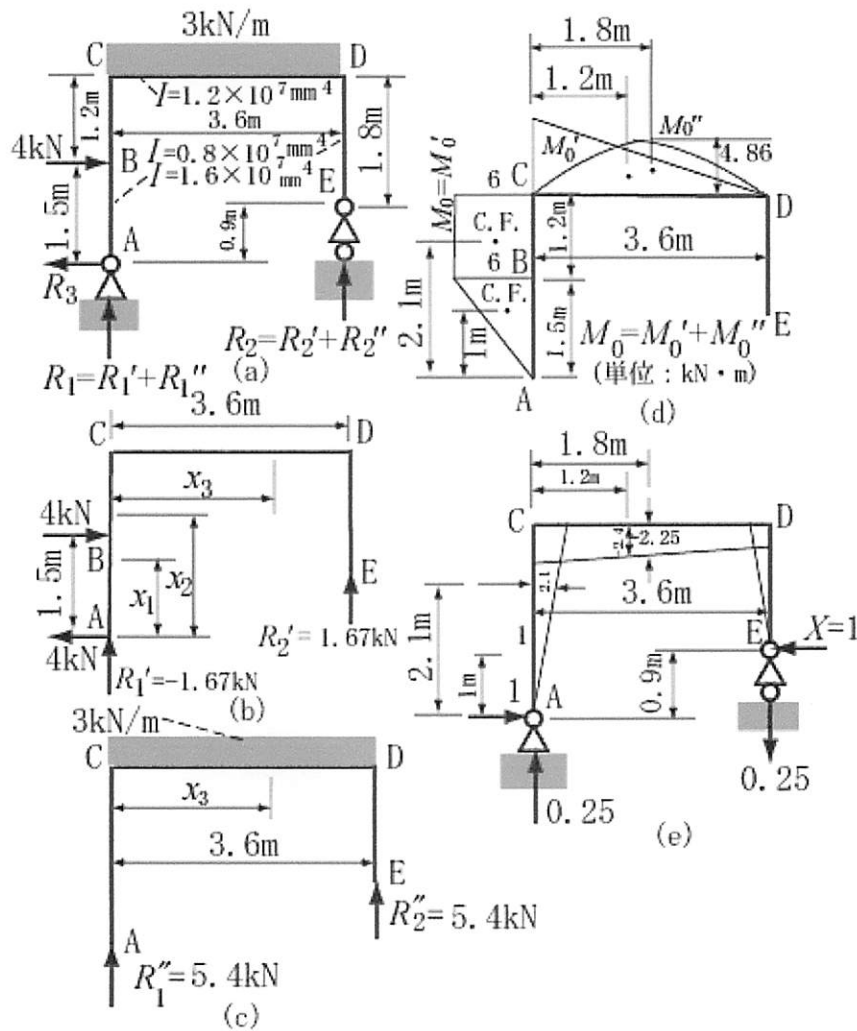


図 3.11

* (前ページ脚注の続き) 図 3.11(d)で曲げモーメント M_0'' の線図の面積は

$$\int_0^{3.6} M_0'' dx_3 = \int_0^{3.6} (5.4x_3 - 1.5x_3^2) dx_3 = 11.7$$

次ページの式の分子で、部材 DE に対し $M_0 = 0$ であるので、部材 DE に対する項はない。

$$X = -\frac{\int \frac{M_0 m}{EI} ds}{\int \frac{m^2}{EI} ds} = -\frac{\int \frac{M_0 m}{I} ds}{\int \frac{m^2}{I} ds}$$

$$= \frac{\left[\frac{\frac{1}{2} \times 1.5 \times 6 \times (-1) + 1.2 \times 6 \times (-2.1)}{1600} + \frac{11.7 \times (-2.25) + \frac{1}{2} \times 6 \times 3.6 \times (-2.4)}{1200} \right]}{\left[\frac{\frac{1}{2} \times (-2.7) \times 2.7 \times (-1.8)}{1600} + \frac{(-1.8) \times 3.6 \times (-2.4)}{1200} + \frac{\frac{1}{2} \times (-1.8) \times 1.8 \times (-1.2)}{800} \right]}$$

$$= 2.54 \text{ kN}$$

したがって、静力学的釣り合い条件より、他の支点反力と、各部材の曲げモーメントが得られ、その結果は図 3.12 に示されている。この曲げモーメント図は図 3.11(d), (e)より

$$M = M_0 + Xm$$

として得られる。

図 3.12

終わりに：以上この章で説明してきた事柄は、1次不静定構造だけを対象としている。2次以上の高次不静定構造についても、考え方は同様であるが、不静定の次数が多くなるほど、問題を解くための手数が増える。高次不静定構造については、この章の演習問題[A], [B]の最後の問題として出題されているから、なるべく自力で解いてみられ、どうしても分からなときは、巻末の演習問題の解答を参照されたい。

3章の演習問題

[A]

(3.1a) 図 3.13 に示すトラスの支点反力と部材内力を求めよ。

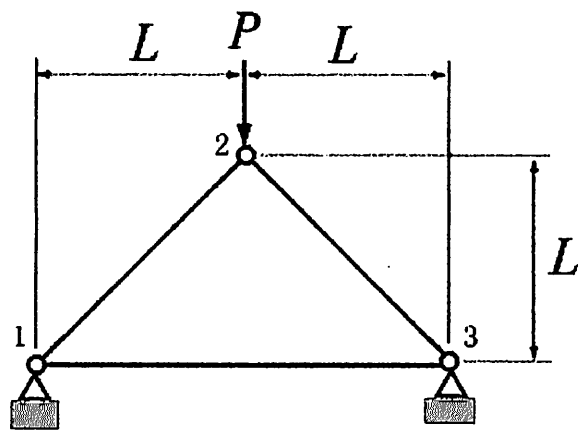


図 3.13

(3.2a) 図 3.14 に示すトラスの支点反力と部材内力を求めよ。

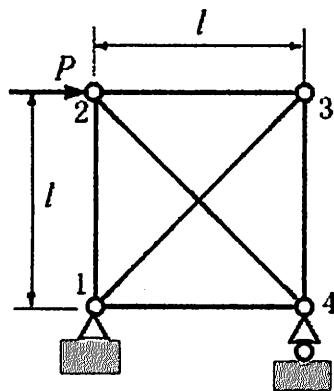


図 3.14

(3.3a) 図 3.15 に示すラーメンの支点反力と各部材の曲げモーメントを求めよ。

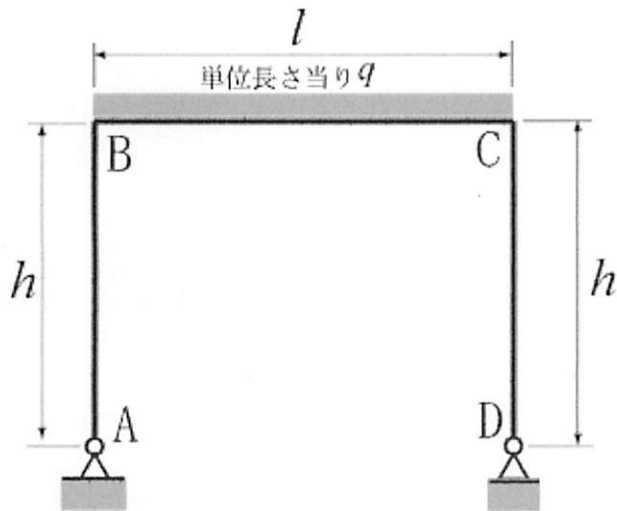


図 3.15

(3.4a) 図 3.16 ()内の数字は部材番号である) で $P = 10 \text{ kN}$ で、 L/AE が構造の各部材について同一のとき、同図のトラスの部材内力を求めよ。ここで L = 部材の長さ、 A = 部材の断面積、 E = 部材材料の縦弾性係数 である。

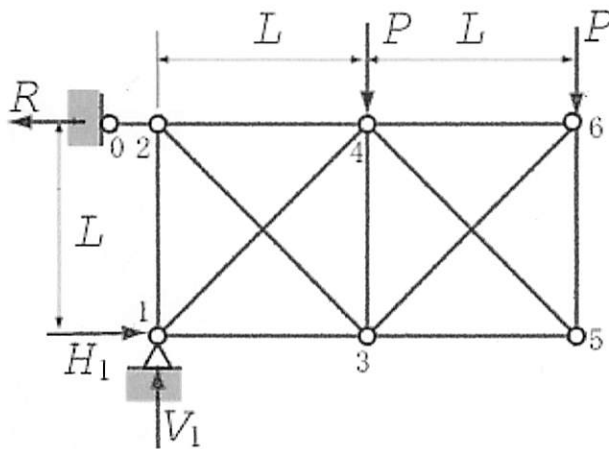


図 3.16

[B]

(3.1b) 図 3.17 に示すトラスの支点反力と部材内力を求めよ。

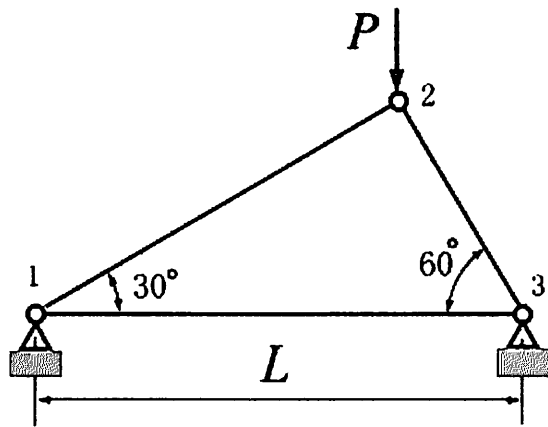


図 3.17

(3.2b) 図 3.18 に示すトラスの支点反力と部材内力を求めよ。

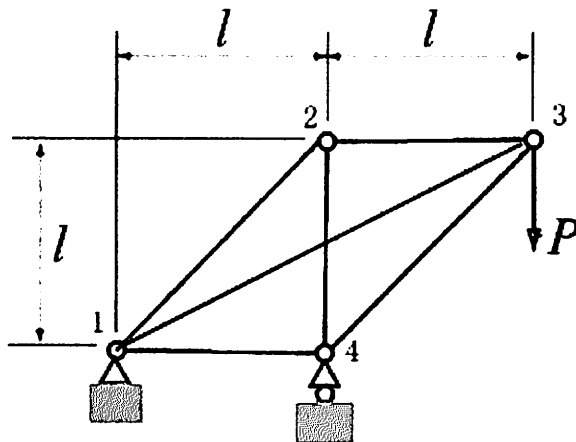


図 3.18

(3.3b) 図 3.19 に示すラーメンの支点反力と各部材の曲げモーメントを求めよ。

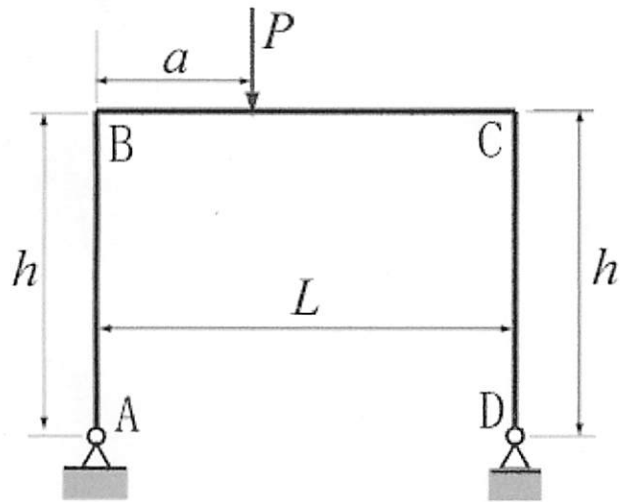


図 3.19

(3.4b) 図 3.20 に示すラーメンに対する曲げモーメント図を描け。ここで EI の値は全構造を通じて同一の一定値であるとし、左右両支点で、構造は固定されているとする。

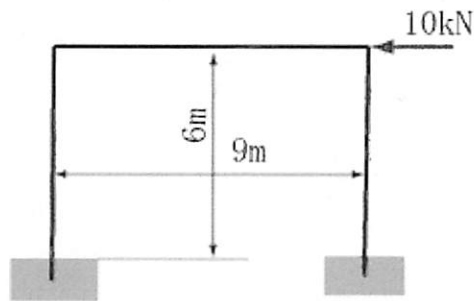


図 3.20

4章 たわみ角法

4.1 たわみ角式

(a)材端せん断力と材端モーメントを受けるはり

この節と次の節では、この章の後半で述べるはりやラーメンの解析に必要となる、いくつかの基本的なはりの問題を学ぶことにしよう。

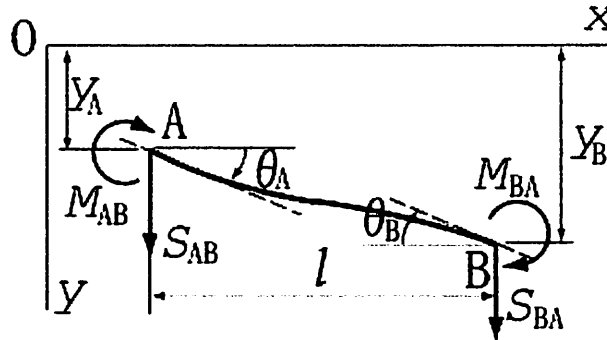


図 4.1

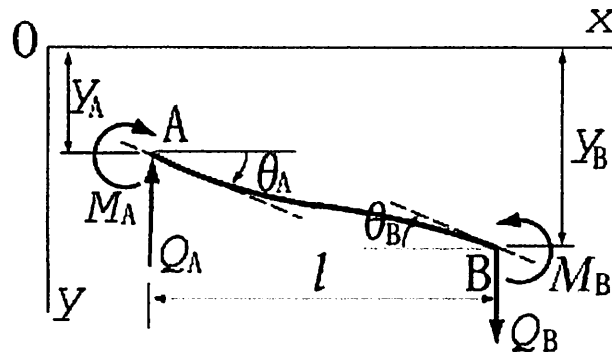


図 4.2

まず、図 4.1 のように両端にせん断力 S_{AB}, S_{BA} とモーメント M_{AB}, M_{BA} の偶力を受けて釣り合っているはりの部分（部材またははり要素）AB を考える。これらの S_{AB}, S_{BA} を材端せん断力、 M_{AB}, M_{BA} を材端モーメントという。材端せん断力は同図のように、すべて下向き（ y 軸の正方向）を正方向とする。また、材端モーメントも同図のように、すべて時計回転方向を正方向とする。これらは、通常の方法力学でのはり要素の両端 A, B でのせん断力 Q_A, Q_B および曲げモーメント M_A, M_B （図 4.2）と異なるので注意されたい。材端せん断力、材端モーメントと材料力学でのせん断力、曲げモーメントの関係は、図 4.1 と図 4.2 を比べれば分かるように、次の式(4.1)で与えられる：

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= -Q_A & S_{BA} &= Q_B \\ M_{AB} &= M_A & M_{BA} &= -M_B \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

図 4.1 のはり要素の釣り合いを考える。まず、鉛直方向の力の釣り合いから

$$S_{AB} + S_{BA} = 0 \quad \therefore S_{AB} = -S_{BA} \equiv S \quad (4.2)$$

ここで、“ \equiv ”はこの記号より左の $S_{AB}, -S_{BA}$ をこの記号“ \equiv ”より右の S と置くという意味である。次に図 4.1 のはり要素の右端 B のまわりのモーメントの釣り合いより、式(4.2)も考慮して

$$M_{AB} - S_{AB}l + M_{BA} = 0 \quad \therefore S_{AB} = S = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{l} \quad (4.3)$$

この最初の式の左辺では、時計方向のモーメントを正、反時計方向のモーメントを負として式を書いた。これらの式(4.2), (4.3)は、要素 AB の途中に外力(後述の中間荷重)が作用していないときに限って有効な式であることに注意されたい。以後、はり要素 AB を、単にはりと呼ぶことにする。

次に、この章の後半で必要となる、4つのはりの例題(例題 4.1~4.4)を示す。これらの例題の共通点は、はりの材端せん断力、材端モーメント(外力)と材端のたわみ、材端のたわみ角(変形)の関係を求めることである。

例題 4.1 図 4.3 のように図 4.1 のはりが、左端 A でたわみ y_A が一般に 0 でなく、たわみ角 θ_A が 0、右端 B でたわみ y_B 、たわみ角 θ_B が共に 0 となるように拘束されているとき、材端せん断力 S_{AB}, S_{BA} 、材端モーメント M_{AB}, M_{BA} を材端 A の既知のたわみ y_A で表し*、たわみ曲線(弾性線)の式を求めよ。

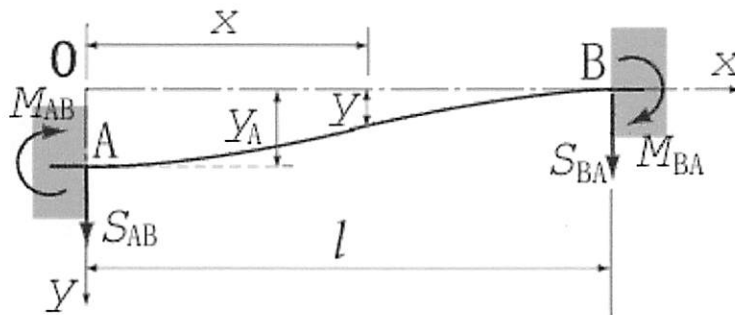


図 4.3

(解) 図 4.1 のはりのたわみの微分方程式は、はりの任意点の座標を x 、その点のたわみを y 、曲げモーメントを M とすれば、付録 B の式(B.9)より

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -(M_{AB} - S_{AB}x) = -M_{AB} + S_{AB}x \quad (1)$$

となる。この式(1)を2回続けて積分し、式(4.2)を用いると

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_{AB}x + \frac{1}{2}Sx^2 + C_1 \quad (C_1 = \text{積分定数}) \quad (2)$$

* y_A は 0 でない微小量とする。以後の例題のたわみ、たわみ角も微小量とする。

$$EIy = -M_{AB} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} Sx^3 + C_1x + C_2 \quad (C_2 = \text{積分定数}) \quad (3)$$

題意により、 $(y)_{x=0} = y_A$, $(dy/dx)_{x=0} = 0$ であるから、式(2), (3)より

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = C_1 = 0 \quad (4)$$

$$EI(y)_{x=0} = EIy_A = C_2 \quad (5)$$

式(4), (5)の C_1 , C_2 を式(2), (3)に代入し

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_{AB}x + \frac{1}{2} Sx^2 \quad (6)$$

$$EIy = -M_{AB} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} Sx^3 + EIy_A \quad (7)$$

はりの右端 B で、 $(y)_{x=l} = (dy/dx)_{x=l} = 0$ であるから、式(6), (7)で $x=l$ と置いたものを 0 に等置し

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = -M_{AB}l + \frac{1}{2} Sl^2 = 0 \quad \therefore S = \frac{2M_{AB}}{l} \quad (8)$$

$$EI(y)_{x=l} = -M_{AB} \frac{l^2}{2} + \frac{1}{6} Sl^3 + EIy_A = 0$$

この最後の式に式(8)を代入して

$$-M_{AB} \frac{l^2}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{2M_{AB}}{l} l^3 + EIy_A = 0 \quad \therefore M_{AB} = \frac{6EI}{l^2} y_A \quad (9)$$

式(4.2), (4.3), (8), (9)より

$$M_{BA} = Sl - M_{AB} = \frac{2M_{AB}}{l} \times l - M_{AB} = M_{AB} = \frac{6EI}{l^2} y_A \quad (10)$$

式(9)を(8)に代入し

$$S = \frac{2}{l} \times \frac{6EI}{l^2} y_A = \frac{12EI}{l^3} y_A \quad (11)$$

式(11)を式(4.2)に代入し

$$S_{AB} = \frac{12EI}{l^3} y_A, \quad S_{BA} = -\frac{12EI}{l^3} y_A \quad (12)$$

を得る。また、式(7)に式(9), (11)を代入し

$$EIy = EIy_A \left(-\frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} + 1 \right) \quad (13)$$

式(9), (10), (12), (13)がこの例題の答である。 $y_A > 0$ のときについて、このはりのたわみ、材端せん断力、材端モーメントを、真の方向を示して描くと、図 4.4 となる。

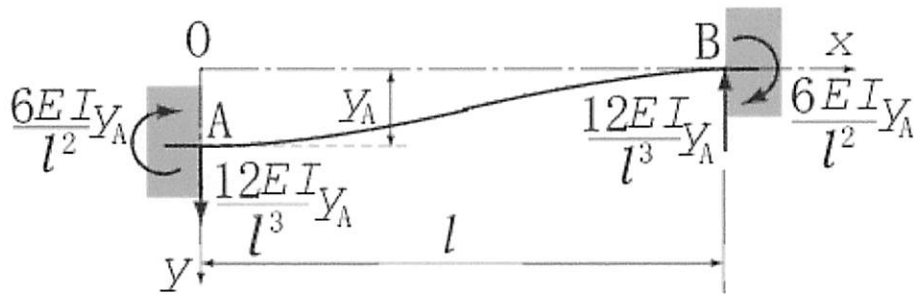


図 4.4

例題 4.2 図 4.1 で θ_A が 0 でない与えられた微小値をとり、 $y_A = y_B = \theta_B = 0$ のとき (図 4.5)、材端せん断力 S_{AB}, S_{BA} 、材端モーメント M_{AB}, M_{BA} 、任意点のたわみ y を θ_A で表せ。

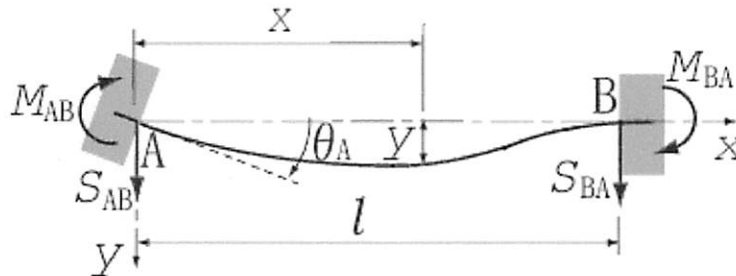


図 4.5

(解) 例題 4.1 の式(2), (3)から始める。式番号は例題 4.1 の続き番号とする。式(2), (3)に左端 ($x = 0$) での境界条件、“たわみ角 = θ_A 、たわみ = 0”を用いると

$$EI \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = C_1 = EI\theta_A \quad (14)$$

$$EI(y)_{x=0} = C_2 = 0 \quad (15)$$

となる。式(14), (15)を式(2), (3)に代入すると

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_{AB}x + \frac{1}{2}Sx^2 + EI\theta_A \quad (16)$$

$$EIy = -M_{AB} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}Sx^3 + EI\theta_A x \quad (17)$$

はりの右端 $x = l$ での境界条件、“たわみ = 0、たわみ角 = 0”より、式(16), (17)で $x = l$ としたものを 0 に等置して

$$0 = -M_{AB}l + \frac{1}{2}Sl^2 + EI\theta_A \quad \therefore S = \frac{2}{l^2}(M_{AB}l - EI\theta_A) \quad (18)$$

$$0 = -M_{AB} \frac{l^2}{2} + \frac{1}{6}Sl^3 + EI\theta_A l \quad \therefore M_{AB} = \frac{4EI}{l}\theta_A \quad (19)$$

ここで式(19)の最後の結果は、その前の式(式(19)の第1式)に式(18)のSの式の右辺を代入し、 M_{AB} について解けば得られる(各自計算して確かめられたい)。式(19)を式(18)に代入し

$$S = \frac{2}{l^2} \left(\frac{4EI}{l} \theta_A \times l - EI\theta_A \right) = \frac{6EI}{l^2} \theta_A \quad (20)$$

式(4.3)に式(19), (20)を代入し、 M_{BA} について解くと

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l} \theta_A \quad (21)$$

たわみの式は、式(17)に式(19), (20)を代入して得られ、次のようになる:

$$EIy = -\frac{4EI}{l} \theta_A \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{6EI}{l^2} \theta_A \times x^3 + EI\theta_A x = EI\theta_A \left(-\frac{2}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3 + x \right) \quad (22)$$

式(4.2), (20)より

$$S_{AB} = \frac{6EI}{l^2} \theta_A, \quad S_{BA} = -\frac{6EI}{l^2} \theta_A \quad (23)$$

以上の式(19), (21), (22), (23)が答である。これらの材端せん断力、材端モーメントを $\theta_A > 0$ として、真の方向を示して描くと図4.6となる。

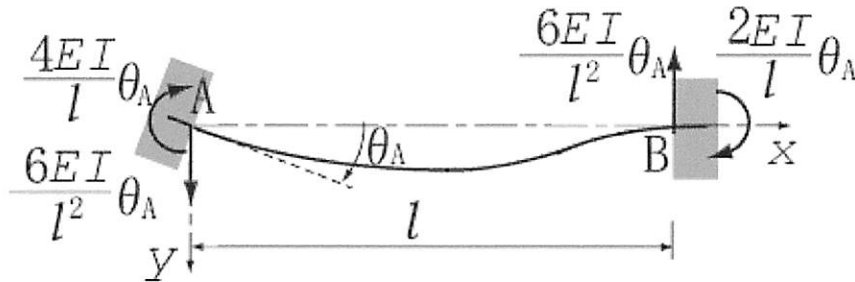


図 4.6

例題 4.3 図 4.1 で、 y_B が 0 でない与えられた微小値をとり、 $y_A = \theta_A = \theta_B = 0$ のとき (図

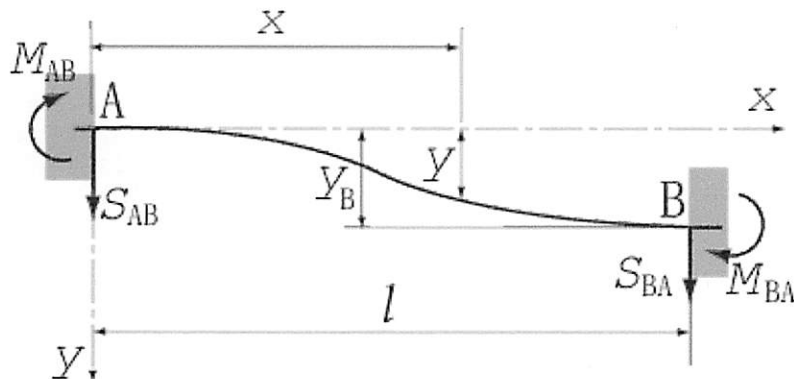


図 4.7

4.7)、材端せん断力 S_{AB}, S_{BA} , 材端モーメント M_{AB}, M_{BA} , 任意点のたわみ y を y_B で表せ。

(解) 例題 4.1, 式(2), (3)に図 4.7 の左端 A での境界条件 $(y)_{x=0} = 0$, $(dy/dx)_{x=0} = 0$ を適用すると

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (24)$$

式(24)を式(2), (3)に代入し、図 4.7 の右端 B での境界条件 $(y)_{x=l} = y_B$, $(dy/dx)_{x=l} = 0$ を適用して S , M_{AB} について解くと

$$S = -\frac{12EI}{l^3} y_B, \quad M_{AB} = -\frac{6EI}{l^2} y_B \quad (25)$$

式(25)を式(4.3)に代入し

$$M_{BA} = -\frac{6EI}{l^2} y_B \quad (26)$$

式(4.2)に式(26)を代入し

$$S_{AB} = -\frac{12EI}{l^3} y_B, \quad S_{BA} = \frac{12EI}{l^3} y_B \quad (27)$$

式(24), (25)を式(3)に代入して、たわみの式

$$EIy = \frac{EI}{l^3} (3lx^2 - 2x^3) y_B \quad (28)$$

を得る。

以上の式(25), (26), (27), (28)が答である。これらの材端せん断力、材端モーメントを $y_B > 0$ として、真の方向を示して描くと図 4.8 となる。

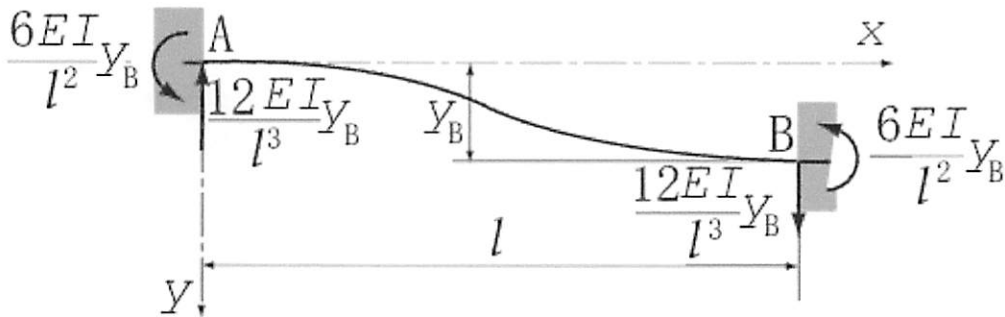


図 4.8

例題 2.4 図 4.1 で、 θ_B が 0 でない与えられた微小値をとり、 $y_A = \theta_A = y_B = 0$ のとき (図 4.9)、材端せん断力、材端モーメント、任意点のたわみ y を θ_B で表せ。

(解) 例題 2.3 と同様にして、式(24)を得る。式(24)を式(2), (3)に代入し、境界条件 $(y)_{x=l} = 0$, $(dy/dx)_{x=l} = \theta_B$ を適用し S , M_{AB} について解くと

$$S = \frac{6EI}{l^2} \theta_B, \quad M_{AB} = \frac{2EI}{l} \theta_B \quad (29)$$

式(29)を式(4.3)に代入すると

$$M_{BA} = \frac{4EI}{l} \theta_B \quad (30)$$

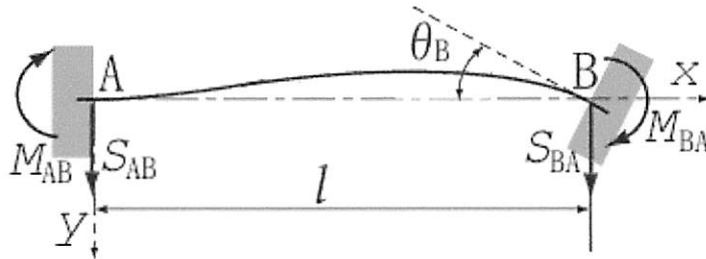


図 4.9

式(29)を式(4.2)に代入し

$$S_{AB} = \frac{6EI}{l^2} \theta_B, \quad S_{BA} = -\frac{6EI}{l^2} \theta_B \quad (31)$$

式(24), (29)を式(3)に代入し

$$EIy = \frac{EI}{l^2} (-lx^2 + x^3) \theta_B \quad (32)$$

以上の式(29), (30), (31), (32)が答である。これらの材端せん断力、材端曲げモーメントを $\theta_B > 0$ として、真の方向を示して描くと図 4.10 となる。

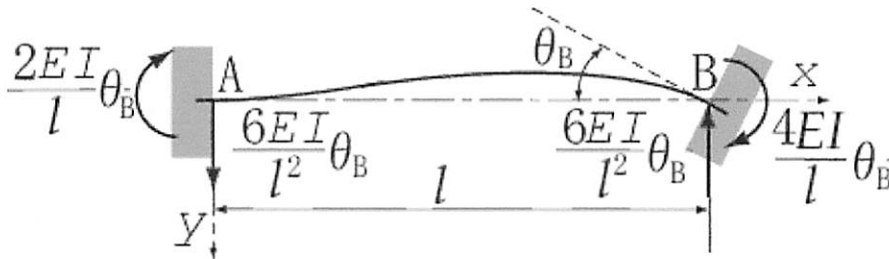


図 4.10

材端モーメントのまとめ 以上の4つの例題で得られた材端モーメントの結果をとりまとめると

(i) $y_A \neq 0$ (一般に*), $\theta_A = y_B = \theta_B = 0$ のとき

$$M_{AB} = \frac{6EI}{l^2} y_A, \quad M_{BA} = \frac{6EI}{l^2} y_A \quad (4.4)$$

(ii) $\theta_A \neq 0$ (一般に), $y_A = y_B = \theta_B = 0$ のとき

* 一般に $y_A=0$ でない、すなわち特別な場合として、 $y_A=0$ となることもあり得るが、通常は 0 でないという意味である。ちなみに、 $y_A=0$ とすると、 $y_A=\theta_A=y_B=\theta_B=0$ となり、 $y \equiv 0$ (全くたわまない場合) となる。以後同様である。

$$M_{AB} = \frac{4EI}{l} \theta_A, \quad M_{BA} = \frac{2EI}{l} \theta_A \quad (4.5)$$

(iii) $y_B \neq 0$ (一般に), $y_A = \theta_A = \theta_B = 0$ のとき

$$M_{AB} = -\frac{6EI}{l^2} y_B, \quad M_{BA} = -\frac{6EI}{l^2} y_B \quad (4.6)$$

(iv) $\theta_B \neq 0$ (一般に), $y_A = \theta_A = y_B = 0$ のとき

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l} \theta_B, \quad M_{BA} = \frac{4EI}{l} \theta_B \quad (4.7)$$

以上の式(4.4), (4.5), (4.6), (4.7)第1式中の M_{AB} および(4.7)第2式中の M_{BA} をそれぞれ合成すると、 $y_A, \theta_A, y_B, \theta_B$ が与えられたとき (図 4.1) の材端モーメント M_{AB}, M_{BA} は、次の式で与えられる:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{6EI}{l^2} y_A + \frac{4EI}{l} \theta_A - \frac{6EI}{l^2} y_B + \frac{2EI}{l} \theta_B \\ M_{BA} &= \frac{6EI}{l^2} y_A + \frac{2EI}{l} \theta_A - \frac{6EI}{l^2} y_B + \frac{4EI}{l} \theta_B \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l} \left(2\theta_A + \theta_B + 3 \frac{y_A - y_B}{l} \right) \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{l} \left(\theta_A + 2\theta_B + 3 \frac{y_A - y_B}{l} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

ここで

$$R = \frac{y_B - y_A}{l} \quad (4.10)$$

と置くと R は、はり AB が全体として時計方向に回転した角で、この R を部材角または部材回転角という。式(4.10)を式(4.9)に代入し

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l} (2\theta_A + \theta_B - 3R) \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{l} (\theta_A + 2\theta_B - 3R) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

を得る。この式の右辺は、はりの変形によって生じる角だけで表されている。

(b) 中間荷重を受ける両端固定はり

長さ l の両端固定はり AB が、両端 $x=0$ (点 A), $x=l$ (点 B) の中間 ($0 \leq x \leq l$) で荷重を受けるいくつかの場合について、材端モーメントの式を示す。この場合、材端モーメントを C_{AB}, C_{BA} で表す。 C_{AB}, C_{BA} の正方向は、前項(a)の M_{AB}, M_{BA} と同様に、時計回転方向を正方向とする。これらの式の誘導については、付録 B の演習問題の解答を参照されたい。材料力学での両端の曲げモーメント M_A, M_B と、この節での材端モーメントの関係

は、式(4.1)と同様、次の式で与えられる：

$$C_{AB} = M_A, \quad C_{BA} = -M_B \quad (4.12)$$

以下では、式(4.12)によって、材料力学での両端の曲げモーメントを、材端モーメントに変換してある：

(i)任意点 $x = a$ に集中荷重 P を受ける場合、 $b = l - a$ として (図 4.11)

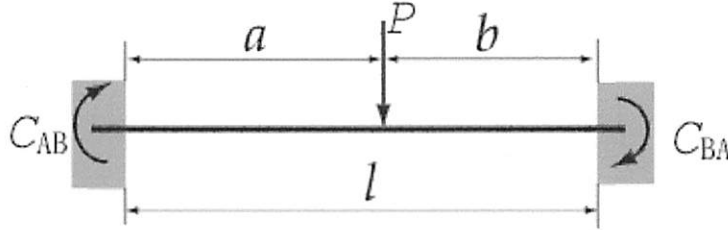


図 4.11

$$C_{AB} = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad C_{BA} = \frac{Pa^2b}{l^2} \quad (4.13)$$

(ii)任意点 $x = a$ にモーメント M の集中偶力を受ける場合、 $b = l - a$ として(図 4.12)

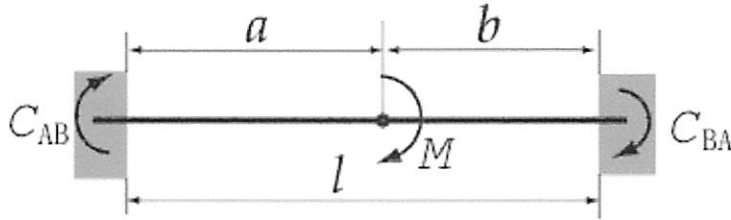


図 4.12

$$C_{AB} = \frac{Mb}{l^2}(2l - 3b), \quad C_{BA} = \frac{Ma}{l^2}(2l - 3a) \quad (4.14)$$

(iii)はり全長にわたり、等分布荷重 q を受ける場合(図 4.13)

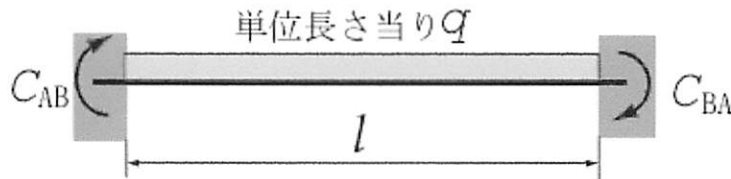


図 4.13

$$C_{AB} = -\frac{ql^2}{12}, \quad C_{BA} = \frac{ql^2}{12} \quad (4.15)$$

(iv)はり全長にわたり三角形分布荷重を受ける場合(図 4.14)

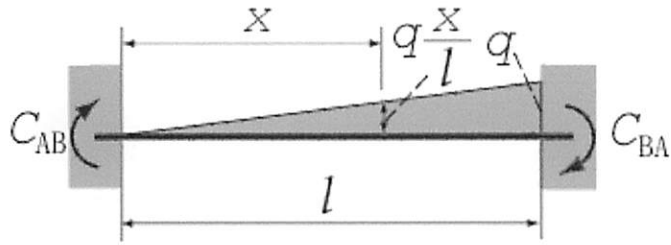


図 4.14

$$C_{AB} = -\frac{ql^2}{30}, \quad C_{BA} = \frac{ql^2}{20} \quad (4.16)$$

(i)~(iv)の中で(i)は、最も基本的で(ii)~(iv)は(i)を用いて導き出すことができる*。(ii)~(iv)の誘導については、この章の演習問題の解答を参照されたい。

(c) たわみ角式

図 4.1 で、同図の材端せん断力、材端モーメントのほかに、前項(b)で述べたような中間荷重も作用した場合、材端モーメントは、式(4.11)と前項で述べたような中間荷重による材端モーメント C_{AB} , C_{BA} を合成することによって、得られる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B - 3R) + C_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{l}(\theta_A + 2\theta_B - 3R) + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

この式をたわみ角式といい、 C_{AB} , C_{BA} を荷重項という。

節点 A が剛節、節点 B が滑節のときは、式(4.17)の第 2 式で $M_{BA} = 0$ (滑節の条件) と置き、これを θ_B について解いて、この θ_B の式を式(4.17)第 1 式に代入して

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}(\theta_A - R) + C_{AB} - \frac{C_{BA}}{2} \quad (4.18)$$

このとき荷重項を

$$H_{AB} = C_{AB} - \frac{C_{BA}}{2} \quad (4.19)$$

と置くと、式(4.18)は

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}(\theta_A - R) + H_{AB} \quad (4.20)$$

この式が、一端 A が剛節、他端 B が滑節のときのたわみ角式である。

同様に、A が滑節、B が剛節のときのたわみ角式は

* (i)の式の誘導は多くの材料力学の教科書や参考書で述べられているから、参照されたい。例えば、関谷：SI による材料力学演習、森北 (1996) , p.77.また、この本の付録 B の演習問題の解答も参照されたい。

$$M_{BA} = \frac{3EI}{l}(\theta_B - R) + H_{BA} \quad (4.21)$$

で与えられ、ここで

$$H_{BA} = C_{BA} - \frac{C_{AB}}{2} \quad (4.22)$$

である。

次に、以上で導いたたわみ角式(4.17), (4.20), (4.21)を、たわみ角、部材角に比例した変数を導入して、簡単化する。まず、長さ l 、断面2次モーメント I の部材で

$$K = \frac{I}{l} \quad (4.23)$$

を、その部材の剛度という。また、任意の部材の剛度を K 、基準にとった部材の剛度を K_0 とすると

$$k = \frac{K}{K_0} \quad (4.24)$$

を、任意の部材の剛比という。式(4.24)を式(4.23)に代入し

$$\frac{I}{l} = kK_0 \quad (4.25)$$

を得る。ここで

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 2EK_0\theta \\ \psi &= -6EK_0R \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

と置き、式(4.17), (4.20), (4.21)に代入すれば、部材 AB に対して φ , ψ で表したたわみ角式が得られる：

両端剛節の部材 AB に対し

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= k(2\varphi_A + \varphi_B + \psi) + C_{AB} \\ M_{BA} &= k(\varphi_A + 2\varphi_B + \psi) + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

一端剛節、他端滑節の部材に対し

端 A が剛節、端 B が滑節の場合

$$M_{AB} = \frac{k}{2}(3\varphi_A + \psi) + H_{AB} \quad (4.28)$$

端 A が滑節、端 B が剛節の場合

$$M_{BA} = \frac{k}{2}(3\varphi_B + \psi) + H_{BA} \quad (4.29)$$

式(4.27), (4.28), (4.29)は、前述の式(4.17), (4.20), (4.21)の代りに用いられる、簡単化したたわみ角式である。これらの式中の φ , ψ は、たわみ角 θ , 部材角 R そのものではないが、

式(4.26)を見れば分かるように、 ϕ , ψ は θ , R と比例する量であるので、 ϕ , ψ も、たわみ角、部材角と呼ぶことにする。

4.2 節点方程式

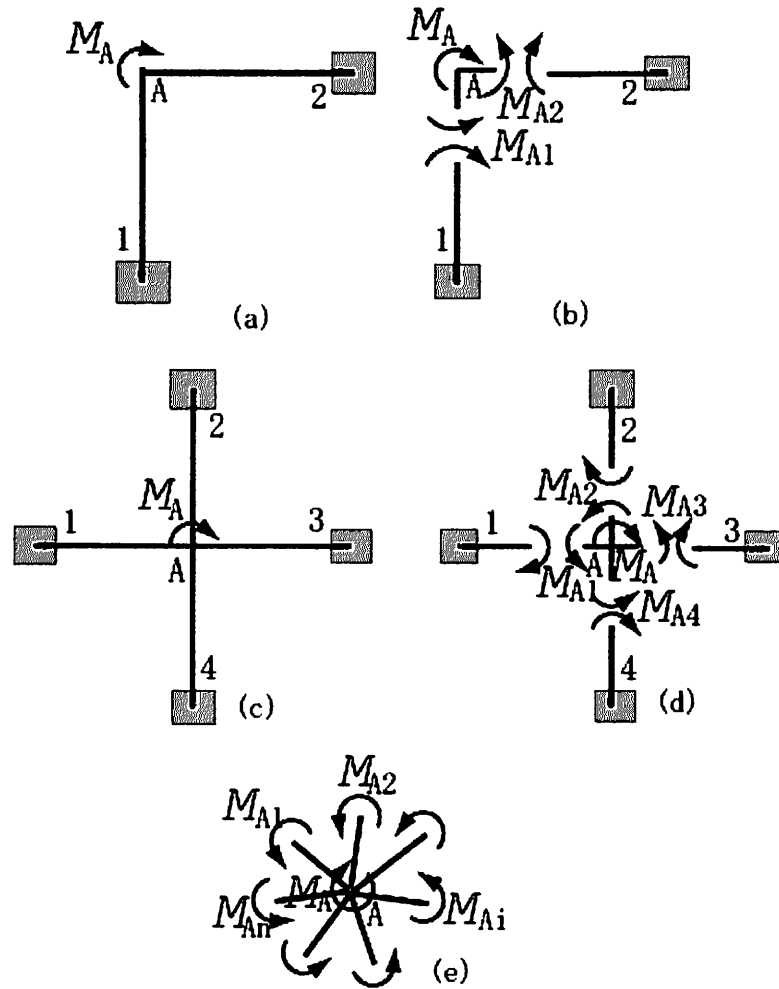


図 4.15

図 4.15(a)に示すような、かぎ形ラーメンが節点 A に集中偶力 M_A を受ける場合を考える。節点 A 近傍を切り出して、切断部に加わるモーメントを図示すると、同図(b)となる。ここで切り出された節点 A 近傍のモーメントの釣り合いを考えると

$$M_A = M_{A1} + M_{A2} = \sum_{i=1}^2 M_{Ai} \quad (4.30)$$

この式の左辺は、時計方向のモーメント、右辺は反時計方向のモーメントである。

次に図 4.15(c)に示すような十字形ラーメンが節点 A に集中偶力 M_A を受ける場合を考える。節点 A 近傍を切り出して、切断部に加わるモーメントを図示すると、同図(d)となる。ここで切り出された節点 A 近傍のモーメントの釣り合いを考えると

$$M_A = M_{A1} + M_{A2} + M_{A3} + M_{A4} = \sum_{i=1}^4 M_{Ai} \quad (4.31)$$

同様に、図 4.15(e)のように、節点 A に n 本の部材 A1, A2, ..., Ai, ..., An が集まる場合、節点 A に集中偶力 M_A が作用するならば

$$M_A = M_{A1} + M_{A2} + \dots + M_{An} = \sum_{i=1}^n M_{Ai} \quad (4.32)$$

外力として節点 A に作用する集中偶力がないときは $M_A = 0$ であるから、式(4.32)より

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0 \quad (4.33)$$

以上で得られた式(4.30), (4.31), (4.32), (4.33)を節点方程式という。

2.3 層方程式

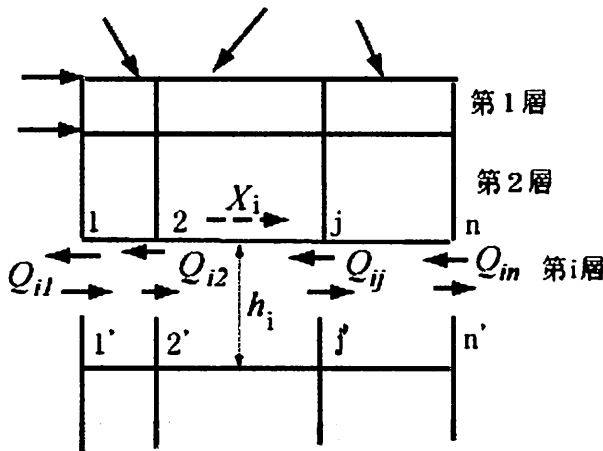


図 4.16

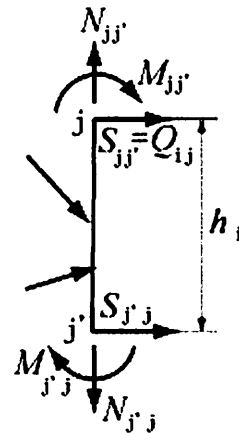


図 4.17

図 4.16 に示すラーメンの第 i 層を考える。同図のように、第 i 層から上を切断し、切断面に作用するせん断力を図のように $Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ij}, \dots, Q_{in}$ とする。第 i 層より上の部分に作用する外力の合力の x 成分を X_i とする。第 i 層より上の切断した部分の水平方向の釣り合いから (図 4.16)

$$X_i = Q_{i1} + Q_{i2} + \dots + Q_{ij} + \dots + Q_{in} = \sum_{j=1}^n Q_{ij} \quad (4.34)$$

この式を第 i 層の層方程式という。このような層方程式が、各層に対し成り立つ。

図 4.16 の中の部材 jj' を取り出して図 4.17 に示す。 jj' の長さを h_i とし、 jj' に作用する外力の節点 j まわりの時計回転方向のモーメントを $M_{jj'}$ とする。節点 j のまわりのモーメントの釣り合い条件から

$$S_{j'} = -\frac{1}{h_i}(M_{j'} + M_{j'j} + M_{j'}) \quad (4.35)$$

となる。

図 4.17 で、 $N_{j'}$ 、 $N_{j'j}$ は、それぞれ節点 j, j' に作用する軸力であるが、当面の考察には必要でない。

式(4.35)を、図 4.17 を配慮して式(4.34)に代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_i} \sum_{j=1}^n (M_{j'} + M_{j'j} + M_j) &= X_i \\ \therefore \sum_{j=1}^n (M_{j'} + M_{j'j} + M_j) &= -h_i X_i \end{aligned} \quad (4.36)$$

ここで $\sum_{j=1}^n$ は、 $j=1, 2, \dots, n$ としたとき、それに応じて $j'=1, 2, \dots, n$ とし、合計する

ことを意味する。この式の $M_{j'}$ 、 $M_{j'j}$ にたわみ角式(4.27)、(4.28)、(4.29)を代入すると、たわみ角 φ 、部材角 ψ を未知数とする層方程式が、ラーメンの層数だけ得られる。

2.4 はりとラーメンの解析例

前節までで誘導した、たわみ角式、節点方程式、層方程式を用いて、はりとラーメンの材端モーメントを求める手順を、例題によって説明しよう。

例題 4.5 図 4.18 に示すように、各支点間の距離*が l の連続ばりが全長にわたり、等分布荷重 q を受けるとき、部材 AB, BC の材端モーメント M_{AB} 、 M_{BA} 、 M_{BC} 、 M_{CB} を求めよ。

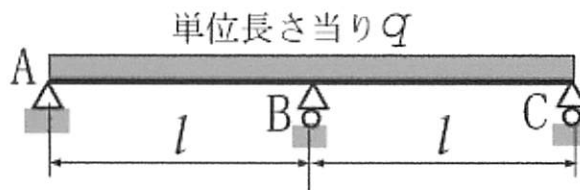


図 4.18

(解) 節点方程式は

$$\text{節点 A: } M_{AB} = 0 \quad (1)$$

$$\text{節点 B: } M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (2)$$

$$\text{節点 C: } M_{CB} = 0 \quad (3)$$

部材 AB に対するたわみ角式は、端 A が滑節、端 B が剛節であることから**、AB の部材角を ψ_{AB} として、式(4.29)より

* 支点間の距離をスパンと呼ぶことがある。

** 部材 AB の場合 M_{AB} は式(1)で 0 となるのが分かっているから、ここでは M_{BA} の式だけを書く。

$$M_{BA} = \frac{k}{2}(3\varphi_B + \psi_{AB}) + H_{BA} \quad (4)$$

部材 BC に対するたわみ角式は、BC の部材角を ψ_{BC} として

$$M_{BC} = \frac{k}{2}(3\varphi_B + \psi_{BC}) + H_{BC} \quad (5)$$

節点 A, B, C は支点となっており、たわまないことから、変形前後の線分 AB, BC は不変で、AB, BC の部材角は 0 である：

$$\psi_{AB} = 0, \quad \psi_{BC} = 0 \quad (6)$$

AB, BC は単位長さ当り q の等分布荷重を受けるから、式(4.15)より

$$C_{AB} = -\frac{ql^2}{12}, \quad C_{BA} = \frac{ql^2}{12}, \quad C_{BC} = -\frac{ql^2}{12}, \quad C_{CB} = \frac{ql^2}{12} \quad (7)$$

したがって、式(4.19), (4.22)*より

$$\left. \begin{aligned} H_{BA} &= C_{BA} - \frac{C_{AB}}{2} = \frac{ql^2}{12} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{ql^2}{12} \right) = \frac{ql^2}{8} \\ H_{BC} &= C_{BC} - \frac{C_{CB}}{2} = -\frac{ql^2}{12} - \frac{1}{2} \times \frac{ql^2}{12} = -\frac{ql^2}{8} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(6), (8)をたわみ角式(4), (5)に代入し

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= \frac{3}{2}k\varphi_B + \frac{ql^2}{8} \\ M_{BC} &= \frac{3}{2}k\varphi_B - \frac{ql^2}{8} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)を節点 B の節点方程式(2)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}k\varphi_B + \frac{ql^2}{8} + \frac{3}{2}k\varphi_B - \frac{ql^2}{8} &= 0 \\ \therefore \varphi_B &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入し

$$M_{BA} = -M_{BC} = \frac{ql^2}{8} \quad (11)$$

式(1), (11)より部材 AB の材端モーメントは

$$M_{AB} = 0, \quad M_{BA} = \frac{ql^2}{8} \quad (12)$$

式(11), (3)より部材 BC の材端モーメントは

$$M_{BC} = -\frac{ql^2}{8}, \quad M_{CB} = 0 \quad (13)$$

式(12), (13)が、この例題の答である。

* 部材 BC に対しては、式(4.15), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22)で A の代わりに B, B の代わりに C とする。

例題 4.6 図 4.19 に示すように、水平材 BC 上の一点に集中荷重 P を受けるかぎ形ラーメン ABC の部材 AB, BC の材端モーメント M_{BA} , M_{BC} , M_{CB} を求めよ。ここで、節点 A は滑節、節点 B, C は剛節、部材 AB, BC の断面 2 次モーメントをそれぞれ I_1 , I_2 とする。

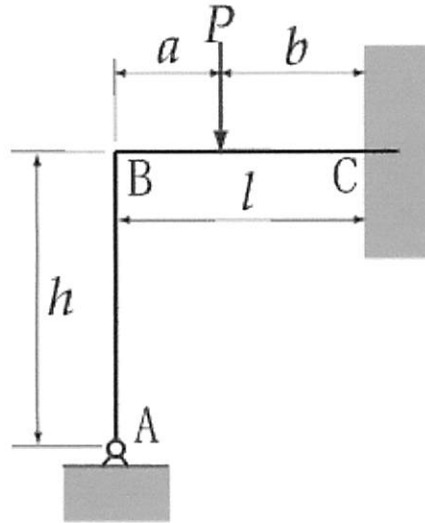


図 4.19

(解) 部材 AB, BC の剛度をそれぞれ K_1 , K_2 , 剛比をそれぞれ k_1 , k_2 とすると、式(4.23)より

$$K_1 = \frac{I_1}{h}, \quad K_2 = \frac{I_2}{l} \quad (1)$$

基準剛度を K_1 とすれば、剛比は式(4.24)より

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{K_1}{K_1} = 1 \\ k_2 &= \frac{K_2}{K_1} = \frac{I_2/I_1}{l/h} = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} \equiv k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

部材 AB で、一端 A は滑節、他端 B は剛節であるので、式(4.29)より部材 AB の部材角を ψ_{AB} とし

$$M_{BA} = \frac{k_1}{2}(3\varphi_B + \psi_{AB}) + H_{BA}$$

この式に式(2)₁ を代入し、部材 AB, BC の伸びを無視すれば、B が変位しないことから $\psi_{AB} = 0$, また部材 AB には中間荷重が作用していないから $H_{AB} = 0$ であることより

$$M_{BA} = \frac{1}{2} \times 3\varphi_B = \frac{3}{2}\varphi_B \quad (3)$$

部材 BC は、両端が剛節であるから、たわみ角式(4.27)で A の代わりに B, B の代わりに C, ψ の代わりに ψ_{BC} とし、式(2)₂ を考慮して

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= k(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC} \\ M_{CB} &= k(\varphi_B + 2\varphi_C + \psi_{CB}) + C_{CB} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

節点 B はラーメンが変形しても動かないことから、 $\psi_{BC} = 0$ である。また、固定端 C は回転しないから $\varphi_C = 0$ である。したがって、式(4)は次式となる：

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= k \cdot 2\varphi_B + C_{BC} \\ M_{CB} &= k \cdot \varphi_B + C_{CB} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、荷重項 C_{BC} 、 C_{CB} は、式(4.13)で A の代わりに B, B の代わりに C として

$$C_{BC} = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad C_{CB} = \frac{Pa^2b}{l^2} \quad (6)$$

で与えられる。

次に、節点 B に対する節点方程式は

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (7)$$

式(3), (5)の第 1 式を式(7)に代入し

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\varphi_B + 2k\varphi_B + C_{BC} &= 0 \\ \therefore \varphi_B &= -\frac{2C_{BC}}{3+4k} = \frac{2Pab^2}{(3+4k)l^2} \end{aligned} \quad (8)$$

この φ_B を式(3)に代入すると、材端モーメント M_{BA} は

$$M_{BA} = \frac{3}{2} \times \frac{2Pab^2}{(3+4k)l^2} = \frac{3Pab^2}{(3+4k)l^2} \quad (9)$$

材端モーメント M_{BC} は、式(9)を式(7)に代入し

$$M_{BC} = -M_{BA} = -\frac{3Pab^2}{(3+4k)l^2} \quad (10)$$

この式は、式(5)₁に式(8), (6)₁を代入しても得られる (各自計算を試みられたい)。

材端モーメント M_{CB} は、式(8)を式(5)₂に代入し

$$M_{CB} = k \times \frac{2Pab^2}{(3+4k)l^2} + \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{Pab\{3a + 2k(a+l)\}}{(3+4k)l^2} \quad (11)$$

式(9), (10), (11)が答である。

例題 4.7 図 4.20 に示すように、水平材 BC 上に等分布荷重 q を受けるかぎ形ラーメン ABC の部材 AB, BC の材端モーメント M_{AB} , M_{BA} , M_{BC} を求めよ。ここで節点 A, B は剛節、節点 C は滑節、部材 AB, BC の断面 2 次モーメントを I_1 , I_2 とする。

(解) 部材 AB, BC の長さ、断面 2 次モーメント、剛度、剛比は、前例題と同じである。したがって、部材 AB, BC の剛比は、それぞれ 1, k である。

AB のたわみ角式は、部材 AB に対する剛比は 1 であるから、部材角を ψ_{AB} とすると、式

(4.27)より

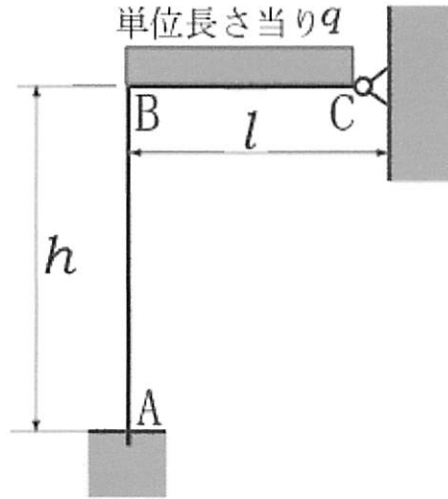


図 4.20

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2\varphi_A + \varphi_B + \psi_{AB} + C_{AB} \\ M_{BA} &= \varphi_A + 2\varphi_B + \psi_{AB} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

BC のたわみ角式は、部材 BC の剛比は k であるから、式(4.28)で節点 A, B の代わりに節点 B, C, 部材角 ψ の代わりに ψ_{BC} として

$$M_{BC} = \frac{k}{2}(3\varphi_B + \psi_{BC}) + H_{BC} \quad (2)$$

節点 A, B, C の位置は、変形前後で不変であるから、線分 AB, BC は変形前後で不変である。したがって、部材 AB, BC に対する部材角は 0 である。すなわち

$$\psi_{AB} = 0, \quad \psi_{BC} = 0 \quad (3)$$

また、節点 A は固定端であるから

$$\varphi_A = 0 \quad (4)$$

式(1)中の荷重項 C_{AB} , C_{BA} は、部材 AB に、中間荷重が作用していないことから

$$C_{AB} = C_{BA} = 0 \quad (5)$$

式(2)に対応する荷重項 C_{BC} , C_{CB} は、部材 BC に等分布荷重 q が作用していることから、式(4.15)で添字 AB, BA の代わりに BC, CB として得られ

$$C_{BC} = -\frac{ql^2}{12}, \quad C_{CB} = \frac{ql^2}{12} \quad (6)$$

したがって、式(4.19)で添字 AB, BA の代わりに BC, CB として

$$H_{BC} = C_{BC} - \frac{C_{CB}}{2} = -\frac{ql^2}{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{ql^2}{12}\right) = -\frac{ql^2}{8} \quad (7)$$

式(1)に式(3), (4), (5)を代入し、部材 AB のたわみ角式は

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \varphi_B \\ M_{BA} &= 2\varphi_B \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(2)に式(3), (7)を代入し、部材 BC のたわみ角式は

$$M_{BC} = \frac{3}{2}k\varphi_B - \frac{ql^2}{8} \quad (9)$$

節点 B の節点方程式は

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (10)$$

式(8)₂, (9)を式(10)に代入し

$$\begin{aligned} 2\varphi_B + \frac{3}{2}k\varphi_B - \frac{ql^2}{8} &= 0 \\ \therefore \varphi_B &= \frac{ql^2}{4(4+3k)} \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)を式(8)に代入し

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{ql^2}{4(4+3k)} \\ M_{BA} &= \frac{ql^2}{2(4+3k)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)₂を式(10)に代入し

$$M_{BC} = -\frac{ql^2}{2(4+3k)} \quad (13)$$

式(13)は、式(11)を式(9)に代入しても得られる：

$$M_{BC} = \frac{3k}{2} \times \frac{ql^2}{4(4+3k)} - \frac{ql^2}{8} = -\frac{ql^2}{2(4+3k)}$$

この結果は式(13)と一致している。

式(12), (13)がこの例題の答である。

例題 4.8 図 4.21 に示すように、水平材 BC 上の一点に集中荷重 P を受ける門形ラーメン ABCD の部材 AB, BC, CD の材端モーメントを求めよ。ここで、節点 A, D は固定端、部材 AB, CD の断面 2 次モーメントを I_1 、部材 BC のそれを I_2 とする。

(解) 部材 AB, CD の剛度をそれぞれ K_1 , K_2 、剛比を k_1 , k_2 とする。式(4.23)より

$$K_1 = \frac{I_1}{h}, \quad K_2 = \frac{I_2}{l} \quad (1)$$

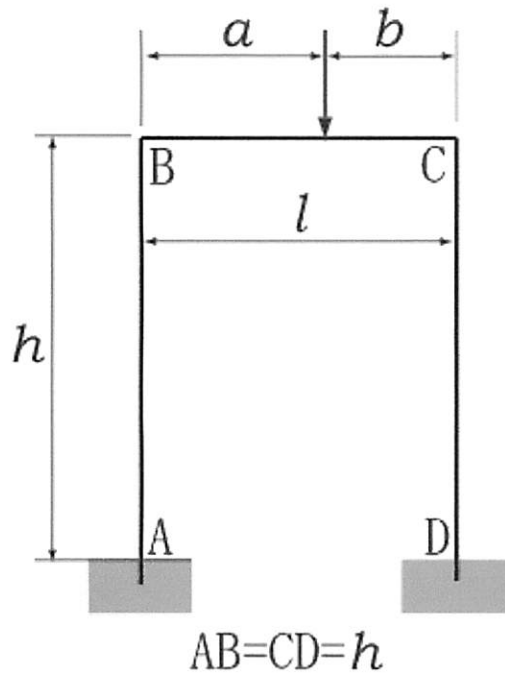


図 4.21

基準剛度を K_1 とすれば、剛比は式(4.24)より

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{K_1}{K_1} = 1 \\ k_2 &= \frac{K_2}{K_1} = \frac{I_2}{l} / \frac{I_1}{h} = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l} \equiv k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

部材 AB で、節点 A, B は共に剛節であるので、たわみ角式は、式(4.27)より部材 AB の部材角を ψ_{AB} として

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2\varphi_A + \varphi_B + \psi_{AB} + C_{AB} \\ M_{BA} &= \varphi_A + 2\varphi_B + \psi_{AB} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

部材 BC で、節点 B, C 共剛節であるので、たわみ角式は、式(2.27)より部材 BC の部材角を ψ_{BC} として

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= k(2\varphi_B + \varphi_C + \psi_{BC}) + C_{BC} \\ M_{CB} &= k(\varphi_B + 2\varphi_C + \psi_{BC}) + C_{CB} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

部材 CD で、節点 C, D 共剛節であるので、たわみ角式は、式(4.27)より部材 CD の部材角を ψ_{CD} として

$$\left. \begin{aligned} M_{CD} &= 2\varphi_C + \varphi_D + \psi_{CD} + C_{CD} \\ M_{DC} &= \varphi_C + 2\varphi_D + \psi_{CD} + C_{DC} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

節点 A, D は固定端であるからたわみ角は 0 で

$$\varphi_A = \varphi_D = 0 \quad (6)$$

変形前後で、節点 A, B, C, D の位置は不変であるから、線分 AB, BC, CD も不変で、したがって、これらの部材の部材角は 0 である：

$$\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = 0 \quad (7)$$

部材 AB, CD には中間荷重は、作用していないから

$$C_{AB} = C_{BA} = C_{CD} = C_{DC} = 0 \quad (8)$$

部材 BC は、任意点に集中荷重が作用しており、図 4.11 と同様であるので、式(4.13)より

$$C_{BC} = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad C_{CB} = \frac{Pa^2b}{l^2} \quad (9)$$

式(3), (4), (5)に式(6), (7), (8), (9)を代入し

部材 AB のたわみ角式：

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \varphi_B \\ M_{BA} &= 2\varphi_B \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

部材 BC のたわみ角式：

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= k(2\varphi_B + \varphi_C) - \frac{pab^2}{l^2} \\ M_{CB} &= k(\varphi_B + 2\varphi_C) + \frac{Pa^2b}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

部材 CD のたわみ角式：

$$\left. \begin{aligned} M_{CD} &= 2\varphi_C \\ M_{DC} &= \varphi_C \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

節点 B, C の節点方程式は

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ M_{CB} + M_{CD} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)₁に式(10)₂, (11)₁を、式(13)₂に式(11)₂, (12)₁を代入し

$$\left. \begin{aligned} 2\varphi_B + k(2\varphi_B + \varphi_C) - \frac{Pab^2}{l^2} &= 0 \\ k(\varphi_B + 2\varphi_C) + 2\varphi_C + \frac{Pa^2b}{l^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

この式を書き換えて

$$\left. \begin{aligned} 2(1+k)\varphi_B + k\varphi_C &= \frac{Pab^2}{l^2} \\ k\varphi_B + 2(1+k)\varphi_C &= -\frac{Pa^2b}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

この式を φ_B , φ_C を未知数とする連立方程式として、行列式を用いて解けば

$$\varphi_B = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \varphi_C = \frac{\Delta_2}{\Delta_0} \quad (16)$$

ここで

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 2(1+k) & k \\ k & 2(1+k) \end{vmatrix} = 4(1+k)^2 - k^2 = 3k^2 + 8k + 4 = (3k+2)(k+2) \quad (17)_1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{Pab^2}{l^2} & k \\ -\frac{Pa^2b}{l^2} & 2(1+k) \end{vmatrix} = \frac{Pab}{l^2} \begin{vmatrix} b & k \\ -a & 2(1+k) \end{vmatrix} = \frac{Pab}{l^2} \{k(2b+a) + 2b\} \quad (17)_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2(1+k) & \frac{Pab^2}{l^2} \\ k & -\frac{Pa^2b}{l^2} \end{vmatrix} = \frac{Pab}{l^2} \begin{vmatrix} 2(1+k) & b \\ k & -a \end{vmatrix} = -\frac{Pab}{l^2} \{k(2a+b) + 2a\} \quad (17)_3$$

式(17)_{1,2,3}を式(16)に代入し

$$\varphi_B = \frac{Pab\{k(2b+a) + 2b\}}{l^2(3k+2)(k+2)}, \quad \varphi_C = -\frac{Pab\{k(2a+b) + 2a\}}{l^2(3k+2)(k+2)} \quad (18)$$

式(18)を式(10), (11), (12)に代入すると

$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{Pab\{k(2b+a) + 2b\}}{l^2(3k+2)(k+2)}, \\ M_{BA} &= \frac{2Pab\{k(2b+a) + 2b\}}{l^2(3k+2)(k+2)} \\ M_{BC} &= -\frac{2Pab\{k(a+2b) + 2b\}}{l^2(3k+2)(k+2)} \\ M_{CB} &= \frac{2Pab\{k(2a+b) + 2a\}}{l^2(3k+2)(k+2)} \\ M_{CD} &= -\frac{2Pab\{k(2a+b) + 2a\}}{l^2(3k+2)(k+2)} \\ M_{DC} &= -\frac{Pab\{k(2a+b) + 2a\}}{l^2(3k+2)(k+2)} \end{aligned}$$

4章の演習問題

[A]

(4.1a) 図 4.18 に示す連続はり (例題 4.5) の部材 AB, BC の材端せん断力と支点 A, B, C の反力を求め、この連続はりのせん断力図、曲げモーメント図を描け。

(4.2a) 図 4.22 に示すように、水平材 BC 上に等分布荷重を受ける門形ラーメン ABCD の部材 AB, BC, CD の材端モーメントを求め、曲げモーメント図を描け。

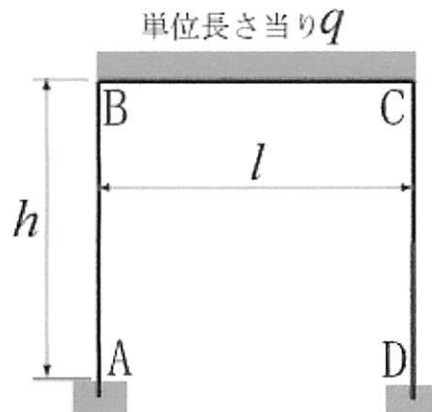


図 4.22

(4.3a) 図 4.23 に示すように長方形ラーメンが、単位長さ当り q の外圧を受けるとする。各部材の材端モーメントを求め、曲げモーメント図を描け。

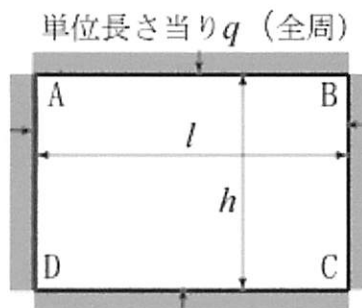


図 4.23

[B]

(4.1b) 図 4.24 のように、等しいスパンを持ち、左端が固定、他の支点が単純支持された連続はりが、左スパンに $2q$ 、右スパンに q の等分布荷重を受けるとき、材端モーメント、材端せん断力、支点 O, A, B の反力を求め、せん断力図、曲げモーメント図を描け*。

* 関谷：SI による材料力学演習、森北(1996), pp.115-116, 演習問題 B 5.9 とその解答(pp.226-227)参照。

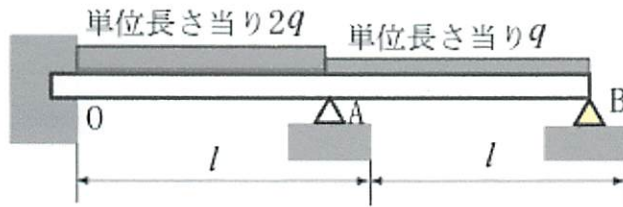


図 4.24

(4.2b) 図 4.25 のように、節点 B で水平荷重 P を受ける門形ラーメンの材端モーメントを求め、曲げモーメント図を描け。

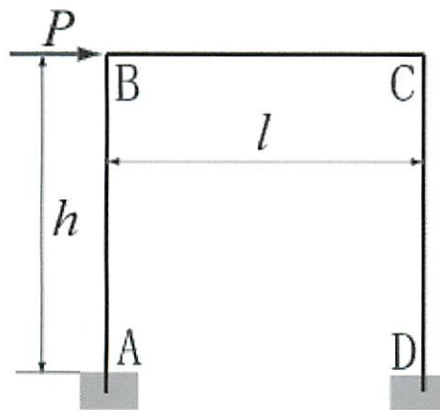


図 4.25

(4.3b) 図 4.26 に示す門形ラーメン ABCD の支点 D が、D から D' まで、与えられた量 δ だけ、鉛直に沈下するとき、各部材の材端モーメント、材端せん断力を求め、曲げモーメント図を描け。

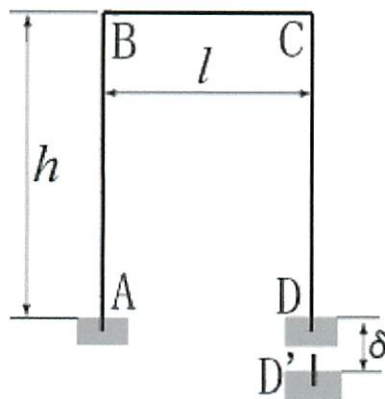


図 4.26

5章 マトリックス法 (コンピューターによる構造解析のための)

5.1 局所座標系と基準座標系で表したトラスの剛性方程式

トラスの個々の部材に都合が良いように取った座標系を、**局所座標系(local system)**といい、通常部材方向に \bar{x} 軸を、これと直角方向に \bar{y} 軸を取る。したがって局所座標系は一般に各部材ごとに異なる。

トラスの構造全体に都合がよいように取った座標系を、**基準座標系(reference system)**といい、 x 軸を水平右向きに、 y 軸を鉛直上向きに取ることが多い。基準座標系は、すべての部材に対して共通である。

局所座標系(部材 14 に対する)と基準座標系の一例を図 5.1 に示す。ここで節点 4 を局所座標系の原点、節点 3 を基準座標系の原点としている。

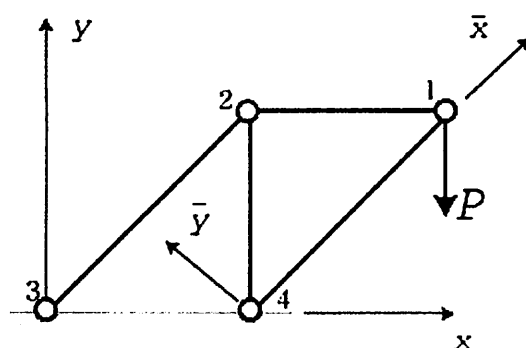


図 5.1

まず局所座標系で表したトラスの一つの部材の剛性方程式を求めよう。トラスの部材 12 の両端に作用する力は、図 5.2 に示すように、この部材方向すなわち \bar{x} 方向の力 \bar{X}_1, \bar{X}_2 である。したがって、この部材と直角方向すなわち \bar{y} 方向の力 \bar{Y}_1, \bar{Y}_2 は零である。また、両端の変位の \bar{x} 成分を \bar{u}_1, \bar{u}_2 とし、 y 成分を \bar{v}_1, \bar{v}_2 とする。単一棒の引張、圧縮ならば、 \bar{v}_1, \bar{v}_2 は零であるが、トラスの中の一部材の場合、 \bar{v}_1, \bar{v}_2 は一般に零でない。

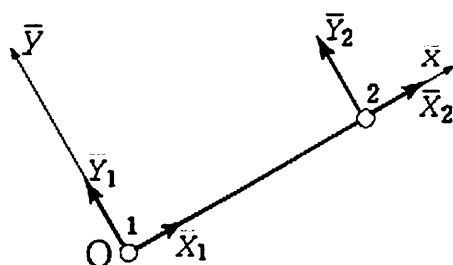


図 5.2

\bar{x} 方向だけで考えると剛性方程式は部材の断面積を A , 長さを L , 材料の縦弾性係数を E として, 付録 B 式(B.5)より

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

で与えられる. 式(5.1)に, $\bar{Y}_1 = 0, \bar{Y}_2 = 0, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ を追加し

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

と書くことができる. これがトラスの一つの部材の剛性方程式を局所座標系で書き表したものである. 右辺の 4 行 4 列のマトリックス

$$\bar{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

を局所座標系での剛性マトリックスという. また

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

を, 材端力と材端変位のベクトルという. 式(5.3), (5.4)を式(5.2)に代入し, 式(5.2)を簡単な形で

$$\bar{X} = \bar{K}\bar{u} \quad (5.5)$$

と書くことができる.

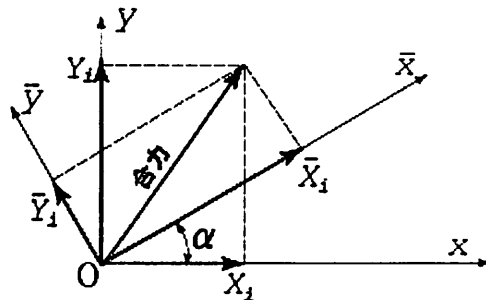


図 5.3

次に材端力の基準座標系成分 (X_i, Y_i) を局所座標系成分 (\bar{X}_i, \bar{Y}_i) に変換する座標変換を

考えよう。ここで、 $i=1,2$ である。また今の場合、 $\bar{Y}_i=0$ であるが、座標変換公式の誘導

に際しては \bar{Y}_i が一般的に零でない場合にも有効な形で誘導して置く。図 5.3 より

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= X_i \cos \alpha + Y_i \sin \alpha \\ \bar{Y}_i &= -X_i \sin \alpha + Y_i \cos \alpha\end{aligned}\tag{5.6}$$

ここで、 α は x 方向と \bar{x} 方向の間の角度である。

式(5.6)を $i=1,2$ に対して、マトリックス形で書くと

$$l = \cos \alpha, \quad m = \sin \alpha\tag{5.7}$$

として座標変換公式

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix}\tag{5.8}$$

を得る。ここで

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \end{Bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix}, \quad X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix}\tag{5.9}$$

と置くと、式(5.9)を式(5.8)に代入し、簡単に書いた座標変換公式

$$\bar{X} = TX\tag{5.10}$$

を得る。

T の転置マトリックス T' は、 T の逆マトリックスであることから*、式(5.10)両辺に T^{-1} すなわち T' を左から掛けて

$$X = T' \bar{X}\tag{5.11}$$

材端変位についても、局所座標系に関する材端変位ベクトル \bar{u} が式(5.4)第2式で与えられ、同様に基準座標系に関する材端変位ベクトルを

* $T'T = TT' = I$ (単位マトリックス) が容易に証明される。証明を試みられたい。この結果より $T^{-1} = T'$ であるから、 T は直交マトリックスである。関谷：工業数学解析、共立(1988), p.18 問題 1.3 参照。

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

とするとき、式(5.10)と同様

$$\bar{u} = Tu \quad (5.13)$$

が導かれる。式(5.11)右辺の \bar{X} に剛性方程式(5.5)を代入し、その結果にさらに式(5.13)を代入すると、基準座標系に対する剛性方程式

$$X = T' \bar{K} T u \equiv K u \quad (5.14)$$

を得る。ここで

$$K = T' \bar{K} T \quad (5.15)$$

は基準座標系に対する剛性マトリックスである。式(5.15)右辺に式(5.9)第2式、式(5.3)を代入して計算すると

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

となり、これが基準座標系に関する剛性マトリックスの具体的な表現である。式(5.16)を用いて、剛性方程式(5.14)を具体的に書けば

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

となる。

5.2 トラスの応力マトリックス

トラスの任意の部材 1-2 に対する内力 S_{1-2} は、引張力を正、圧縮力を負とした軸内力である。図 5.4 のように、部材 1-2 を途中で切断し、材端 2 の側の部分に働く力の釣り合いを考えると

$$S_{1-2} = \bar{X}_2 \quad (5.18)$$

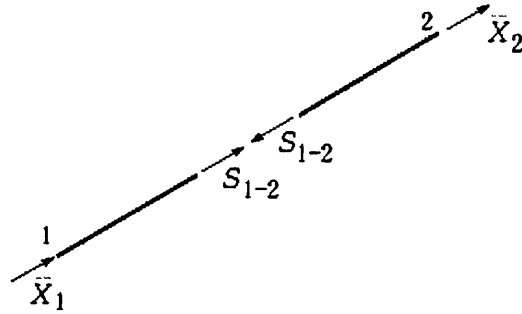


図 5.4

同様に、材端 1 の側の部分の力の釣り合いを考えると

$$S_{1-2} + \bar{X}_1 = 0 \quad \therefore \quad S_{1-2} = -\bar{X}_1 \quad (5.19)$$

となる。上式(5.19)は式(5.18)に部材 12 に対する力の釣り合い式 $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = 0$ を代入しても得られる。

式(5.6)第 1 式で $i = 2$ の場合を考えると式(5.7)より

$$\bar{X}_2 = X_2 \cos \alpha + Y_2 \sin \alpha = lX_2 + mY_2 \quad (5.20)$$

となる。右辺中の X_2, Y_2 は式(5.17)より

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{AE}{L} \{l^2(u_2 - u_1) + lm(v_2 - v_1)\} \\ Y_2 &= \frac{AE}{L} \{lm(u_2 - u_1) + m^2(v_2 - v_1)\} \end{aligned} \quad (5.21)$$

式(5.21)を式(5.20)に代入し、

$$l^2 + m^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

を用いると、式(5.18),(5.20),(5.21)より

$$\begin{aligned} S_{1-2} = \bar{X}_2 &= \frac{AE}{L} \left[l \{l^2(u_2 - u_1) + lm(v_2 - v_1)\} + m \{lm(u_2 - u_1) + m^2(v_2 - v_1)\} \right] \\ &= \frac{AE}{L} \{l(u_2 - u_1) + m(v_2 - v_1)\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

を得る。この式は、次のように理解して誘導することもできる。部材 1-2 の伸び Δ_{1-2} は

$$\Delta_{1-2} = l(u_2 - u_1) + m(v_2 - v_1) \quad (5.23)$$

となる。したがって、部材 1-2 のひずみ ε_{1-2} は

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{\Delta_{1-2}}{L} = \frac{1}{L} \{l(u_2 - u_1) + m(v_2 - v_1)\} \quad (5.24)$$

で与えられ、これより部材 1-2 の応力 σ_{1-2} は

$$\sigma_{1-2} = E\varepsilon_{1-2} = \frac{E}{L} \{l(u_2 - u_1) + m(v_2 - v_1)\} \quad (5.25)$$

となり, 内力 S_{1-2} は σ_{1-2} に 断面積 A を掛けて, 式(5.22)最右辺で与えられる. 内力の式(5.22)の最右辺は, 次のようにマトリックス表示できる:

$$S_{1-2} = \frac{AE}{L} (l \quad m) \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

部材 1-2 の代わりに任意の部材 $i-j$ を考えると, 部材 $i-j$ の内力 S_{i-j} は, 式(5.26)と同様

$$S_{i-j} = \left(\frac{AE}{L}\right)_{i-j} (l \quad m)_{i-j} \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

で与えられる. ここでは $(\quad)_{i-j}$ は部材 $i-j$ に対する (\quad) 内の量を示す. 式(5.27)右辺で, 部材 $i-j$ 両端の相対変位の列マトリックス $\{ \quad \}$ の前の行マトリックス

$$\left(\frac{AE}{L}\right)_{i-j} (l \quad m)_{i-j}$$

を, 部材 $i-j$ の応力マトリックス(stress matrix)という.

5.3 トラスの問題の解法

トラスの節点変位, 支点反力および部材内力を求める解法を例題によって説明する.

例題 5. 1 図 5.5 のトラスの節点 1 の変位, 節点 2, 3 での反力および部材 1-2, 1-3 の内力を求めよ. ここで, すべての部材の断面積を A , 材料の縦弾性係数を E とする.

(解) 部材 1-2 に対し, 方向余弦は*

$$l = -1, \quad m = 0 \quad (1)$$

$$\therefore l^2 = 1, \quad lm = 0, \quad m^2 = 0 \quad (2)$$

したがって部材 1-2 の剛性方程式は, 上式(2)を式(5.17)に代入し

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

この式を節点 3 の節点力 X_3, Y_3 と節点変位 u_3, v_3 まで含む全構造のスケールにまで拡張すると

* 部材 $i-j$ と書かれている場合, その方向余弦は, i から j に向かう方向 ($i \rightarrow j$) の方向余弦を考えることにする. このようにすると, l, m は部材 1-2 の方向 (1 \rightarrow 2 の方向) と x 軸の正方向との間の角度 180° の余弦と正弦をとり $l = \cos 180^\circ = -1, \quad m = \sin 180^\circ = 0$ となる.

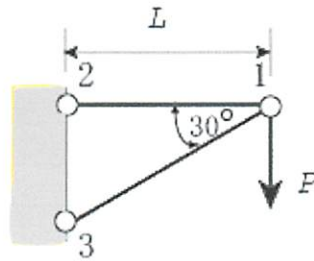


図 5.5

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{K}_{1-2}} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

部材 1-3 に対し

$$l = \cos 210 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad m = \sin 210 = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\therefore l^2 = \frac{3}{4}, \quad lm = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad m^2 = \frac{1}{4} \quad (6)$$

であるから、部材 1-3 の剛性方程式は、式(5.17)で添字 2 の代わりに 3 とし、 L の代わりに $2L/\sqrt{3}$ とし (部材 1-3 の長さは $2L/\sqrt{3}$ である)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{(2L/\sqrt{3})} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

となる。これらに、部材 1-3 に関係がない X_2 , Y_2 , u_2 , v_2 に関する行、列を加えて全構造のスケールに拡張すると

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}AE}{2L} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

右辺の6行6列のマトリックスの前の係数を式(4)と同じ AE/L として、 $\sqrt{3}/2$ をマトリックスの各要素に掛けると

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

K_{1-3}

構造全体の剛性マトリックスは

$$K = K_{1-2} + K_{1-3}$$

$$= \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (10)$$

したがって、構造全体の剛性方程式は

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = 0 \\ Y_1 = -P \\ \dots \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{array} \right\} = \frac{AE}{L} \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -1 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

この式を破線の所で部分マトリックスに分解し、節点 2, 3 では滑節で剛体壁に固定されていることから、 $u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0$ を考慮すると

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -P \end{array} \right\} = \frac{AE}{L} \left[\begin{array}{cc} 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{array} \right\} = \frac{AE}{L} \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \end{array} \right\} \quad (13)$$

式(12)を u_1, v_1 について解くと

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}PL}{AE}, \quad v_1 = -\frac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{PL}{AE} \quad (14)(答)$$

式(14)を式(13)に代入し、節点 2, 3 での反力は

$$\begin{aligned} X_2 &= -\frac{AE}{L} u_1 = -\frac{AE}{L} \frac{\sqrt{3}PL}{AE} = -\sqrt{3}P \\ Y_2 &= 0 \\ X_3 &= \frac{AE}{L} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} u_1 - \frac{3}{8} v_1 \right) \\ &= \frac{AE}{L} \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{\sqrt{3}PL}{AE} - \frac{3}{8} \left(-\frac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{PL}{AE} \right) \right\} \\ &= \sqrt{3}P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_3 &= \frac{AE}{L} \left(-\frac{3}{8}u_1 - \frac{\sqrt{3}}{8}v_1 \right) \\
 &= \frac{AE}{L} \left(-\frac{3}{8} \frac{\sqrt{3}PL}{AE} + \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{PL}{AE} \right) \\
 &= P
 \end{aligned} \tag{15}$$

部材 1-2 の内力 S_{1-2} は式(5.22)に式(1)すなわち $l = -1, m = 0$ を代入し、図 5.5 に見られる条件 $u_2 = 0$ を用いると得られ

$$S_{1-2} = \frac{AE}{L} \times (-1) \times (0 - u_1) = \frac{AE}{L} u_1 = \frac{AE}{L} \frac{\sqrt{3}PL}{AE} = \sqrt{3}P \tag{16} \text{ (答)}$$

となる。部材 1-3 の内力 S_{1-3} は、式(5.22)で、添え字 2 を 3 に変更し、 L の代わりに $(2L/\sqrt{3})$

を置き換え、式(5)すなわち $l = -\sqrt{3}/2, m = -1/2$ を代入し、図 5.5 に見られる条件 $u_3 = v_3 = 0$ を用いると、次のように求められる：

$$\begin{aligned}
 S_{1-3} &= \frac{AE}{(2L/\sqrt{3})} \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}(0 - u_1) - \frac{1}{2}(0 - v_1) \right\} = \frac{\sqrt{3}AE}{2L} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u_1 + \frac{1}{2}v_1 \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}AE}{2L} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}PL}{AE} - \frac{1}{2} \times \frac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \frac{PL}{AE} \right) = -2P \tag{17} \text{ (答)}
 \end{aligned}$$

Coffee Break

カナダ、ケベック市、セントローレンス河にかかるトラス橋、Le Pont de Quebec. 全長 987m, 幅 27m, 主スパン 603m, 河水面からの高さ 46m. ケベック市立 Laval 大学 A. Woinowsky-Krieger 教授(橋梁学)の好意による.



5. 4 両端だけで荷重を受けるはり要素の剛性マトリックスと応力マトリックス

図 5.6 のように、はり要素の両端 1, 2 に、はりの軸に垂直な集中力 Y_1, Y_2 , 集中偶力 M_1, M_2 が作用し、これらの両端にたわみ v_1, v_2 , たわみ角 θ_1, θ_2 が生じるとする。これらの集中力、集中偶力、たわみ、たわみ角の正方向は図 5.6 に示す方向とする。また、このはり要素の長さを図 5.6 のように L , はり要素の断面 2 次モーメントを I , 材料の縦弾性係数を E とする。このとき EI は曲げ剛性 (flexural rigidity, bending stiffness) である (付録 B, B4 節式 (B.10) の直後を参照)。また, x, y 座標の原点を左側断面 1 の図心にとり, 図 5.6 のように, x 軸を右向きに, y 軸を上向きに取る。

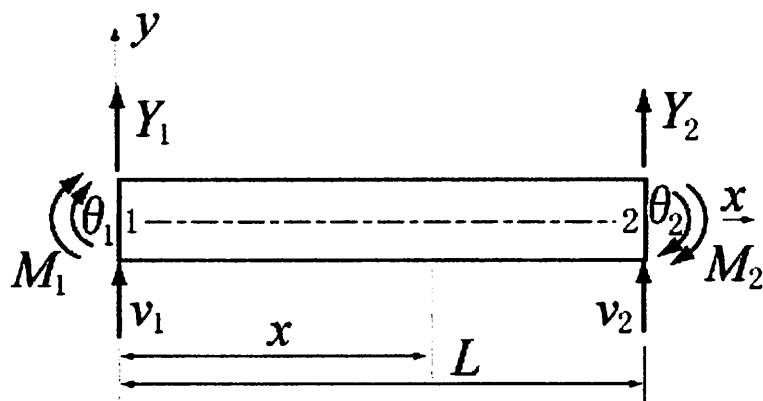


図 5.6

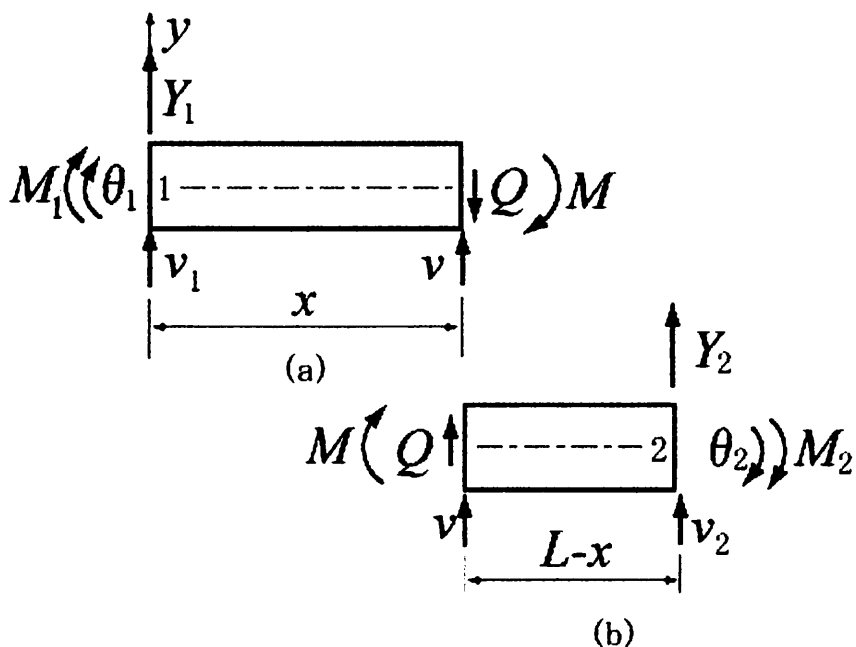


図 5.7

図 5.6 のはりの要素を座標 x の所で切断し、断面より左、右の部分をそれぞれ図 5.7(a), (b) に示す。座標 x の断面に作用するせん断力と曲げモーメントを図 5.7(a), (b) に Q, M で示し、同図に示す方向を Q, M の正方向とする。座標 x の点でのはりの y 方向のたわみを v とすると、はりの微小たわみの微分方程式は付録 B、式(B.9)より*

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (5.28)$$

で与えられる。

図 5.7(a) で座標 x の断面の図心まわりのモーメントの釣り合いより

$$M = M_1 + Y_1 x \quad (5.29)$$

式(5.29)を式(5.28)に代入すると

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI} (M_1 + Y_1 x) \quad (5.30)$$

この微分方程式(5.30)を二回続けて積分すると、積分定数を C_1, C_2 として

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} (M_1 x + Y_1 \frac{x^2}{2}) + C_1 \quad (5.31)$$

$$v = \frac{1}{EI} (M_1 \frac{x^2}{2} + Y_1 \frac{x^3}{6}) + C_1 x + C_2 \quad (5.32)$$

$x = 0$ で $dv/dx = \tan(-\theta_1) \approx -\theta_1$ であるから、式(5.31)より

$$C_1 = -\theta_1 \quad (5.33)$$

$x = 0$ で $v = v_1$ であるから、式(5.32)より

$$C_2 = v_1 \quad (5.34)$$

式(5.33), (5.34)を式(5.31), (5.32)に代入し

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} (M_1 x + Y_1 \frac{x^2}{2}) - \theta_1 \quad (5.35)$$

$$v = \frac{1}{EI} (M_1 \frac{x^2}{2} + Y_1 \frac{x^3}{6}) - \theta_1 x + v_1 \quad (5.36)$$

図 5.6 のはりの要素の右側の点 2 では、 $x = L$ で $dv/dx = -\theta_2, v = v_2$ であるから、式(5.35), (5.36)より

$$-\theta_2 = \frac{1}{EI} (M_1 L + Y_1 \frac{L^2}{2}) - \theta_1 \quad (5.37)$$

$$v_2 = \frac{1}{EI} (M_1 \frac{L^2}{2} + Y_1 \frac{L^3}{6}) - \theta_1 L + v_1 \quad (5.38)$$

図 5.5 のはりに作用する y 方向の力の釣り合いと、点 1 まわりのモーメントの釣り合いより

* 図 5.5 で y 軸の正方向は、図 B.7 での y 軸の正方向と逆向きであるため、しき(5.28)では、式(B.9)右辺の負号がない。

$$Y_1 + Y_2 = 0 \quad M_1 + M_2 = LY_2 \quad (5.39)$$

式(5.38), (5.37), (5.39)を, 力およびモーメントを含む項を左辺に, たわみおよびたわみ角を含む項を右辺に置くように整理すると

$$\frac{L^3}{6}Y_1 + \frac{L^2}{2}M_1 + 0 \times Y_2 + 0 \times M_2 = EI(-v_1 + L\theta_1 + v_2 + 0 \times \theta_2) \quad (5.40)$$

$$\frac{L^2}{2}Y_1 + LM_1 + 0 \times Y_2 + 0 \times M_2 = EI(0 \times v_1 + \theta_1 + 0 \times v_2 - \theta_2) \quad (5.41)$$

$$Y_1 + 0 \times M_1 + Y_2 + 0 \times M_2 = EI(0 \times v_1 + 0 \times \theta_1 + 0 \times v_2 + 0 \times \theta_2) \quad (5.42)$$

$$0 \times Y_1 + M_1 - LY_2 + M_2 = EI(0 \times v_1 + 0 \times \theta_1 + 0 \times v_2 + 0 \times \theta_2) \quad (5.43)$$

式(5.40), (5.41), (5.42), (5.43)をまとめてマトリックス形に書くと

$$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{2} & L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} -1 & L & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{2} & L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & L & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

式(5.44)右辺で

$$\begin{bmatrix} \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{2} & L & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -L & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{12}{L^4} \begin{bmatrix} -L & \frac{L^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{2} & -\frac{L^3}{6} & 0 & 0 \\ L & -\frac{L^2}{2} & \frac{L^4}{12} & 0 \\ \frac{L^2}{2} & -\frac{L^3}{3} & \frac{L^5}{12} & \frac{L^4}{12} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

であるから, 式(5.45)を式(5.44)右辺に代入して計算し

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

式(5.46)は、図 5.5 のはり要素の剛性方程式で、右辺の正方形マトリックス

$$K = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

を、図 5.6 のはり要素の剛性マトリックスという。

剛性方程式(5.46)は、次のように置き換えることができる：

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ \frac{M_1}{L} \\ Y_2 \\ \frac{M_2}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

この式は、個々のはり要素が同一の EI/L^3 を持つときに便利に用いることができる。

次にはり要素の内力について考えよう。ここではり要素の内力とは、図 5.7 に示すせん断力と曲げモーメントのことである。図 5.7 のはりの部分の力とモーメントの釣り合いより

$$\begin{aligned} Q &= Y_1 \\ M &= M_1 + Y_1 x \end{aligned} \quad (5.49)$$

この式中の Y_1, M_1 とは式(5.46)より

$$\begin{aligned} Y_1 &= EI \left(\frac{12}{L^3} v_1 - \frac{6}{L^2} \theta_1 - \frac{12}{L^3} v_2 - \frac{6}{L^2} \theta_2 \right) \\ M_1 &= EI \left(-\frac{6}{L^2} v_1 + \frac{4}{L} \theta_1 + \frac{6}{L^2} v_2 + \frac{2}{L} \theta_2 \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

式(5.50)を式(5.49)に代入して

$$\begin{aligned}
 Q &= EI\left(\frac{12}{L^3}v_1 - \frac{6}{L^2}\theta_1 - \frac{12}{L^3}v_2 - \frac{6}{L^2}\theta_2\right) \\
 M &= EI\left\{\left(\frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2}\right)v_1 + \left(-\frac{6}{L^2}x + \frac{4}{L}\right)\theta_1 + \left(-\frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^2}\right)v_2 + \left(-\frac{6}{L^2}x + \frac{2}{L}\right)\theta_2\right\}
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

この式を、マトリックス形に書くと

$$\begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{4}{L} & -\frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{5.52}$$

上式右辺の2行4列のマトリックスをその前の EI も含めて S と置き、これをはり要素の応力マトリックス(stress matrix)という。

5. 5 集中荷重を受けるはり

(a) はり要素の集合体の剛性マトリックス

図 5.7 のような二つのはりの要素からなる要素の集合を考えよう。節点 1, 2, 3 での y 方向の集中荷重を Y_1, Y_2, Y_3 、時計方向の集中偶力を M_1, M_2, M_3 とし、 y 方向のたわみを v_1, v_2, v_3 、時計方向のたわみ角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とする。図 5.8 のはり要素の集合体の剛性方程式は

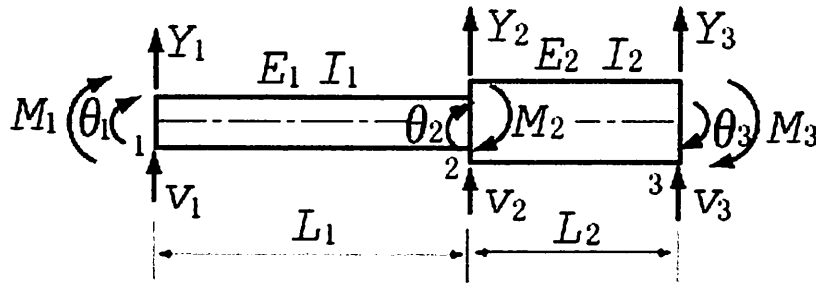


図 5.8

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = K \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{5.53}$$

の形で与えられる。ここで K は、図 5.8 のはり要素の集合体の剛性マトリックスである。

第2章, 第3章の場合と同様, K は集合体のスケールまで拡大した要素 1-2, 2-3 の剛性マトリックス K_{1-2} , K_{2-3} を合成して

$$K = K_{1-2} + K_{2-3} \quad (5.54)$$

として求められる. ここで式(5.47)より

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{12E_1I_1}{L_1^3} & -\frac{6E_1I_1}{L_1^2} & -\frac{12E_1I_1}{L_1^3} & -\frac{6E_1I_1}{L_1^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6E_1I_1}{L_1^2} & \frac{4E_1I_1}{L_1} & \frac{6E_1I_1}{L_1^2} & \frac{2E_1I_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12E_1I_1}{L_1^3} & \frac{6E_1I_1}{L_1^2} & \frac{12E_1I_1}{L_1^3} & \frac{6E_1I_1}{L_1^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6E_1I_1}{L_1^2} & \frac{2E_1I_1}{L_1} & \frac{6E_1I_1}{L_1^2} & \frac{4E_1I_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12E_2I_2}{L_2^3} & -\frac{6E_2I_2}{L_2^2} & -\frac{12E_2I_2}{L_2^3} & -\frac{6E_2I_2}{L_2^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6E_2I_2}{L_2^2} & \frac{4E_2I_2}{L_2} & \frac{6E_2I_2}{L_2^2} & \frac{2E_2I_2}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12E_2I_2}{L_2^3} & \frac{6E_2I_2}{L_2^2} & \frac{12E_2I_2}{L_2^3} & \frac{6E_2I_2}{L_2^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6E_2I_2}{L_2^2} & \frac{2E_2I_2}{L_2} & \frac{6E_2I_2}{L_2^2} & \frac{4E_2I_2}{L_2} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

以上は, 二つのはりの要素からなる集合体の場合であるが, 三つ以上 (一般に n 個) のはり要素から成る集合体の場合も全く同様に扱うことができる.

(b) 簡単な例題

例題 5. 2 図 5.9 のはりの節点変位 $v_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3$, 反力 Y_2, Y_3 , 要素 1-2, 2-3 内任意点のせん断力 Q 曲げモーメント M を求めよ. ただし, はりの全長にわたり, 材料の縦弾性係数を E 断面二次モーメントを I とする.

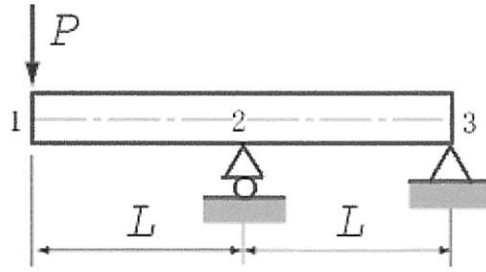


図 5.9

(解) 要素 1-2, 2-3 について EI/L^3 が共通であるので, 式(5.48)より要素 1-2 に対し, 剛性方程式を全構造のスケールまで拡大して書けば, 式(5.48)より

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ \frac{L}{L} \\ Y_2 \\ M_2 \\ \frac{L}{L} \\ Y_3 \\ M_3 \\ \frac{L}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \\ v_3 \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \quad (1)$$

同様に要素 2-3 に対する剛性方程式も式(5.48)より

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ \frac{L}{L} \\ Y_2 \\ M_2 \\ \frac{L}{L} \\ Y_3 \\ M_3 \\ \frac{L}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \\ v_3 \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式(1), (2)を合成して, 全構造に対する剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ \frac{L}{L} \\ Y_2 \\ M_2 \\ \frac{L}{L} \\ Y_3 \\ M_3 \\ \frac{L}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \\ v_3 \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \quad (3)$$

この剛性方程式で、行と列の交換により未知変位に関する行を上、既知変位に関する行を下に、他方未知変位に関する列を左に、既知変位に関する列を右に移すと、式(3)を次のように書き替えることができる。

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ \frac{L}{L} \\ M_2 \\ \frac{L}{L} \\ M_3 \\ \frac{L}{L} \\ \text{---} \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -6 & 0 & | & -12 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 0 & | & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 8 & 2 & | & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & | & -6 & 6 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ -12 & 6 & 0 & -6 & | & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & | & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ \theta_2 L \\ \theta_3 L \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

図 5.8 のように節点 1 で荷重 P が y 軸の負方向に作用しているから、 $Y_1 = -P$ であり点 1, 2, 3 に外力として偶力は作用していないから、 $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ である。したがって式(4)から未知変位 $v_1, \theta_1 L, \theta_2 L, \theta_3 L$ に関する連立 1 次代数方程式

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -6 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ \theta_2 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

を得る。この式の第 4 式より

$$\theta_3 L = -\frac{1}{2} \theta_2 L \quad (6)$$

式(6)を式(5)の第 3 行に代入し

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -6 \\ -6 & 4 & 2 \\ -6 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL^3}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式(7)より

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \theta_1 L = \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \quad \theta_2 L = \frac{\Delta_3}{\Delta_0} \quad (8)$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 12 & -6 & -6 \\ -6 & 4 & 2 \\ -6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 12 \times 4 \times 7 + (-6) \times 2 \times (-6) \\ + (-6) \times (-6) \times 2 - (-6) \times 4 \times (-6) \\ - 2 \times 2 \times 12 - 7 \times (-6) \times (-6) \end{matrix} = 36 \quad (9)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{PL^3}{EI} & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{PL^3}{EI} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{24PL^3}{EI} \quad (10)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -\frac{PL^3}{EI} & -6 \\ -6 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \frac{PL^3}{EI} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{30PL^3}{EI} \quad (11)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & -6 & -\frac{PL^3}{EI} \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{PL^3}{EI} \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{12PL^3}{EI} \quad (12)$$

式(9), (10), (11), (12)を式(8)に代入し, さらに式(6)を用いて

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{2PL^3}{3EI}, & \theta_1 &= -\frac{5PL^2}{6EI} \\ \theta_2 &= -\frac{PL^2}{3EI}, & \theta_3 &= \frac{PL^2}{6EI} \end{aligned} \quad (\text{答}) \quad (13)$$

支点 2, 3 では鉛直変位 (たわみ) は零で

$$v_2 = v_3 = 0 \quad (14)$$

式(13), (14)を式(4)の第 5 行, 第 6 行に代入し, 支点 2, 3 での反力は

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{EI}{L^3} \left\{ -12 \times \left(-\frac{2PL^3}{3EI} \right) + 6 \times \left(-\frac{5PL^3}{6EI} \right) - 6 \times \frac{PL^3}{6EI} \right\} = 2P \\ Y_3 &= \frac{EI}{L^3} \left\{ 6 \times \left(-\frac{PL^3}{3EI} \right) + 6 \times \frac{PL^3}{6EI} \right\} = -P \end{aligned} \quad (\text{答}) \quad (15)$$

次に要素 1-2, 2-3 の内力 (要素内任意点のせん断と曲げモーメント) を求めよう. 要素 1-2 に対して, 点 1 から x の距離にある要素内任意点のせん断力 Q , 曲げモーメント M は, 式(5.52)から求められる. この式中の $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ は式(13)からの値と支点でのたわみ零の条件 (式(14)) $v_2 = v_3 = 0$ を代入し

$$\begin{aligned}
Q &= EI \left\{ \frac{12}{L^3} \times \left(-\frac{2PL^3}{3EI} \right) - \frac{6}{L^2} \times \left(-\frac{5PL^2}{6EI} \right) - \frac{6}{L^2} \times \left(-\frac{PL^2}{3EI} \right) \right\} = -P \\
M &= EI \left\{ \left(\frac{12}{L^3} x - \frac{6}{L^2} \right) \times \left(-\frac{2PL^3}{3EI} \right) + \left(-\frac{6}{L^2} x + \frac{4}{L} \right) \times \left(-\frac{5PL^2}{6EI} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{6}{L^2} x + \frac{2}{L} \right) \times \left(-\frac{PL^2}{3EI} \right) \right\} = -Px
\end{aligned} \tag{16}$$

要素 2-3 に対して、点 2 から x の距離にある要素内任意点のせん断力 Q 、曲げモーメント M は、式(5.52)で $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$ の代わりに $v_2, \theta_2, v_3, \theta_3$ とした

$$\begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{12}{L^3} x - \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2} x + \frac{4}{L} & -\frac{12}{L^3} x + \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2} x + \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

から求められる。この式中の θ_2, θ_3 に式(13)からの値を代入し、 v_2, v_3 に支点 2, 3 でたわみ零の条件 (式(14)) $v_2 = v_3 = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned}
Q &= EI \left\{ -\frac{6}{L^2} \times \left(-\frac{PL^2}{3EI} \right) - \frac{6}{L^2} \times \frac{PL^2}{6EI} \right\} = P \\
M &= EI \left\{ \left(-\frac{6}{L^2} x + \frac{4}{L} \right) \times \left(-\frac{PL^2}{3EI} \right) + \left(-\frac{6}{L^2} x + \frac{2}{L} \right) \times \frac{PL^2}{6EI} \right\} = P(x-L)
\end{aligned} \tag{18}$$

【参考】この例題の結果は、材料力学の方法によって得られる結果と一致する。

5.6 分布荷重を受けるはり

(a) 等分布荷重の集中荷重による近似的置き換えによる解法

図 5.10(a)のように、全長にわたり、単位長さ当り q の等分布荷重を受ける、長さ l のはり要素を考えよう。このはり要素の全長 l を n 等分し ($L = l/n$)、両端および等分点を節点とする。図 5.10(a)は $n = 5$ 、すなわちはり要素の全長を 5 等分したときを一例として示す。他の数に等分したときも、全く同様である。節点 1 と 2, 2 と 3, ..., 5 と 6 の中央に同図の破線で示す鉛直線 $1', 2', \dots, 5'$ を考え、1 と $1'$, $1'$ と $2'$, $2'$ と $3'$, ..., $4'$ と $5'$, $5'$ と 6 の間の分布荷重の合力を、それらの区間の分布荷重の図心 $1'', 2, 3, 4, 5, 5''$ に作用させると、同図(b)となる。いま、両端の節点 1, 6 に図心 $1'', 5''$ に作用する力 $qL/2$ と同じ大きさで、方向相反する力を作用させると、同図(c)となり、方向相反する力は、打消し合って、無いのと同じであるから、同図(b)と(c)は、同じ荷重状態を表す。この図(c)で、図心 $1'', 5''$ に作用する下向きの力 $qL/2$ と、節点 1, 6 に作用する上向きの力 $qL/2$ は、腕の長さ $L/4$ の偶力を形成し、そのモーメントの大きさは

$$\frac{qL}{2} \times \frac{L}{4} = \frac{qL^2}{8}$$

であるから、図(c)の状態は、図(d)のように、節点1に下向き集中荷重 $qL/2$ と、時計向き集中偶力 $qL^2/8$ 、節点2~5に下向き集中荷重 qL 、節点6に下向き集中荷重 $qL/2$ と反時計向き集中偶力 $qL^2/8$ を受ける状態と等価となる。この図(d)が、等分布荷重を近似的に集中荷重で置き換えた状態であり、節点*i*に作用する上向きを正とする集中荷重を Y_i 、時計方向を正とする偶力を M_i とすると、図4.11(a)の等分布荷重は、同図(d)の集中荷重系、すなわち

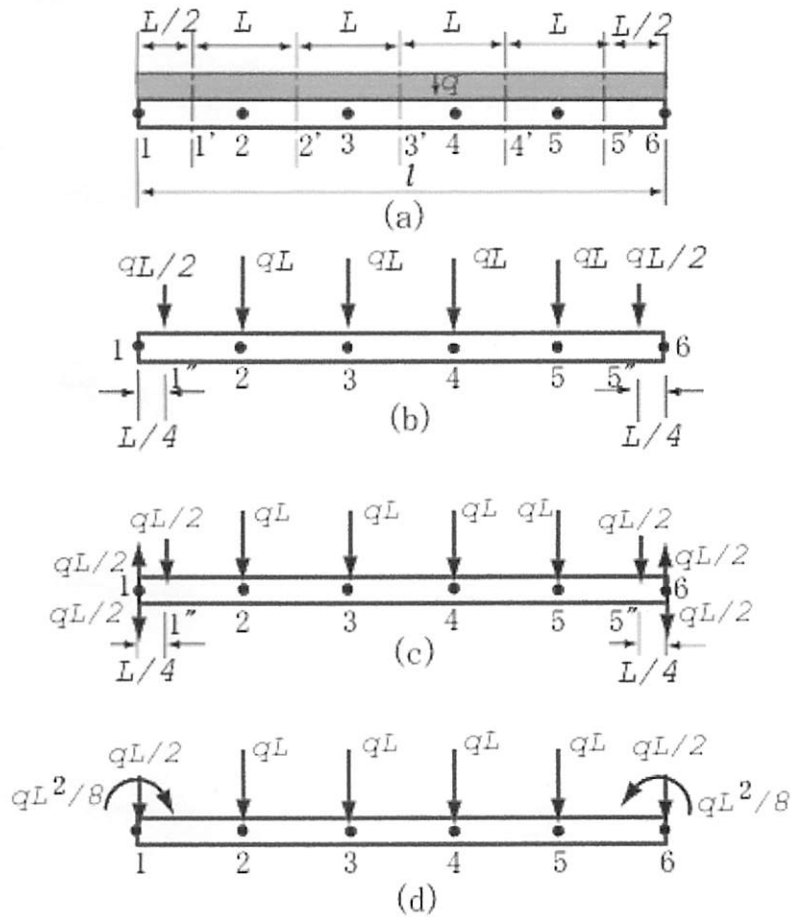


図 5.10

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= -qL/2, & M_1 &= qL^2/8 \\ Y_2 &= -qL, & M_2 &= 0 \\ Y_3 &= -qL, & M_3 &= 0 \\ Y_4 &= -qL, & M_4 &= 0 \\ Y_5 &= -qL, & M_5 &= 0 \\ Y_6 &= -qL/2, & M_6 &= -qL^2/8 \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

で近似的に置き換えられる。

5.7 任意方向のはり要素の剛性マトリックス

図 5.10(a)のように、任意方向を向いたはり要素 1-2 に沿って1→2方向に \bar{x} 軸を、節点 1 で \bar{x} 軸に直角に \bar{y} 軸をとる。座標系 1- \bar{x}, \bar{y} は図 5.2 で説明したのと同様な局所座標系 (local system)である。これとは別に、図 5.10(b)のように、構造全体に好都合な基準座標系 (reference system) $O-x, y$ を取る (同図(a)では破線で示してある)。 \bar{x} 軸正方向と x 軸正方向の間の角度を、図 5.10 のように α とすると、基準座標系に対する要素 1-2 (あるいは \bar{x} 軸)の方向余弦は

$$l = \cos \alpha, \quad m = \sin \alpha \quad (5.58)$$

となる。

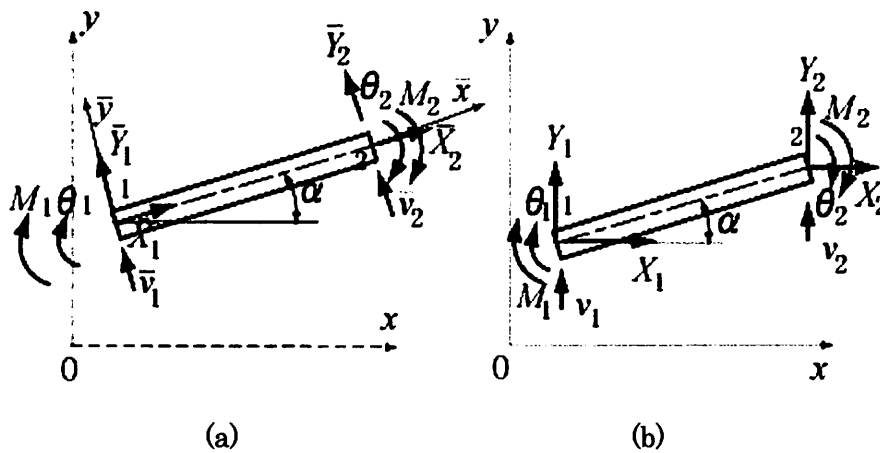


図 5.11

要素端 i ($i=1,2$)に作用する力と偶力の \bar{x}, \bar{y} 座標系に関する成分 $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{M}_i$ と x, y 座標系に関する成分 X_i, Y_i, M_i の関係は、式(5.6)と同様

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= X_i \cos \alpha + Y_i \sin \alpha = X_i l + Y_i m \\ \bar{Y}_i &= -X_i \sin \alpha + Y_i \cos \alpha = -X_i m + Y_i l \\ \bar{M}_i &= M_i \end{aligned} \quad (5.59)$$

となる。式(5.59)で $i=1,2$ の場合を考え、これらをマトリックス形に書き表すと

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{Y}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}}_{\bar{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}}_X \quad (5.60)$$

あるいは

$$\bar{X} = TX \quad (5.61)$$

となる。

節点での変位成分は、図 5.11 と式(5.60)で $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{M}_i, X_i, Y_i, M_i$ の代わりに

$\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\theta}_i, u_i, v_i, \theta_i (i=1,2)$ とし

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}, \quad U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

と置けば

$$\bar{U} = TU \quad (5.63)$$

はり要素 1-2 に対する剛性方程式を、局所座標系を用いて書けば

$$\bar{X} = \bar{K}U \quad (5.64)$$

となり、ここで \bar{K} は、式(5.3), (5.47)を合成した次式で与えられる

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

式(5.61), (5.63)を式(5.64)に代入し

$$TX = \bar{K}TU$$

$$\therefore X = T^{-1}\bar{K}TU$$

となる. $T^{-1} = T'$ であるから, この最後の式は

$$X = T' \bar{K}TU$$

となる. ここで

$$K = T' \bar{K}T \quad (5.66)$$

と置けば, 上式は

$$X = KU \quad (5.67)$$

となる.

式(5.64)は局所座標系によるはり要素 1-2 の剛性方程式, 式(5.67)は基準座標系によるはり要素 1-2 の剛性方程式である. K は基準座標系によるはり要素 1-2 の剛性マトリックスであり, 式(5.66)に式(5.60)で見られる T の具体的な内容と式(5.65)を代入して, 次式で与えられる:

$$K = \frac{E}{L} \times$$

u_1	v_1	θ_1	u_2	v_2	θ_2
$Al^2 + \frac{12I}{L^2}m^2$	$(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$\frac{6I}{L}m$	$-(Al^2 + \frac{12I}{L^2}m^2)$	$-(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$\frac{6I}{L}m$
$(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$Am^2 + \frac{12I}{L^2}l^2$	$-\frac{6I}{L}l$	$-(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$-(Am^2 + \frac{12I}{L^2}l^2)$	$-\frac{6I}{L}l$
$\frac{6I}{L}m$	$-\frac{6I}{L}l$	$4I$	$-\frac{6I}{L}m$	$\frac{6I}{L}l$	$2I$
$-(Al^2 + \frac{12I}{L^2}m^2)$	$-(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$-\frac{6I}{L}m$	$Al^2 + \frac{12I}{L^2}m^2$	$(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$-\frac{6I}{L}m$
$-(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$-(Am^2 + \frac{12I}{L^2}l^2)$	$\frac{6I}{L}l$	$(A - \frac{12I}{L^2})lm$	$Am^2 + \frac{12I}{L^2}l^2$	$\frac{6I}{L}l$
$\frac{6I}{L}m$	$-\frac{6I}{L}l$	$2I$	$-\frac{6I}{L}m$	$\frac{6I}{L}l$	$4I$

(5.68)

5.8 ラーメンの解法

今後例題によって、ラーメンの問題の解法を説明しよう。

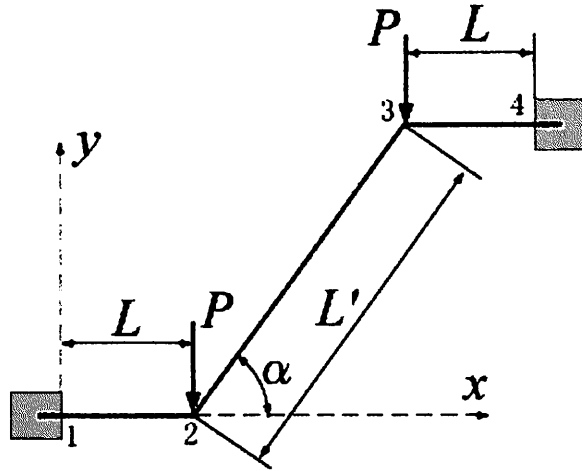


図 5.12

例題 5.3 階段状ラーメン

図 5.12 に示すように、部材相互の剛節点 2, 3 に、鉛直下向き荷重 P を受ける階段状ラーメンを考えよう。節点 1, 4 では、水平要素 1-2, 3-4 がそれぞれ点 1, 4 で鉛直剛体壁に剛接されている。

各要素の軸方向の剛性（引張または圧縮の剛性）を無視し、各要素の断面積を A 、要素材料の縦弾性係数を E 、断面 2 次モーメントを I 、各要素の長さを、図 5.12 のように L および L' とする。軸方向の剛性 AE/L または AE/L' を零と仮定する（断面積 A は零であるが、断面 2 次モーメント I は零でない）と仮定する。要素 1-2 の剛性マトリックスは、式(5.68)

で $l=1, m=0, A=0$ として

$$K_{1-2} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \quad (1)$$

で与えられる。

要素 2-3 の剛性マトリックスは、式(5.68)で、 $l = \cos \alpha$ 、 $m = \sin \alpha$ 、 $A=0$ 、 L の代わりに L' として求められる。ここで $\alpha = 45^\circ$ と仮定すると、 $l = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ 、 $m = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ となるので、これを用いることにする。このようにして

$$K_{2-3} = EI \begin{bmatrix} \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{6}{L^3} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ -\frac{6}{L^3} & \frac{6}{L^3} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^3} & \frac{6}{L^3} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{6}{L^3} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{matrix} \quad (2)$$

を得る。

要素 3-4 の剛性マトリックスは、要素 1-2 の剛性マトリックスと同じで、次式で与えられる。

$$K_{3-4} = EI \begin{bmatrix} u_3 & v_3 & \theta_3 & u_4 & v_4 & \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{matrix} \quad (3)$$

以上の各要素 1-2, 2-3, 3-4 の剛性マトリックス K_{1-2} , K_{2-3} , K_{3-4} を全構造のスケールに拡大し ($u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3, u_4, v_4, \theta_4$ に対応する行と列が存在するよう, 零なる要素を補って), これらのマトリックスを加え合わせ, 全構造の剛性マトリックス K を得る。すなわち

$$K = K_{1-2} + K_{2-3} + K_{3-4} \quad (4)$$

この K のうち未知変位 $u_2, v_2, \theta_2, u_3, v_3, \theta_3$ に対応する行と列だけを取り出して, 剛性方程式を書けば, 境界条件

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0 \quad (5)$$

を用いて, 次式を得る:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 \\ \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{6}{L^3} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ -\frac{6}{L^3} & \frac{12}{L^3} + \frac{6}{L^3} & \frac{6}{L^2} - \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{4}{L} + \frac{4}{L} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{6}{L} + \frac{6}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{3\sqrt{2}}{L} \\ -\frac{6}{L^3} & \frac{6}{L^3} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^3} & \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{12}{L^3} + \frac{6}{L^3} & -\frac{6}{L^2} + \frac{3\sqrt{2}}{L^2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{3\sqrt{2}}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{3\sqrt{2}}{L^2} & \frac{4}{L} + \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(6)に適用できる対称条件は, 図 5.13 のように

$$u_3 = -u_2, \quad v_3 = v_2, \quad \theta_3 = -\theta_2 \quad (7)$$

であるので、式(7)を式(6)に代入すると

$$\begin{aligned} X_2 &= -X_3 = \frac{12EI}{L^3}u_2 \\ Y_2 &= EI\left(-\frac{12}{L^3}u_2 + \frac{12}{L^3}v_2 + \frac{6}{L^2}\theta_2\right) \\ Y_3 &= EI\left(\frac{12}{L^3}u_2 + \frac{12}{L^3}v_2 + \frac{6}{L^2}\theta_2\right) \\ M_2 &= EI\left\{\frac{6\sqrt{2}}{L^2}u_2 + \frac{6}{L^2}v_2 + \left(\frac{4}{L} + \frac{2}{L'}\right)\theta_2\right\} \\ M_3 &= EI\left\{\frac{6\sqrt{2}}{L^2}u_2 - \frac{6}{L^2}v_2 - \left(\frac{4}{L} + \frac{2}{L'}\right)\theta_2\right\} \end{aligned} \quad (8)$$

節点2, 3には、外部からx方向の力(x方向の外力)は加わっていないから

$$X_2 = X_3 = 0 \quad (9)$$

式(9)を式(8)第1式に代入し

$$u_2 = 0 \quad (10)$$

式(10)を式(8)第2～5式に代入し

$$\begin{aligned} Y_2 = Y_3 &= EI\left(\frac{12}{L^3}v_2 + \frac{6}{L^2}\theta_2\right) \\ M_2 = -M_3 &= EI\left\{\frac{6}{L^2}v_2 + \left(\frac{4}{L} + \frac{2}{L'}\right)\theta_2\right\} \end{aligned} \quad (11)$$

節点2, 3に、y方向に作用する外力は、図5.3より

$$Y_2 = Y_3 = -P \quad (12)$$

また、節点2, 3には外部から集中偶力を加えていないから

$$M_2 = M_3 = 0 \quad (13)$$

式(12), (13)を式(11)に代入し

$$\begin{aligned} \frac{12}{L^3}v_2 + \frac{6}{L^2}\theta_2 &= -\frac{P}{EI} \\ \frac{6}{L^2}v_2 + \left(\frac{4}{L} + \frac{2}{L'}\right)\theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)を未知変位 v_2 , θ_2 について解けば

$$v_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad \theta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_0} \quad (15)$$

ここで

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} + \frac{2}{L'} \end{vmatrix} = \frac{12}{L^3} \left(\frac{1}{L} + \frac{2}{L'} \right) \quad (16_1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{P}{EI} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{4}{L} + \frac{2}{L'} \end{vmatrix} = -\frac{2P}{EI} \left(\frac{2}{L} + \frac{1}{L'} \right) \quad (16_2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{P}{EI} \\ \frac{6}{L^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{6P}{EIL^2} \quad (16_3)$$

式(16_{1,2,3})を式(15)に代入し、節点2のy方向の変位 v_2 と回転 θ_2 は、次式で与えられる

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{PL^3(L+2L')}{6EI(2L+L')} \\ \theta_2 &= \frac{PL^2L'}{2EI(2L+L')} \end{aligned} \quad (17)$$

以上で v_2 、 θ_2 が得られると、 v_3 、 θ_3 は、式(7)から容易に求められる。

節点1、2の曲げモーメントを求めるには、要素1-2の剛性方程式を式(1)より次式の形に書いたものを用いる：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

この式の3行目と6行目に、式(10)と境界条件(5)を用いると

$$\begin{aligned} M_1 &= EI \left(\frac{6}{L^2} v_2 + \frac{2}{L} \theta_2 \right) \\ M_2 &= EI \left(\frac{6}{L^2} v_2 + \frac{4}{L} \theta_2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)に式(17)を代入すれば、 M_1, M_2 を得る。 M_3, M_4 も全く同様に求められる。

5章の演習問題

[A]

(5.1a) 図 5.13 のトラスの節点 1 の変位、節点 2, 3 の反力および部材 1-2, 1-3 の内力を求めよ。ここで、すべての部材の断面積を A 、材料の縦弾性係数を E とする。

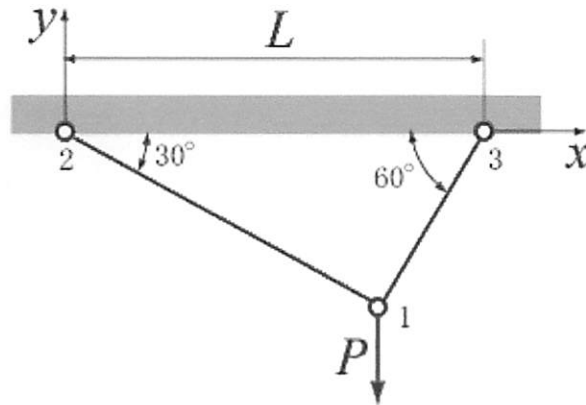


図 5.13

(5.2a) 図 5.14 に示す不静定トラスの節点 3, 4 の変位、支点 1, 2 の反力、部材 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4 の内力を求めよ。ここで、すべての部材の断面積を A 、縦弾性係数を E とする。

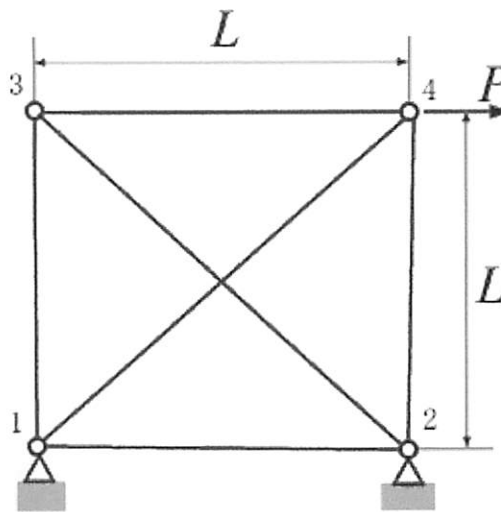


図 5.14

(5.3a) 図 5.15 に示すように、スパン $2L$ の両端固定はりの中央に集中荷重 P を受けるとき、荷重点の変位 (たわみとたわみ角)、両端の反力 (反力と反偶力) をマトリックス法で求め、このはりのせん断力図と曲げモーメント図を描け。

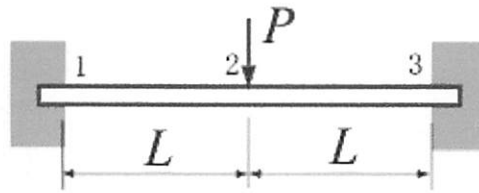


図 5.15

(5.4a) 図 5.16 の門形ラーメンの節点変位、曲げモーメントを求めよ。ここで簡単のため、 $h = L$, $I_1 = 2I_2 \equiv 2I$, $AE/L = 0$ (A = 部材の断面積、 E = ラーメン材料の縦弾性係数) と仮定して計算せよ。

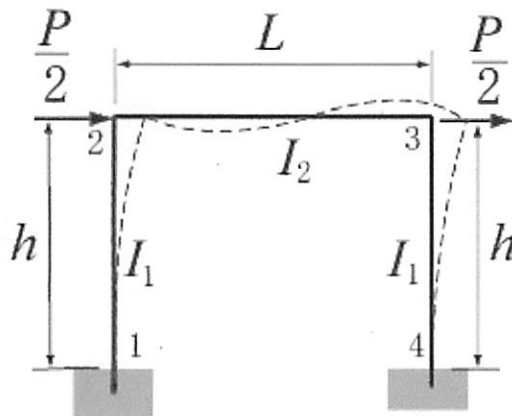


図 5.16

[B]

(5.1b) 図 5.17 のトラスの節点 2, 3 の変位、節点 1, 4 の反力および、すべての部材の内力をマトリックス法で求めよ。全部材の断面積を A 、縦弾性係数を E とする。

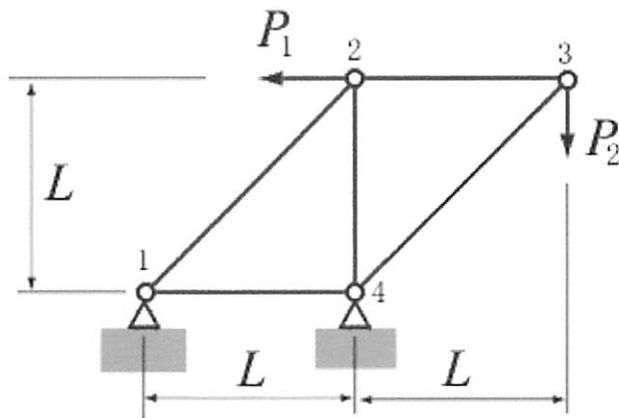


図 5.17

(5.2b) 図 5.18 に示す不静定トラスの節点 1 の変位、支点 2, 3, 4, の反力、全部材の内力を求めよ。全部材の断面積を A , 縦弾性係数を E とする。

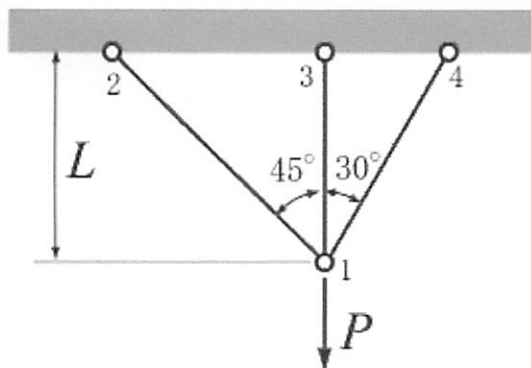


図 5.18

(5.3b) 図 5.19 に示すように、スパン $2L$ の両端固定はりの中央に集中偶力 M_0 を受けるとき、荷重点の変位（たわみとたわみ角）、両端の反力（反力と反偶力）を求め、このはりのせん断力図、曲げモーメント図を求めよ。

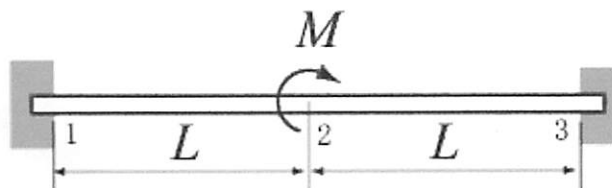


図 5.19

(5.4b) 問題(4.3b) (図 4.26) を本章のマトリックス法で解け。ここで簡単のため $l = h \equiv L$, 各部材の軸方向の伸縮変形を無視し $AE/L = 0$ (A = 部材の断面積、 E = ラーメン材料の縦弾性係数) と仮定する。また節点 A, B, C, D の代わりに節点 1, 2, 3, 4 とする。

[注] 各部材の軸方向の変形を無視し、剛性方程式中で、部材の軸方向変形に関する項を除外するため、 $AE/L = 0$ と置く。

付録 A 静力学の必要事項

A.1 力の合成と分解

(a) 力の表し方

図 A.1 のように、物体の一点 O に力 F が作用するとき、その力の (i) 大きさ、(ii) 方向、(iii) 力が作用する点 (作用点) が重要で、これらを力の三要素という。図 A.1 に矢印で示した力 F のように、大きさと方向を持つ量を、ベクトル (ベクトル量) という。以後ベクトルを、アルファベットの太文字 (ゴシック体) で表すことにする。またベクトル F の大きさだけを表すには、 $|F|$ または F に対応する細文字 F で表す。力のベクトルを含む直線を、力の作用線という。

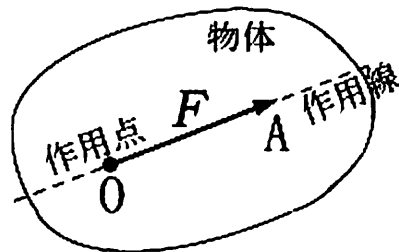


図 A.1

(b) 一点に作用する力の合成

図 A.2 のように、物体の一点 O に作用する二つの力 F_1 、 F_2 を、これらと同じ効果を持つ一つの力すなわち合力 F に置き換えることができる。この置き換えを力の合成という。力 F_1 、 F_2 を合成するには、図 A.2 のように、力のベクトル F_1 、 F_2 を二辺とする平行四辺形 $OACB$ の対角線 OC を、合力のベクトル F とすればよい。この平行四辺形 $OACB$ を力の平行四辺形という。

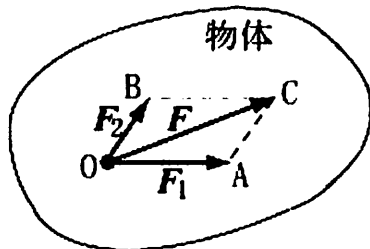


図 A.2

力の作用点を問題にせず、合力のベクトル F だけを求めたい場合は、力の平行四辺形の代りに、図 A.2 中の三角形 OAC または三角形 OBC を描けばよい。これらを力の三角形という。これらの力の三角形を改めて図 A.3 に示す。図 A.3(a) では、ベクトル F_1 の先端にベ

クトル F_2 を継ぎ足し、ベクトル F_1 の出発点 O からベクトル F_2 の先端 C に向かって線分 OC を描きこれを合力のベクトル F としている。これを“ベクトル F_1 にベクトル F_2 を加えた和はベクトル F である”という（“ベクトルの和” または “ベクトルの加法” の定義）。

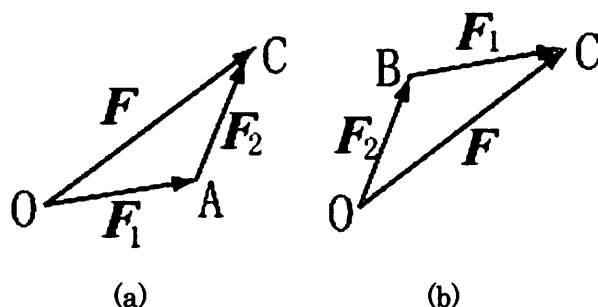


図 A.3

同様に図 A.3(b)は、図 A.2 の三角形 OBC に相当し、“ベクトル F_2 にベクトル F_1 を加えた和はベクトル F である”ことを表している。このことを式で書けば

$$F = F_1 + F_2 = F_2 + F_1 \quad (\text{A.1})$$

となる。



(ベクトルの加法での交換の法則)

(c) ベクトルの実数倍

k を実数、 F をベクトルとすると、 kF とはベクトル F の $|k|$ 倍の大きさを持ち、 $k > 0$ ならば F と同じ方向、 $k < 0$ ならば F と反対方向のベクトル、 $k = 0$ ならば零ベクトル

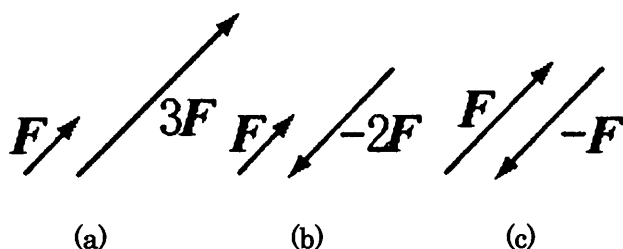


図 A.4

(大きさ 0 のベクトル) と定義する。したがって、例えば図 A.4(a) のように、 $3F$ は大きさが $3|F|$ で、方向は、 F と同方向のベクトル、同図(b) のように $-2F$ は大きさが $2|F|$ で、方向が F と反対方向のベクトルとなる。同図(c) のように $k = -1$ の場合、すなわち $(-1)F$ は大きさは F と同じ大きさで、方向だけ反対向きのベクトルとなる。また $(-1)F$ を略して $-F$ と書く。

(d) 力の分解

力 F が与えられているとき、これを F を含む平面内の与えられた二つの方向、 OX , OY

方向の力すなわち OX , OY 方向の分力に分解することができる。そのためには、図 A.5 のように、 F を対角線とし、 OX , OY に平行な辺を持つ平行四辺形 $ABCD$ を描けば、同図のように線分 AB , AD は OX , OY 方向の F の分力 F_1 , F_2 を与える

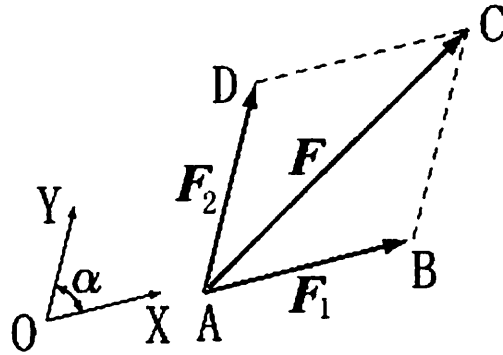


図 A.5

(e) 力の解析的表示 (2次元の場合)

図 A.5 で OX と AB , OY と AD が一致し、 $\alpha = 90^\circ$ のときを考えると図 A.6 となる。この場合、図 A.5 の OX , OY は図 A.6 では、直角座標の座標軸 Ox , Oy で表されている。

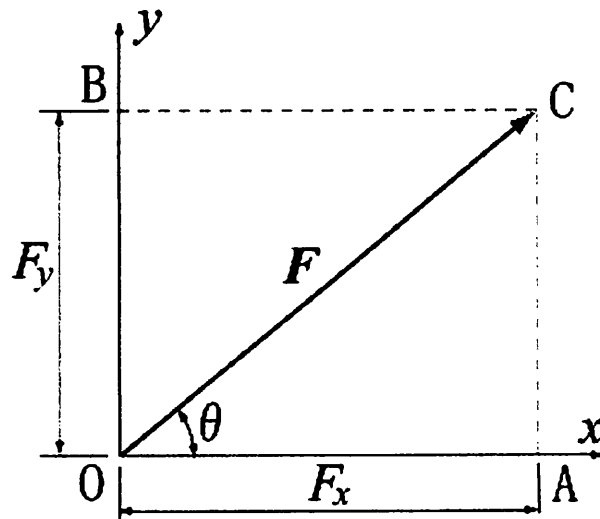


図 A.6

力のベクトル F の先端 C の座標を図 A.6 のように (F_x, F_y) とする。 F_x を力 F の x 成分、 F_y を力 F の y 成分という。 F_x , F_y はベクトルでなく、正負の実数または 0 である。図 A.6 より

$$F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta \quad (\text{A.2})$$

あるいは

$$|\mathbf{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (\text{A.3})$$

力のベクトル \mathbf{F} を与えれば、その x , y 成分 (F_x , F_y) が決まり、逆に力の x , y 成分 (F_x ,

F_y) を与えれば、その力のベクトル \mathbf{F} が決まる。すなわち

$$\text{力のベクトル } \mathbf{F} \Leftrightarrow \text{力の成分 } (F_x, F_y)$$

したがって、力のベクトル \mathbf{F} と力の成分 (F_x , F_y) は全く同等 (同値) なものである。

(f) 一点に加わる同一平面内の多くの力の合力

図 A.7(a) のように、同一平面 (これを x , y 平面とする) 内で、一点 O に力 \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 が作用するときは、まず \mathbf{F}_1 と \mathbf{F}_2 の合力 \mathbf{F}_{12} (図 A.7(b) 中の破線のベクトル OB) を力の三角形 OAB によって求め、次に、この合力 \mathbf{F}_{12} と第 3 の力 \mathbf{F}_3 との合力 \mathbf{F}_{123} を、再び図 A.7(b) の力の三角形 OBC によって求め、これを \mathbf{R} と書くことにすると、これが求める合力 \mathbf{R} である。このことを、ベクトルを用いた式で書けば

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{123} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \quad (\text{A.4})$$

となる。図 A.7(b) の $OABCO$ を力の多角形という。三つ以上の力の場合も同様である。

合力 \mathbf{R} の x , y 両成分 R_x , R_y は、図 A.7(b) より分かるように

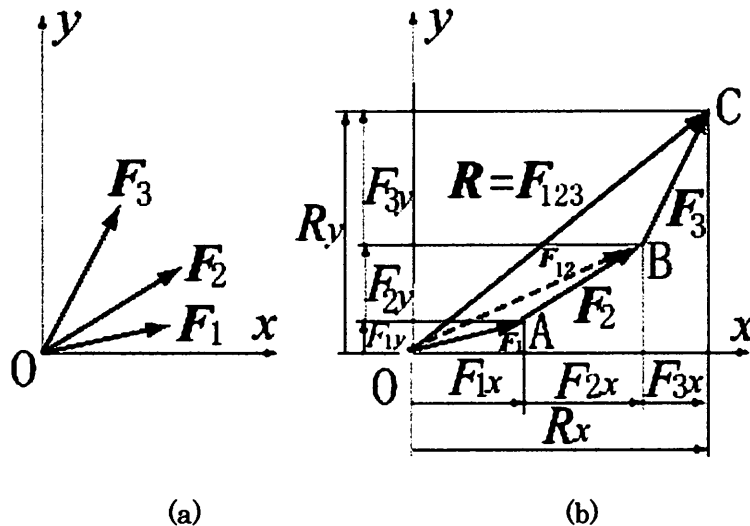


図 A.7

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

図 0.7(b)では、 F_1, F_2, F_3 の x 軸上の正射影 F_{1x}, F_{2x}, F_{3x} が右向きするときおよび y 軸上の正射影 F_{1y}, F_{2y}, F_{3y} が上向きするときを描いている。 x 軸上の正射影が左向きするときや y 軸上の正射影が下向きするとき、数値計算では式(0.5)のその成分に負の数値を代入すればよい。

同様に考えると、 x, y 平面内で、一点 O に n 個の力 F_1, F_2, \dots, F_n が作用するとき、合力 R は

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i \quad (\text{A.6})$$

合力 R の x, y 両成分は

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.7})$$

で与えられる。

A.2 一点に作用する力の釣り合い

前節の式(A.4), (A.6)の合力 R が O (零ベクトル: 大きさが 0 のベクトル) または前節の式(A.5), (A.7)の合力の x, y 成分 R_x, R_y が 0 ならば、一点 O に作用する力 F_1, F_2, \dots は釣り合っているという。そのとき、式(A.6)で合力 $R = O$ (零ベクトル)、式(A.7)で $R_x = 0, R_y = 0$ として、与えられた n 個の力 (x, y 面内の力) の釣り合い条件

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = O \quad (\text{A.8})$$

$$\left. \begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

を得る。

A.3 力のモーメント

図 A.8 のように物体が、一点 O を通り紙面に垂直な軸のまわりに自由に回転できるとする。この物体に、紙面内で点 O を通らない作用線を持つ力 F が作用すると、この物体は、点 O のまわりに回転する。この力 F がこの物体を回転させる働きの大きさは、力 F の大き

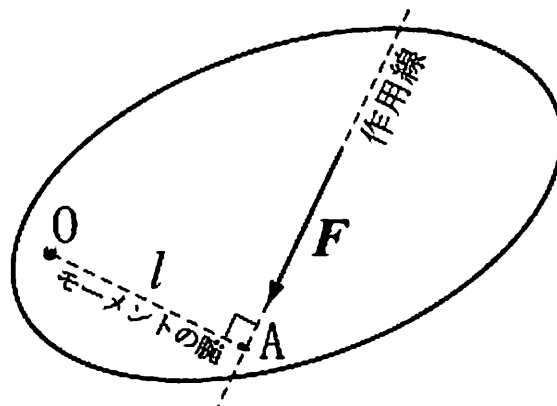


図 A.8

さ F と、点 O から F の作用線に引いた垂線 OA の長さ l の積で与えられる。この積を力 F の、点 O のまわりのモーメントという。力のモーメントは、その大きさと回転方向（時計回転方向か、反時計回転点方向か）で言い表す必要がある。力のモーメントの大きさを M で表すと

$$M = Fl \quad (\text{A.10})$$

となる。上記の点 O を、モーメントの中心、 l をモーメントの腕の長さという。

例題 A.1 図 A.9 のように、剛体に大きさ 10kN の力が作用しているとき、同図の点 A, B, C のまわりのこの力のモーメントを求めよ。

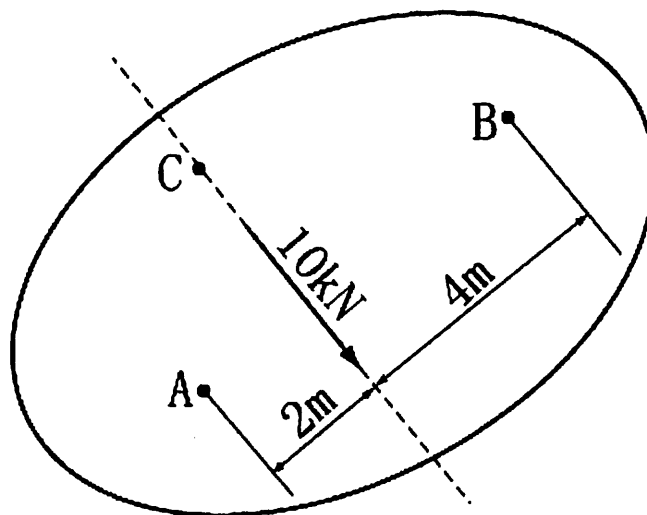


図 A.9

(解) 図 A.9 に示されている、大きさ 10kN の力の、点 A, B, C のまわりのモーメントの大きさを、それぞれ M_A, M_B, M_C とすれば

$$M_A = 10 \times 2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{時計回転方向})$$

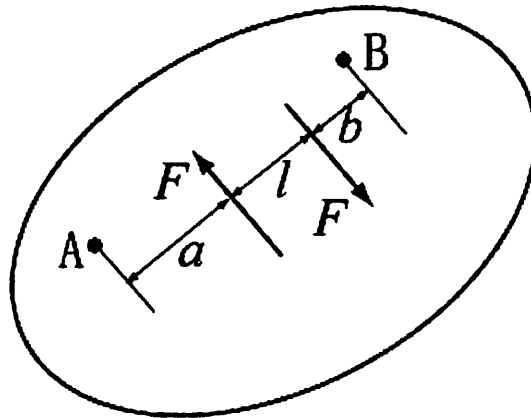
$$M_B = 10 \times 4 = 40 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{反時計回転方向})$$

$$M_C = 10 \times 0 = 0 \quad (\text{モーメントは無い})$$

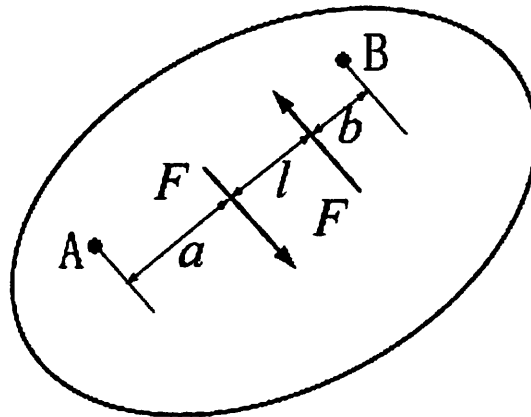
(注) この例で分かるように、単一力のモーメントの場合、どの点の周りのモーメントであるかによって、モーメントの値や回転方向が、それぞれ異なって来る。したがって、“どの点の周りのモーメントであるか”を明確に示す必要がある。

A.4 偶力

図 A.10(a), (b)のように、物体に大きさが等しく、方向が反対の一对の力 F が、互いに異



(a)



(b)

図 A.10

なる平行な作用線上で働くとき、この一对の力を、偶力という。偶力的一对の力の作用線は交わらないから、偶力を合成して一つの力にすることはできない。図 A.10(a), (b)で F は、力の大きさである。この図 A.10(a)で一对の力の点 A のまわりの時計回転方向のモーメント M は

$$M = F(a+l) - Fa = Fl$$

点 B のまわりの時計回転方向のモーメント M' は

$$M' = F(b+l) - Fb = Fl$$

となり、A のまわりでも、B のまわりでも、偶力のモーメントの大きさと回転させようとす

る方向（時計回転方向か反時計回転方向か）は等しく、 $M = M'$ （時計回転方向）である。したがって、偶力のモーメントの大きさは、一对の力の大きさ F に、一对の力間の距離 l を掛けたものである。すなわち

$$M = Fl \quad (\text{A.11})$$

図 A.10(a)では、偶力が物体を回そうとする向きが、時計回転方向であるのに対し、同図 (b)では、反時計回転方向である。(a)と(b)とでは、モーメントの大きさは、同じ式(A.11)で与えられるが、向きは互いに逆向きになっている。したがって、偶力が時計回転方向か反時計回転方向かを示す必要がある。一对の力の作用線間の距離 l を、偶力の腕の長さという。

(注) 以上で述べたように、偶力の場合、どの点のまわりのモーメントの大きさも、すべて式(A.11)で与えられ、同じ値と同じ回転方向になるので、単一力のときのように、どの点のまわりのモーメントであるかを、指定する必要は無い。

A.5 任意の位置に作用する力を、原点に作用する力と偶力で置き換えること

図 A.11(a)のように、平板状剛体*の中央平面内の一点 A_i に力 F_i が作用しているとき、この力を同図の破線で示すように、 x , y 両方向の成分 F_{ix} , F_{iy} に分解することができる。こ

れらの成分は、正、負の実数値または 0 で、座標軸の正方向を向くときは正、正方向と反対向きときは負の値を取る。次に、図 A.11(b)のように与えられた力 F_i を、上で述べたこ

の力の x , y 成分 F_{ix} , F_{iy} で置き換え、別に原点 O に x , y 方向にそれぞれ相反する方向の

一对の力 F_{ix} , F_{iy} を加える。これらの相反する方向の二対の力は、それぞれ大きさ等しく方

向反対のため、打ち消し合って 0 であり、これらの力が働いていないのと同じであるから、

これらの二対の力 F_{ix} , F_{iy} を加えても、加えていないときと同等である。図 A.11(b)で点 A_i

に加わる F_{ix} は、原点に加わる x 方向と逆方向の F_{ix} と、腕の長さ y_i の時計向きの偶力 $F_{ix}y_i$

を形成する。また、点 A_i に加わる F_{iy} は、原点に加わる y 方向と逆方向の F_{iy} と、腕の長さ x_i

の反時計向きの偶力 $F_{iy}x_i$ を形成する。これら二つの偶力を、反時計方向の偶力を正、時計

方向の偶力を負として合計し、これを M_i としてまとめると

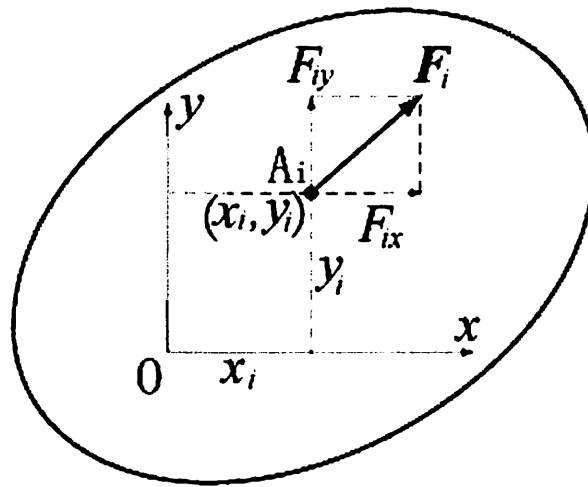
$$M_i = F_{iy}x_i - F_{ix}y_i \quad (\text{A.12})$$

となる。この M_i は、原点のまわりの反時計回転方向を正とした F_{ix} , F_{iy} のモーメントであ

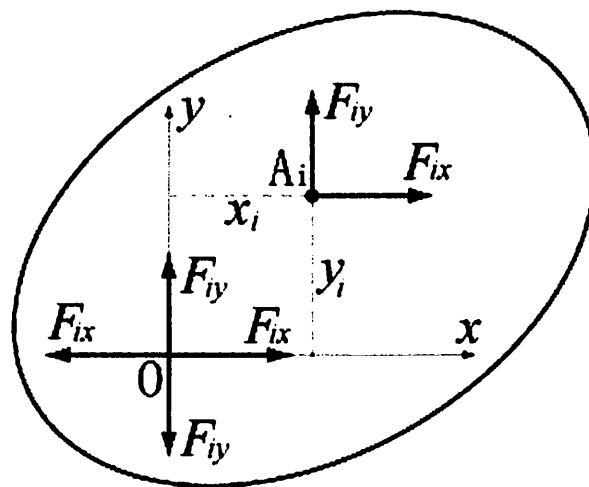
* 外力を受けても変形しない物体を剛体という。剛体は実在しないが、力を受けたときの変形が微小な物体は、簡単のため、剛体として扱われることも多い。剛体に作用する力は、その作用線上で任意に移動してもよい（作用線の定理）。

る。

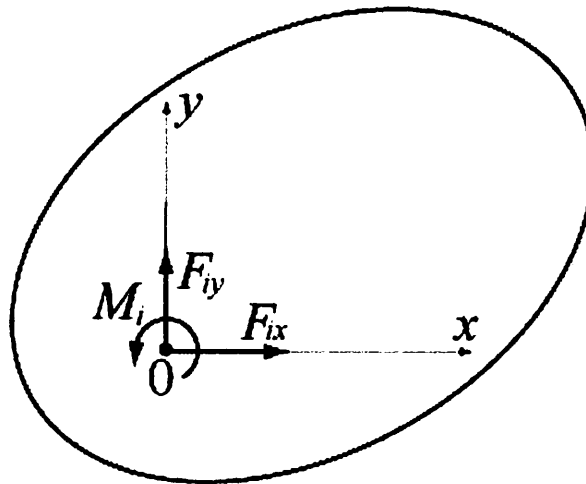
したがって、図 A.11(b)で加わっている力は図 A.11(c)のように、原点に加わる x 方向の F_{ix} 、 y 方向の F_{iy} および x 、 y 面内の偶力 M_i で置き換えられる。前にも述べた通り、この偶力は x 、 y 面内のどの点のまわりでも同じである。したがって、図 A.11(c)では原点 O の位置に M_i を描いた。以上のように、図 A.11(a), (b), (c)は同じ力の状態だから、図 A.11(a)の力を受けた状態を、図 A.11(c)で置き換えることができる。



(a)



(b)



(c)

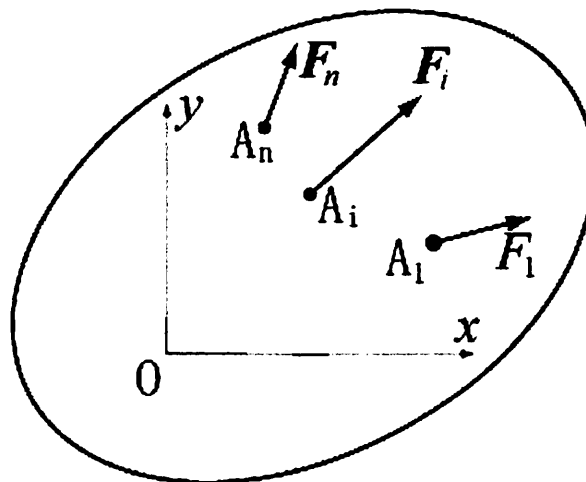
図 A.11

A.6 n 個の異なる点に作用する n 個の力による平板状剛体の釣り合い

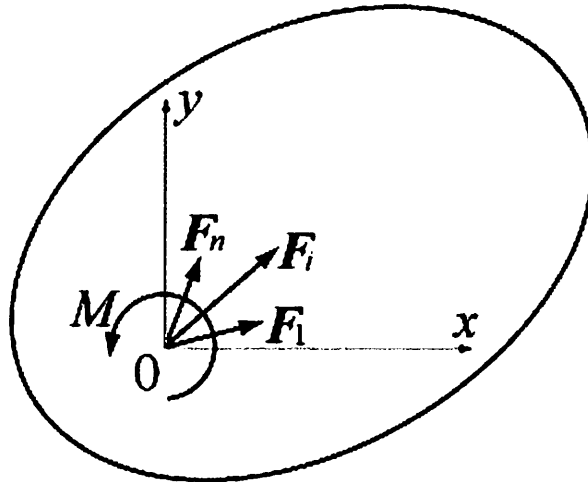
図 A.12(a)のように、一つの平板状剛体の中央面の異なる n 個の位置 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) で、それぞれ力 F_i ($i=1, 2, \dots, n$) が x, y 面内で作用するときを考える。図 A.11(a)の力を図 A.11(c)の力と偶力に置き換えたときと同じ方法によって、図 A.12(a)を図 A.12(b)のように置き換えることができる。したがって、図 A.12(a)の力によるこの剛体の釣り合いを考える代わりに、図 A.12(b)の剛体の釣り合いを考えればよい。

図 A.12(b)で、原点に加わる n 個の力の釣り合い条件は、前述の式(0.13), (0.14)で与えられ

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \mathbf{O} \quad (\text{A.13})$$



(a)



$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

(b)

図 A.12

または

$$\left. \begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.14})$$

となる。さらに、この剛体に加わる偶力の釣り合い条件は、原点まわりの与えられた力のモーメントの釣り合い条件とも同じであり

$$M \equiv M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (\text{A.15})$$

ここで、 M_i は式(A.12)より

$$M_i = F_{iy}x_i - F_{ix}y_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (\text{A.16})$$

である。この M_i は、原点のまわりの F_{ix} 、 F_{iy} の反時計回転方向のモーメントの和である。

式(A.13)または (A.14), 式(A.15), (A.16)は、図 A.12(b)の剛体の釣り合いの式であるが、前述のように図 A.12(a)の剛体は、図 A.12(b)の剛体と同等であるから、式(A.13)または (A.14), (A.15), (A.16)は、 x 、 y 面内の n 個の任意の位置に、それぞれ任意の x 、 y 面内の力 F_1 、 F_2, \dots, F_n を受けた、平板状剛体の釣り合い式で、 x 、 y 平面内のトラスやラーメンの支点反力や内力の計算に、必要となる重要な式である。

A.7 n 個の異なる点に作用する n 個の力による立体状剛体（3次元剛体）の釣り合い

図 A.13のように一つの立体状剛体（3次元剛体；前後左右上下方向に広がりを持つ剛体）

の n 個の点 (x_i, y_i, z_i) ($i=1, 2, \dots, n$) に外力 F_i ($i=1, 2, \dots, n$) が作用して、これらの力が釣り合って、剛体が静止しているとき、前述の平板状剛体（2次元剛体）のときと同様、次の釣り合い条件式が成立する。ここで F_i の x, y, z 成分を、それぞれ X_i, Y_i, Z_i とする。

力の釣り合い条件：

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (\text{A.17})$$

または (x, y, z 軸方向の力の成分の釣り合い条件)

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0 \quad (\text{A.18})$$

モーメントの釣り合い条件 (x, y, z 軸まわりのモーメントの釣り合い条件)：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{ix} &= \sum_{i=1}^n (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iy} &= \sum_{i=1}^n (z_i X_i - x_i Z_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} &= \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.19})$$

ここで、 M_{ix}, M_{iy}, M_{iz} は、 x, y, z 軸のまわりの F_i のモーメントである。

付録 B 材料力学の必要事項

B.1 引張または圧縮を受ける棒の内力

図 B.1(a)のように、一様な断面積 A の棒を、左右に引張るとしよう。もし、棒のどこか

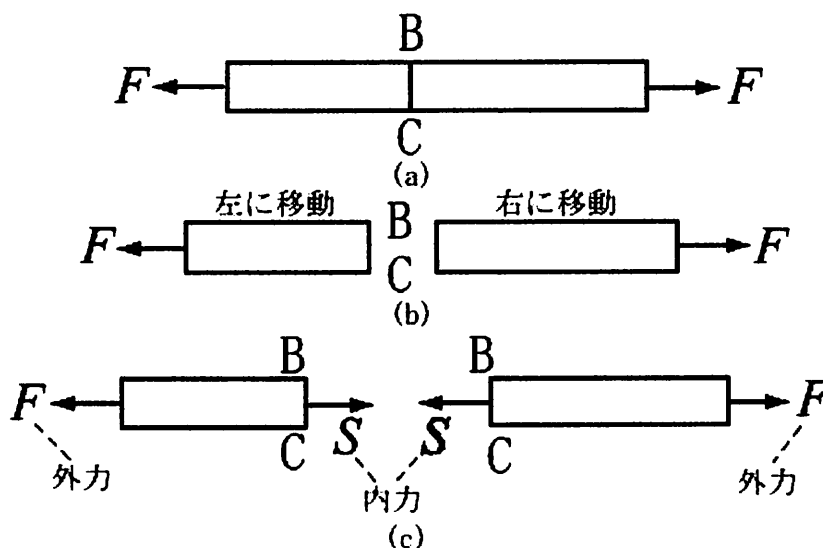


図 B.1

の位置 BC で、棒を長手方向に垂直に切っておいてから引張ったとすると、同図(b)のように、切断された二つの部分は、左右に離れて移動する。 BC で切断しないで引張ったときに、左右に離れてしまわないのは、同図(c)のように、 BC より左右のそれぞれの部分に対し、引張力 F と釣り合う内力 S が断面 BC に発生し、 BC の左右の部分それぞれで F と S が釣り合っているからである。したがって、内力 S は外力 F と等しい。すなわち

$$S = F \quad (\text{B.1})$$

図 B.1(a)のように、断面積 A の一様な断面の細長い棒を両端で引張った場合であると、両端の着力点からかなり遠い断面には、ほぼ一様な内力が分布しており、単位面積当たり

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{B.2})$$

の内力が断面 BC に生じている。この σ を応力という。

以上のように両端に引張力が加わる代わりに、圧縮力が作用するときは、圧縮力を負の引張力として、以上の説明中の F に負の値を代入して考えればよい。

棒の両端に引張力が加わると、棒は伸びる。図 B.2 のように、最初の長さが l であった棒が、引張られて Δl だけ伸び、変形後の長さが、 $l + \Delta l$ になったとする。そのとき伸び Δl を、最初の長さ l で割った値 $\Delta l / l$ をひずみと言い、 ε で表す。すなわち

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{B.3})$$

棒の両端に圧縮力が加わって、棒が縮む場合は、縮みを負の伸びと考え、以上で述べた Δl に

負の数値を与えればよい。

変形の小さい範囲では、応力 σ はひずみ ε と比例し

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{B.4})$$

となる。これをフックの法則といい、比例定数 E を縦弾性係数またはヤング率という。

式(B.2), (B.3)を式(B.4)に代入し

$$F = \frac{AE}{l} \Delta l, \quad \Delta l = \frac{l}{AE} F \quad (\text{B.5})$$

を得る。

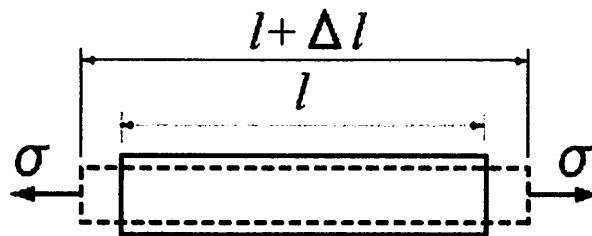


図 B.2

B.2 はりのせん断力と曲げモーメント

適当に支えられた棒が、その棒の長手方向に直角な荷重を受けると、その棒は曲がる。このような棒をはりという。

図 B.3(a)のように、水平に置かれたはりに、鉛直荷重が作用して釣り合っているとき、同図の点 C ではりを左右の部分に切り離し、しかも切り離す前と同じ状態に置こうとすれば、同図(b)のように断面内に力 Q 、偶力 M を作用させて、左右のそれぞれの切り離れた部分を釣り合わせねばならない。この力 Q をせん断力、この偶力のモーメント M を曲げモーメントという。これらのせん断力 Q 、曲げモーメント M は、図 B.3(b)に見られるように、それぞれはりの左側部分と右側部分に作用して、作用・反作用の関係にあり、左側部分と右側部分で大きさ等しく、方向反対である。

図 B.3(a)で、点 C でのせん断力 Q を求めるには点 C より左側、または右側にあるはりの荷重と反力（支点の支持力）、すなわち外力の釣り合いを求めればよい。この場合、点 C より左側の力の合計を求める場合は、図 B.4(a)のように上向きを外力を正、同図(b)のように下向きを外力を負として代数和を求める。他方、点 C より右側の外力の合計を求める場合は、同図(a)のように下向きを外力を正、同図(b)のように上向きを外力を負として代数和を求める。せん断力を求める場合に、荷重や反力に与える正負の符号は、次のようにこじつけて記憶しておくといよい。すなわち、図 B.3(a)中の二つの外力のベクトルを、仮に偶力と仮想したとき、その回転作用は時計方向であり、同図(b)で同様に考えると、仮想偶力の回転作用は反時計方向である（図 B.4 中の回転を表す矢印を参照）。

次に図 B.3 のはりの点 C での曲げモーメントを求めるには、点 C より左側または右側に

あるはりの外力の点 C のまわりのモーメントの代数和を求めればよい。この場合、モーメントの正負については、点 C より左の力のモーメントで考える場合、図 B.5(a)のように時計方向を正、同図(b)のように反時計方向を負とし、点 C より右のモーメントで考えるときは、図 B.5(a)のように反時計方向を正、同図(b)のように時計方向を負とする。これらを要約すれば、図 B.5(a)のように、はりを上に凹（おう）に曲げようとする曲げモーメントを正、同図(b)のように、上に凸（とつ）に曲げようとするものを負とする。この規約の記憶法としては、同図(c)のように、上に水がたまるような形に曲げようとする曲げモーメント

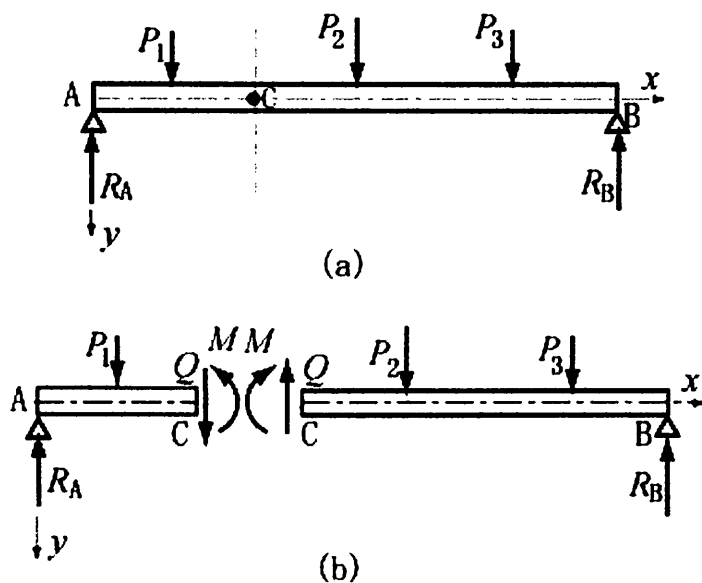


図 B.3

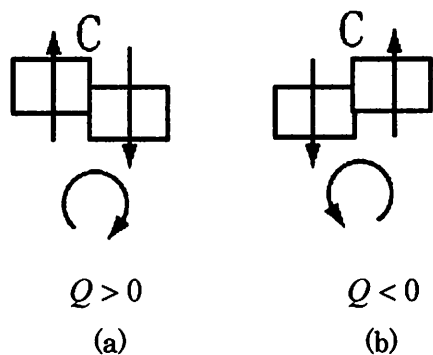


図 B.4

を正、そうでないものを負とすると、記憶して置けばよい。

はりの各断面のせん断力と曲げモーメントを、その断面の直下の位置にプロットして描

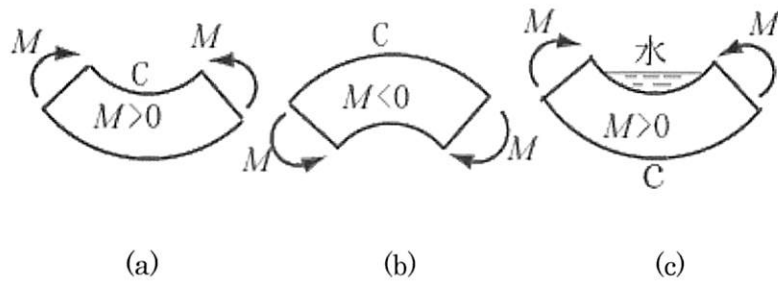


図 B.5

いたグラフを、それぞれ、はりのせん断力図 (略号 SFD)、曲げモーメント図 (略号 BMD) という。この本では、これらの図の正の値を基準線より下に、負の値を基準線より上に取って示す。

B.3 はりの分布荷重、せん断力、曲げモーメントの関係

図 B.6 のように、微小長さ dx のはりの部分を切り出してみる。この部分に作用する単位長さ当りの分布荷重を q 、左端面に作用するせん断力、曲げモーメントを Q 、 M 、右端面に作用するせん断力、曲げモーメントを $Q+dQ$ 、 $M+dM$ とする (断面の位置によって、せん断力、曲げモーメントには dQ 、 dM の変化が生じる)。図 B.6 の要素に作用する上下方向の力の釣り合いから

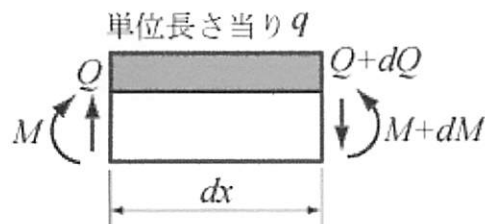


図 B.6

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad (\text{B.6})$$

が得られ、モーメントの釣り合いから

$$dM = Qdx \quad \therefore \frac{dM}{dx} = Q \quad (\text{B.7})$$

を得る。式(B.7)を式(B.6)に代入すると

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad (\text{B.8})$$

が得られる。

B.4 はりのたわみの微分方程式

はりの断面の重心をその断面の図心という。はりの断面の図心を連ねた線を図心軸といい、以下ではこれを x 軸にとる。 y 軸を鉛直下向きにとり、はりが外力を受けて変形した

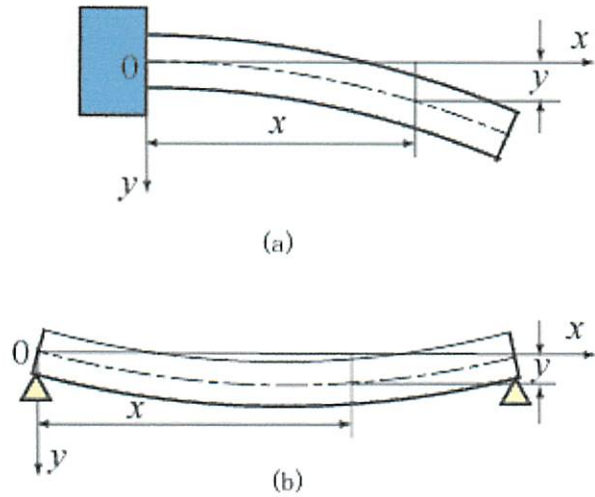


図 B.7

とき、図心軸上の座標 x の点の鉛直下向き変位、すなわちたわみを y とする (図 B.7(a), (b))。 y は x の関数で、たわみを求めたい位置 x を指定すると、そのたわみ y が決まる。この関数のグラフは、変形後の図心軸の形を表す曲線で、この曲線をたわみ曲線または弾性曲線という。はりの材料の縦弾性係数を E 、はりの断面 2 次モーメントを I とする。曲げモーメントの正負を図 B.5 のように定め、 x 、 y 座標軸を図 B.7(a) のようにとると、たわみ y と曲げモーメント M の関係は、材料力学で学んだように (図 B.5 と図 B.7(b) を比べると次式右辺の負号の理由が理解できる) *

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{B.9}$$

あるいは

$$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{B.10}$$

で与えられる。ここで EI をはりの曲げ剛性という。式(B.9)は、曲げモーメントが分かっているとき、これよりたわみを求めるのに用いられ、はりのたわみの微分方程式と呼ばれる。この微分方程式からたわみを求める方法では、 x で 2 回積分する必要があるので、以下では 2 回積分法と呼ぶことにする。式(B.10)は、後述の微分方程式(B.13)からたわみ y が先に求められたとき、これより曲げモーメントを求めるのに用いられる。

式(B.9)、(B.10)の両辺を微分し、式(B.7)を代入し

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{Q}{EI} \tag{B.11}$$

あるいは

* 関谷、角、谷村、岡本、金岡：最新材料力学、朝倉(1990)、p.55。
関谷：SI による材料力学演習、森北(1996)、p.61。

$$Q = -EI \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (\text{B.12})$$

が得られる。式(B.11)は、せん断力が分かっているとき、それよりたわみを求めるために用いることができる微分方程式であり、式(B.12)は、後述の微分方程式(B.13)からたわみ y が先に求められたとき、これよりせん断力を求めるのに用いられる。

式(B.11)の両辺を微分し、式(B.6)を代入すると

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (\text{B.13})$$

が得られ、この式は分布荷重が分かっているとき、これよりたわみ y を求めるために時々用いられる4階のはりのたわみの微分方程式である。この微分方程式よりたわみを求める方法では、4回積分する必要があるので、以下では4回積分法と呼ぶことにする。

以上より、はりのたわみ y を求めるには、微分方程式(B.9), (B.11), (B.13)のいずれかを適当な境界条件のもとに解けばよい。

たわみ曲線の接線と x 軸の間の角をたわみ角といい、微小たわみの場合、たわみ角は近似的にたわみの微分係数(たわみのこう配) dy/dx で与えられる(たわみ角 $\theta \approx dy/dx$)。

B.4 はりの境界条件

前節のはりのたわみの微分方程式を解く場合、境界条件を与える必要がある。

(a) 固定端

図 B.8(a)のはり(このはりを片持ばりという)の左支点のような、はりの固定端では、はりは、たわむことも回転することもできないように、拘束されているから、たわみとたわみ角が0である。すなわち

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{B.14})$$

(b) 単純支持端

図 B.8(b)のはりのように、はりの端がたわむことはできないが、自由に回転すること

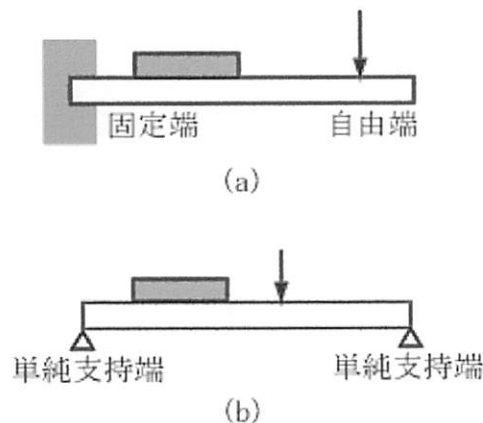


図 B.8

ができる支点（単純支持支点）の場合、これを単純支持端という。単純支持端では、たわみは0、曲げモーメントは0となる。すなわち

$$y = 0, \quad M = 0 \quad (\text{B.15})$$

式(B.15)に式(B.10)を代入すると

$$y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (\text{B.16})$$

式(B.16)は、たわみだけで表した単純支持端の境界条件の式で、たわみの微分方程式(B.13)からたわみを求めるとき（4回積分法するとき）に用いられる。たわみの微分方程式(B.9)からたわみを求めるとき（2回積分法するとき）では、単純支持点に対し、式(B.16)の第1式 $y = 0$ だけを考えればよい。

はりの中途に単純支持点があるときは、曲げモーメントは一般に0とはならず、したがって、式(B.15)、(B.16)の第1式は成り立つが、第2式は一般に成り立たないから注意されたい。

(c)自由端

図 B.8(a)の片持ばりの右端は、全く支えられておらず、外部から力やモーメントを受けていない。このように、全く支えられていない端を、自由端という。したがって、この右支点では、せん断力と曲げモーメントが0である。すなわち

$$Q = 0, \quad M = 0 \quad (\text{B.17})$$

この第1式に式(B.12)を、第2式に式(B.10)を代入すると

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (\text{B.18})$$

となり、この式はたわみだけで表した自由端の境界条件で、微分方程式(B.13)からたわみを求めるとき（4回積分法するとき）に用いられる。たわみの微分方程式(B.9)からたわみを求めるとき（2回積分法するとき）は、式(B.18)を使う必要はない。

B.5 棒のねじり

この節では、ねじりモーメントとねじり角の関係を表す式の結果だけ列挙しておく。これらの式は、ねじりを受ける部材を含む構造の変形の解析で必要となる。式の誘導等の詳細については、材料力学の教科書、参考書を参照されたい*。

(a)丸棒（円形断面棒）

図 B.9(a)のように、長さ l 、直径 d 、材料の横弾性係数 G の丸棒の両端に、相反する回転方向の偶力（ねじりモーメント） T が作用して、両断面の相対回転角（ねじり角）が、同図(b)のように ϕ となるときの、単位長さ当りのねじり角（比ねじり角）を θ とすれば、 $\theta = \phi / l$ で

$$T = \frac{\pi d^4 G}{32l} \phi = \frac{\pi d^4 G}{32} \theta \equiv GJ\theta \quad (\text{B.19})$$

* 関谷、角、谷村、岡本、金岡：最新材料力学、朝倉(1990)、p.16、関谷：SIによる材料力学演習、森北(1996)、p.118。

ここで

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad (\text{B.20})$$

で、この J を丸棒の断面 2 次極モーメント、 GJ をねじり剛性という。

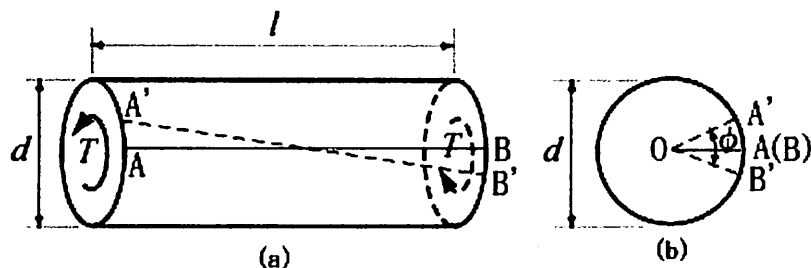


図 B.9

(b)中空丸棒 (同心円形断面棒)

図 B.10 のような同心円形断面棒の場合は、式(B.20)の代りに

$$J = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4) \quad (\text{B.21})$$

となる。

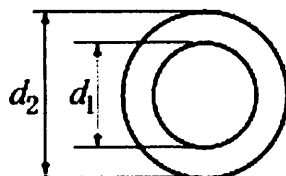


図 B.10

(c)長方形断面棒

棒の断面が、図 B.11 のような長方形の場合も上記と同様、ねじりモーメント T と比ねじり角 θ の関係は

$$T = GJ\theta \quad (\text{B.22})$$

で与えられ

$$J = \beta b h^3 \quad (\text{B.23})$$

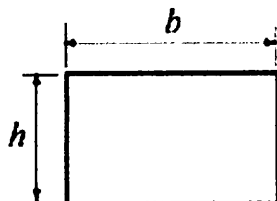


図 B.11

となる。ここで β は表 B.1 で与えられる。特に、 $b/h = \infty$ の場合 (非常に細長い長方形の場合) は $\beta = 0.333\cdots = 1/3$ である。この場合式(B.22)は

表 B.1

b/h	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10.00	∞
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

$$T = G \left(\frac{bh^3}{3} \right) \theta \quad (\text{B.24})$$

となる。この式は、図 B.12 のような、平板を曲げて作った断面を持つ棒のねじりにも応用できる。

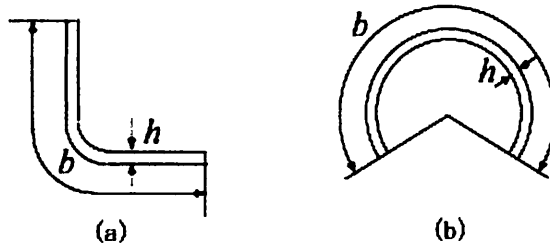


図 B.12

(d) 多くの長方形が集まった断面を持つ棒

図 B.13 のように幅 b_i 、厚さ h_i の長方形が集まった断面の棒の場合、式(B.22)の J は

$$J = \frac{\sum_i b_i h_i^3}{3} \quad (\text{B.25})$$

で与えられる。

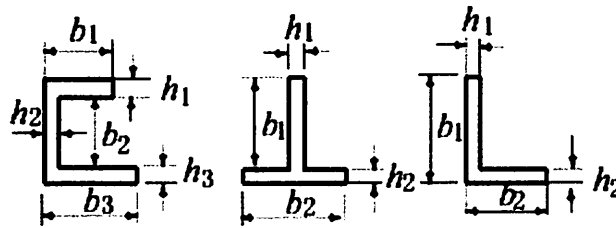


図 B.13

演習問題の答

いくつかの問題だけ解答の詳細を示す。他の問題については答の結果だけ示す。

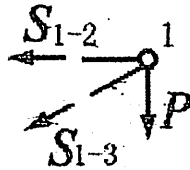
1章

以下では、部材 ij の内力を S_{i-j} 、節点 i での反力の x, y 成分を X_i, Y_i で表す。

[A]

(1.1a)

(a) 図 1.15(a) のトラスで節点 1 の近傍を切り出したものを下図に示す



この構造部分に作用する力の水平および鉛直成分の釣り合いより

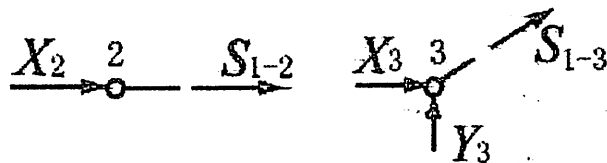
$$-S_{1-2} - S_{1-3} \cos 30^\circ = 0$$

$$-S_{1-2} \sin 30^\circ - P = 0$$

これら 2 式を S_{1-2}, S_{1-3} について解くと

$$S_{1-2} = \sqrt{3}P, \quad S_{1-3} = -2P \quad (\text{答})$$

次に節点 2, 3 の近傍を切り出し、作用する力を示すと次の図となる。



この図の構造部分に作用する水平および鉛直方向の力の釣り合いから

$$\text{節点 2: } X_2 + S_{1-2} = 0,$$

$$\text{節点 3: } X_3 + S_{1-3} \cos 30^\circ = 0, \quad Y_3 + S_{1-3} \sin 30^\circ = 0$$

これらの式より、節点 2, 3 の反力の水平および鉛直成分は

$$X_2 = -\sqrt{3}P, \quad X_3 = \sqrt{3}P, \quad Y_3 = P \quad (\text{答})$$

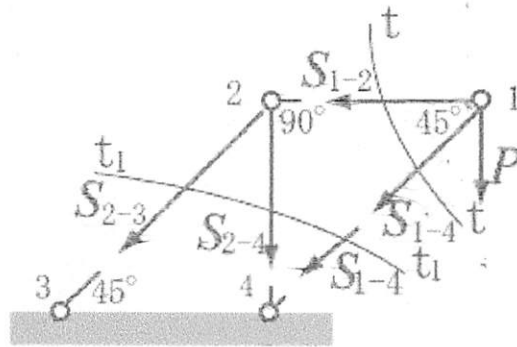
$$(b) \quad S_{1-2} = P, \quad S_{1-4} = -\sqrt{2}P, \quad S_{2-3} = \sqrt{2}P, \quad S_{2-4} = -P, \quad X_3 = -P, \quad Y_3 = -P, \quad X_4 = P, \quad Y_4 = 2P$$

$$(c) \quad S_{1-2} = -\frac{P}{\sqrt{3}}, \quad S_{1-4} = \frac{P}{\sqrt{3}}, \quad S_{1-5} = -\frac{P}{\sqrt{3}}, \quad S_{2-3} = -\frac{P}{\sqrt{3}}, \quad S_{2-4} = \frac{P}{\sqrt{3}}, \quad S_{3-4} = \frac{P}{2\sqrt{3}}, \quad S_{4-5} = \frac{P}{2\sqrt{3}}$$

$$Y_3 = \frac{P}{2}, \quad X_5 = 0, \quad Y_5 = \frac{P}{2}$$

(1.2a) 解答者によって、解き方に相違があるかも知れない。ここで示すのは1つの解き方に過ぎない。

図 1.15(b)のトラス：



t-t より右の部分の節点 4 のまわりのモーメントの釣り合いより

$$S_{1-2}L = PL \quad \therefore S_{1-2} = P$$

節点 2 のまわりのモーメントの釣り合いより

$$\frac{L}{\sqrt{2}}S_{1-4} + PL = 0 \quad \therefore S_{1-4} = -\sqrt{2}P \quad (1)$$

t1-t1 より左下部分の節点 3 のまわりのモーメントの釣り合いより

$$\frac{L}{\sqrt{2}}S_{1-4} + S_{2-4}L + 2LP = 0 \quad (2)$$

式(1)を式(2)に代入し、 S_{2-4} について解くと

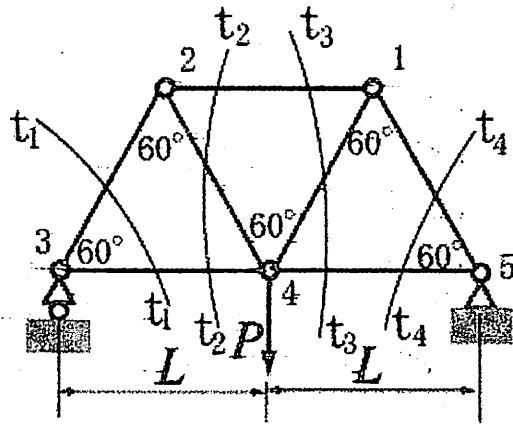
$$S_{2-4} = -P \quad (3)$$

t1-t1 より左下部分の節点 4 のまわりのモーメントの釣り合いより

$$S_{2-3} \times \frac{L}{\sqrt{2}} = PL \quad \therefore S_{2-3} = \sqrt{2}P \quad (4)$$

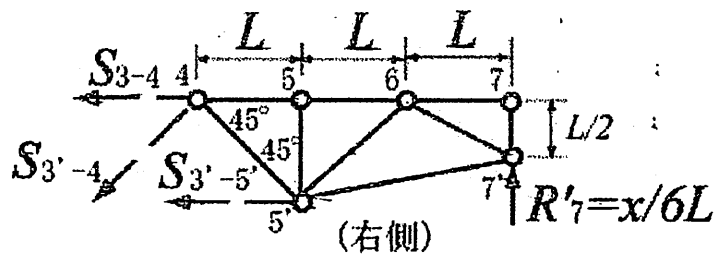
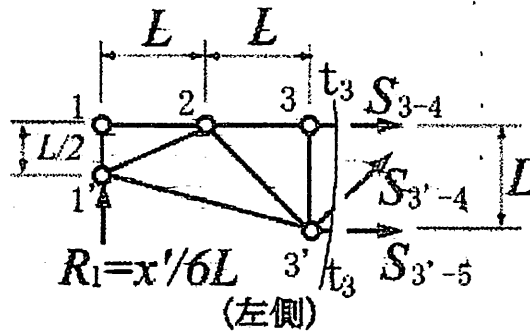
図 1.15(c)のトラス：

例えば次の図の断面 t_1-t_1 より左の構造部分の節点 4 のまわりのモーメント、節点 2 の周りのモーメント、 t_2-t_2 より左の構造部分の節点 4 のまわりのモーメント、節点 3 のまわりのモーメント、 t_3-t_3 より右の構造部分の節点 5 のまわりのモーメント、節点 1 の周りのモーメント、 t_4-t_4 より右の構造部分の節点 1 のまわりのモーメント、節点 4 のまわりのモーメントの釣り合いを考えて、各部材内力を求めることができる。



(1.3a) $S_{2-4} = -\frac{3L}{2h}P$, $S_{3-4} = -\frac{3}{2}P$, $S_{3-5} = \frac{3L}{2h}P$, $S_{4-5} = \frac{\sqrt{L^2+h^2}}{2h}P$, $S_{4-6} = -\frac{2L}{h}P$

(1.4a) 部材 3-4 の影響線



単位荷重が、節点 1, 3 間るとき、上図の“右側”の構造部分について考える。鉛直荷重の釣り合いから (式(1)中の x については、図 1.11(a) を参照)

$$-S_{3-4} \sin 45^\circ + R'_7 = 0 \quad \therefore S_{3-4} = \frac{R'_7}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{6L \sin 45^\circ} \quad (1)$$

節点 1 では $x = 0$ だから、式(1)に代入して

$$S_{3-4} = 0 \quad (2)$$

節点 3 では $x = 2L$ だから、式(1)に代入して

$$S_{3-4} = \frac{2L}{6L \sin 45^\circ} = \frac{1}{3 \times (1/\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (3)$$

単位荷重が節点 4, 7 間するとき、上図“左側”の構造部分で考える。鉛直荷重の釣り合いから (式(4)中の x' については、図 1.11(a)を参照)

$$S_{3-4} = \frac{x'}{6L \sin 45^\circ} \quad (4)$$

節点 4 で $x' = 3L$ だから、上式(4)は

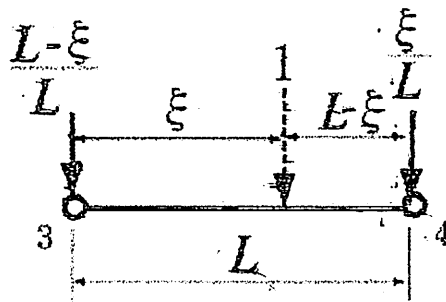
$$S_{3-4} = -\frac{3L}{6L \sin 45^\circ} = -\frac{1}{2 \sin 45^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

節点 7 で $x' = 0$ だから、上式(4)は

$$S_{3-4} = 0 \quad (6)$$

となる。

単位荷重が、節点 3, 4 間するとき、この単位荷重を次の図のように節点 3, 4 に振り分けると (両端単純支持はりの反力の大きさと同じ…樫子の原理の割合) 下図となる。



単位荷重より左の構造部分で考えると、鉛直力の釣り合いから

$$S_{3-4} \sin 45^\circ + \frac{x'}{6L} \frac{L-xi}{L} = 0$$

$$\therefore S_{3-4} = \frac{5xi - 2L}{6L \sin 45^\circ} = \frac{2L - 5xi}{6L/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2L - 5xi)}{6L} \quad (7)$$

節点 3 で $xi = 0$ だから式(7)に代入して

$$S_{3-4} = \frac{2\sqrt{2}L}{6L} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (8)$$

節点 4 で $xi = L$ だから式(7)に代入して

$$S_{3-4} = \frac{\sqrt{2}(2L - 5L)}{6L} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

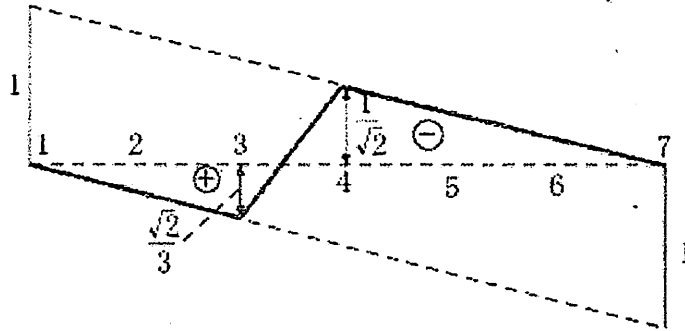
この式は式(5)と一致している。

単位荷重より右で考えても、同様に扱うことができる。この場合の式は

$$-S_{3-4} \sin 45^\circ - \frac{\xi}{L} + \frac{x}{6L} = 0$$

この式より、式(7)と同じ結果が得られる。

以上より、部材 3-4 の影響線は下図のようになる。



部材 3-3' の影響線

部材 2-3, 3-3', 3'-4, 3'-5' を横切る断面 t-t を考える。節点 1, 7 での反力をそれぞれ、 R_1 , R_7 とすると、単位荷重の作用点の座標を x として

$$R_1 = \frac{6L-x}{6L}, \quad R_7 = \frac{x}{6L} \quad (10)$$

を得る。

単位荷重が節点 1, 2 間のとき、断面 t-t より右側の構造部分の鉛直方向の力の釣り合いより

$$S_{3-3'} - S_{3-4} \sin 45^\circ + R_7 = 0 \quad (11)$$

式(11)に式(10)を代入し、 $S_{3-3'}$ について解くと

$$S_{3-3'} = 0 \quad (12)$$

を得る。

単位荷重が節点 2, 3 間のとき、この単位荷重を節点 2 に作用する $(L-\xi)/L$ 、節点 3 に作用する ξ/L に振り分ける (いずれも、鉛直下向き方向； ξ = 節点 2 と単位荷重の作用点の距離)。断面 t-t より右の構造部分の鉛直方向の力の釣り合いより

$$S_{3-3'} = -\frac{\xi}{L} \quad (13)$$

単位荷重が節点 2 上のとき、 $\xi = 0$ だから

$$S_{3-3'} = 0 \quad (14)$$

単位荷重が節点 3 上のとき、 $\xi = L$ だから

$$S_{3-3'} = -1 \quad (15)$$

単位荷重が節点 2, 3 の中間に作用しているとき ($0 < \xi < L$ のとき) は、式(13)が ξ の 1 次式であることより、影響線は両端 2, 3 で式(14), (15)の値をとる線分となる。

単位荷重が節点 3, 4 間にあるとき、これを節点 3 に作用する $(L-\xi)/L$ と、節点 4 に作用する ξ/L に振り分けて考える。断面 t-t より左の構造部分に作用する鉛直方向の力の釣り合いより

$$S_{3-3'} + S_{3-4} \sin 45^\circ + R_1 = 0 \quad (16)$$

を得る。式(16)に式(7)を代入し、 $S_{3-3'}$ について解くと

$$-S_{3-3'} = -\frac{L-\xi}{L} \quad (17)$$

となり、節点3では $\xi = 0$ だから

$$S_{3-3'} = -1 \quad (18)$$

節点4では $\xi = L$ だから

$$S_{3-3'} = 0 \quad (19)$$

となる。

単位荷重が節点4, 7間るとき、断面t-tより左側の構造部分の鉛直方向力の釣り合いより

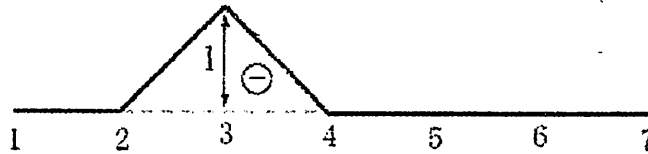
$$R_1 + S_{3-3'} + S_{3-4} \sin 45^\circ = 0 \quad (20)$$

となる。式(20)に式(10)、式(4)を代入して $S_{3-3'}$ について解くことにより

$$S_{3-3'} = 0 \quad (21)$$

を得る。

以上より部材3-3'の影響線は下図に示すようになる。



(1.5) 節点3に部材1-3, 2-3, 3-4から加えられる内力と節点3に加えられる外力 P の x , y , z 成分の釣り合い式は

$$\begin{aligned} S_{1-3} \cos 30^\circ - S_{2-3} \cos 60^\circ &= 0, \\ -S_{1-3} \sin 30^\circ - S_{2-3} \sin 60^\circ - S_{3-4} \sin 60^\circ &= 0 \\ -S_{3-4} \cos 60^\circ - P &= 0 \end{aligned}$$

これらの式を S_{1-3} , S_{2-3} , S_{3-4} を未知数とする連立1次代数方程式として解けば

$$S_{1-3} = \frac{\sqrt{3}}{2}P, \quad S_{2-3} = \frac{3}{2}P, \quad S_{3-4} = -2P \quad (\text{答})$$

[B]

(1.1b) (a) $S_{1-2} = -10\sqrt{2} \approx -14.1$ (kN), $S_{1-3} = 10.0$ (kN), $S_{2-3} = -10\sqrt{2} \approx -14.1$ (kN),
 $Y_1 = Y_3 = 10.0$ (kN)

(b) $S_{1-2} = -25\sqrt{2} \approx 35.4$ (kN), $S_{2-3} = -25\sqrt{2} \approx -35.4$ (kN), $S_{1-4} = 25.0$ (kN),
 $S_{2-4} = 50.0$ (kN), $S_{3-4} = 25.0$ (kN), $Y_1 = Y_3 = 25.0$ (kN)

$$(c) S_{1-2} = -5.0 \text{ (kN)}, S_{1-3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4.3 \text{ (kN)}, S_{2-3} = -5\sqrt{3} \approx -8.7 \text{ (kN)},$$

$$Y_1 = 2.5 \text{ (kN)}, Y_3 = 7.5 \text{ (kN)}$$

$$(d) S_{1-2} = S_{2-3} = \frac{200\sqrt{3}}{3} \approx 115 \text{ (kN)}, S_{2-4} = -\frac{200\sqrt{3}}{3} \approx -115 \text{ (kN)}, S_{3-4} = -\frac{100\sqrt{3}}{3} \approx -58 \text{ (kN)},$$

$$X_1 = -\frac{200\sqrt{3}}{3} \approx -115 \text{ (kN)}, X_4 = \frac{200\sqrt{3}}{3} \approx 115 \text{ (kN)}, Y_4 = 100 \text{ (kN)}$$

$$(e) S_{1-2} = 40\sqrt{2} \approx 57 \text{ (kN)}, S_{1-3} = -40 \text{ (kN)}, S_{2-3} = -40 \text{ (kN)}, S_{2-4} = 40 \text{ (kN)},$$

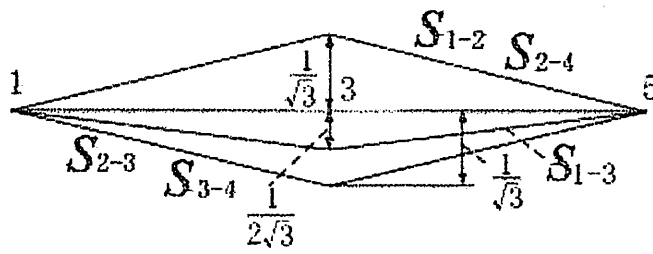
$$S_{3-4} = 40\sqrt{2} \approx 57 \text{ (kN)}, S_{3-5} = -80 \text{ (kN)}, S_{4-5} = -40 \text{ (kN)}, S_{4-6} = 80 \text{ (kN)}, X_5 = -80 \text{ (kN)},$$

$$Y_5 = 40 \text{ (kN)}, X_6 = 80 \text{ (kN)}.$$

(1.2b) 略

$$(1.3b)^* S_{2-4} = -3P, S_{2-5} = P, S_{3-5} = \sqrt{3}P, S_{4-5} = -\frac{3}{2}P$$

(1.4b)



$$(1.5b) S_{0-1} = -25 \text{ kN}, S_{0-2} = 27 \text{ kN}, S_{0-3} = -25 \text{ kN}$$

2章

(2.1a)

(a) 1章演習問題(1.1a)の答より

$$S_{1-3} = -2P \quad (1), \quad S_{1-2} = \sqrt{3}P \quad (2)$$

たわみを求めようとする点（荷重の作用点、すなわち節点1）に求めようとするたわみの方向（鉛直下向き方向）に、単位仮想荷重が作用するときの部材内力は、上記式(1), (2)で $P=1$ としたもので

$$u_{1-3} = -2 \quad (3), \quad u_{1-2} = \sqrt{3} \quad (4)$$

* 関谷、斎藤：機械構造力学、；初版 いずみ吉房（昭40—5）, p. 59；再販 明文書房（昭55—2）p. 59；復刻 現代工学社（平4—5）, p. 42.

求めるたわみを δ とすれば、部材 ij の長さを L_{i-j} として、式(1), (2), (3), (4)の結果を用いると

$$\delta = \sum \frac{SuL}{AE} = \frac{1}{AE} (S_{1-2}u_{1-2}L_{1-2} + S_{1-3}u_{1-3}L_{1-3}) = \frac{(9+8\sqrt{3})}{3} \frac{PL}{AE} \quad (\text{答})$$

(b) :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{AE} (S_{1-4}u_{1-4}L_{1-4} + S_{1-2}u_{1-2}L_{1-2} + S_{2-3}u_{2-3}L_{2-3} + S_{2-4}u_{2-4}L_{2-4}) \\ &= \frac{1}{AE} \{ (-\sqrt{2}P) \times (-\sqrt{2}) \times \sqrt{2}L + P \times 1 \times L + \sqrt{2}P \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}L + (-P) \times (-1) \times L \} \\ &= \frac{2(1+2\sqrt{2})PL}{AE} \end{aligned}$$

$$(c) \delta = \frac{11PL}{6AE}$$

$$(2.2a) \frac{Pa^2(l-a)^2}{3EH}$$

$$(2.3a) \frac{\pi h l^3}{12EI}$$

$$(2.4a) \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{5}{4}\pi - \frac{8}{3} \right)$$

[B]

$$(2.1b) (a) 0.58\text{mm} \quad (b) 2.23\text{mm} \quad (c) 3.15\text{mm} \quad (d) 2.74\text{mm}$$

$$(2.2b) y_{x=a} = \frac{a(l-a)6l}{6l} \{ M_0(2l-a) + M_1(l+a) \}$$

$$(2.3b) \delta = \frac{Pah(l-a)}{2}$$

$$(2.4b) \delta = \frac{128Pl^3}{\pi Ed^4}$$

3章

[A]

(3.1a) 右支点 3 の回転支持をすべり支持に変更して静定化する。この静定化したトラスが、問題のトラスと同じ荷重 (節点 2 に加わる鉛直下向き荷重 P) を受けるとき、この静定化トラスの内力は、1章の方法で求められ

$$S_{1-2}^0 = -\frac{P}{\sqrt{2}}, \quad S_{1-3}^0 = \frac{P}{2}, \quad S_{2-3}^0 = -\frac{P}{\sqrt{2}} \quad (i)$$

となる。

次に、上のように静定化トラスが、節点3に水平右向きに単位荷重（大きさ1の荷重）だけを受けるときのトラスの内力も、1章の方法で求められ

$$u_{1-2} = 0, \quad u_{1-3} = 1, \quad u_{2-3} = 0 \quad (2)$$

本来の問題のトラス（図 3.13）の支点3の右向き水平反力を X とすると、問題のトラスの内力は

$$\left. \begin{aligned} S_{1-2} &= S_{1-2}^0 + Xu_{1-2}, & S_{1-3} &= S_{1-3}^0 + Xu_{1-3} \\ S_{2-3} &= S_{2-3}^0 + Xu_{2-3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

となる。

節点3の水平右向き変位 δ は

$$\delta = \frac{1}{AE} (S_{1-2}u_{1-2} + S_{1-3}u_{1-3} + S_{2-3}u_{2-3}) = 0 \quad (4)$$

式(4)に式(3)を代入してから X について解けば、図 3.13 のトラスの支点3の水平反力は

$$X = -\frac{P}{2} \quad (5)$$

式(1), (2), (5)を式(3)に代入すると、この問題のトラス（図 3.13）の内力は

$$S_{1-2} = -\frac{P}{\sqrt{2}}, \quad S_{1-3} = 0, \quad S_{2-3} = -\frac{P}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

で与えられ、支点 i ($i=1, 3$) の水平反力 X_i （右向きを正とする）および鉛直反力 Y_i （上向きを正とする）は

$$X_1 = \frac{P}{2}, \quad Y_1 = \frac{P}{2}, \quad X_3 = -\frac{P}{2}, \quad Y_3 = \frac{P}{2} \quad (7)$$

となる。式(6), (7)がこの問題の答である。

(3.2) 支点反力

$$X_1 = -P, \quad Y_1 = -P, \quad Y_4 = P$$

部材内力

$$\begin{aligned} S_{1-2} &= \frac{P}{2}, & S_{2-3} &= -\frac{P}{2}, & S_{3-4} &= -\frac{P}{2}, \\ S_{1-4} &= \frac{P}{2}, & S_{1-3} &= \frac{P}{\sqrt{2}}, & S_{2-4} &= -\frac{P}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3.3a) 反力

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{ql^3}{4h(2h+3l)}, & Y_A &= \frac{qt}{2}, \\ X_D &= -\frac{ql^3}{4h(2h+3l)}, & Y_D &= \frac{ql}{2} \end{aligned}$$

曲げモーメント 点 A, B, C からそれぞれ AB, BC, CD に沿って取った座標を x_1, x_2, x_3 とすると

$$\text{AB間} \quad M = -\frac{ql^3 x_1}{4h(2h+3l)}$$

$$\text{BC間} \quad M = \frac{ql}{2} x_2 - \frac{qx_2^2}{2} - \frac{ql^3}{4(2h+3l)}$$

$$\text{CD間} \quad M = -\frac{ql^3 x_3}{4h(2h+3l)}$$

$$(3.4a)^* \quad S_{(1)} = -0.85P, \quad S_{(2)} = -1.66P, \quad S_{(3)} = -0.40P, \quad S_{(4)} = 0.60P$$

$$S_{(5)} = 0.56P, \quad S_{(6)} = -0.40P, \quad S_{(7)} = -0.22P, \quad S_{(8)} = 2.17P$$

$$S_{(9)} = 1.17P, \quad S_{(10)} = -1.83P, \quad S_{(11)} = -0.83P, \quad S_{(12)} = 3P$$

[B]

(3.1b) 支点反力

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = \frac{P}{4}, \quad X_3 = 0, \quad Y_3 = \frac{3P}{4}$$

部材内力

$$S_{1-2} = -\frac{P}{2}, \quad S_{2-3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}P, \quad S_{1-3} = 0$$

(3.2b) 支点反力

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = -P, \quad X_4 = 0, \quad Y_4 = 2P$$

部材内力

$$S_{1-2} = 1.34P, \quad S_{1-3} = 0.11P, \quad S_{1-4} = -1.05P, \quad S_{2-3} = 0.95P$$

$$S_{2-4} = -0.95P, \quad S_{3-4} = -1.49P$$

(3.3b) 支点反力

$$X_A = 0, \quad Y_A = \frac{L-a}{L}, \quad X_B = 0, \quad Y_B = \frac{a}{L}$$

部材の曲げモーメント

$x_1 =$

$$\text{AB間} \quad M = -\frac{3a(L-a)}{2h(2h+3L)} Px_1$$

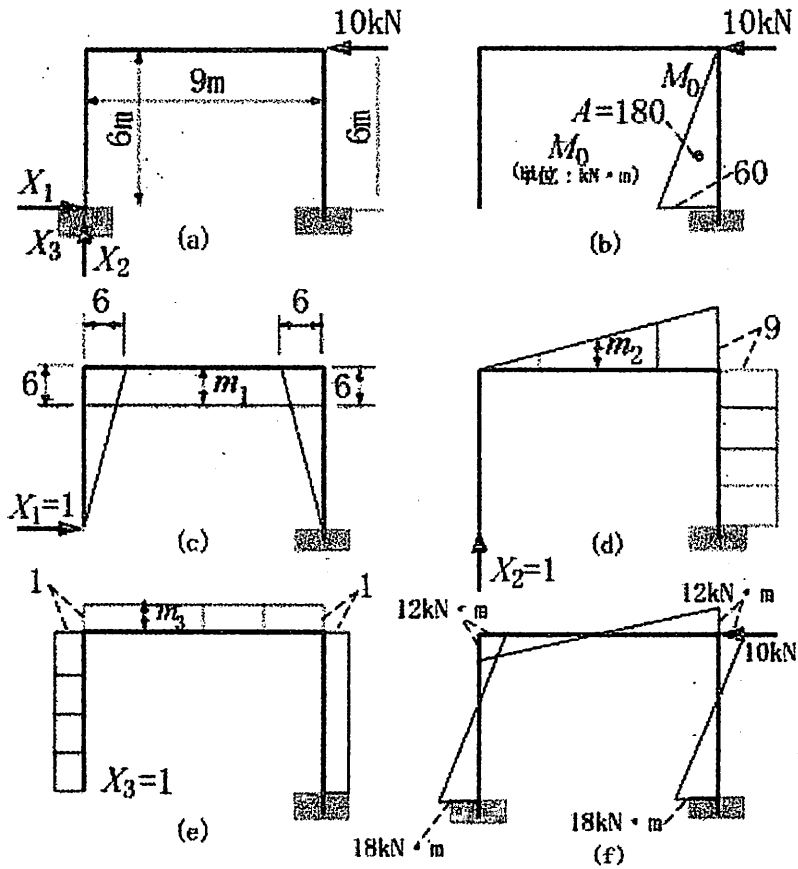
$$\text{BE間} \quad M = \frac{L-a}{L} Px_2 - \frac{3a(L-a)}{2(2h+3L)} P$$

$$\text{EC間} \quad M = \frac{a}{L} P(L-x_2) - \frac{3a(L-a)}{2(2h+3L)} P$$

* 解答の詳細は、関谷、斎藤：機械構造力学、現代工学社（平成4）p.126-129、初版発行いずみ書房（昭40）p.184-185.

CD間 $M = -\frac{3a(L-a)}{2h(2h+3L)} Px_3$

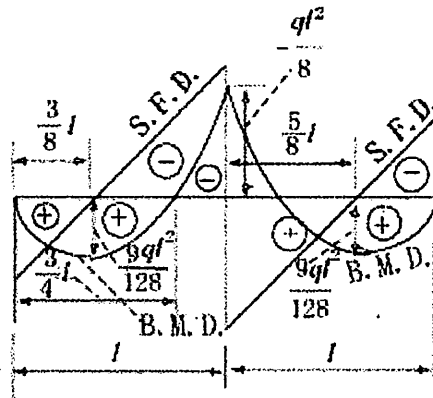
(3.4b)



4章

(4.1a) 反力: $R_A = \frac{3ql}{8}$, $R_B = \frac{5ql}{4}$, $R_C = \frac{3ql}{8}$

せん断力図(S.F.D.)と曲げモーメント図(B.M.D.)



(4.2a) AB, CD の剛度を K_1 , BC の剛度を K_2 とすると

$$K_1 = \frac{I}{h}, \quad K_2 = \frac{I}{l} \quad (1)$$

基準剛度を K_1 とすれば、剛比は式(4.24)より

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{K_1}{K_1} = 1 \\ k_2 &= \frac{K_2}{K_1} = \frac{I/l}{I/h} = \frac{h}{l} = k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

たわみ角式：部材 AB の部材角を Ψ_{AB} として

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2\varphi_A + \varphi_B + \Psi_{AB} + C_{AB} \\ M_{BA} &= \varphi_A + 2\varphi_B + \Psi_{BA} + C_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

部材 BC に対し

$$\left. \begin{aligned} M_{BC} &= k(2\varphi_B + \varphi_C + \Psi_{BC}) + C_{BC} \\ M_{CB} &= k(\varphi_C + 2\varphi_B + \Psi_{BC}) + C_{CB} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

部材 CD に対し

$$\left. \begin{aligned} M_{CD} &= 2\varphi_C + \varphi_D + \Psi_{CD} + C_{CD} \\ M_{DC} &= \varphi_C + 2\varphi_D + \Psi_{CD} + C_{DC} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

節点 A, D は、固定端であるから

$$\varphi_A = \varphi_D = 0 \quad (6)$$

変形前後で、A, B, C, D の位置は不変と考えると

$$\Psi_{AB} = \Psi_{BC} = \Psi_{CD} = 0 \quad (7)$$

部材 AB, CD には中間荷重は作用していないから

$$C_{AB} = C_{BA} = C_{CD} = C_{DC} = 0 \quad (8)$$

部材BCには、単位長さ当り q の等分布荷重が作用しているので、式(4.15)より

$$C_{BC} = -\frac{ql^2}{12}, \quad C_{CB} = \frac{ql^2}{12} \quad (9)$$

節点B, Cの節点方程式は

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\ M_{CB} + M_{CD} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)に式(3)~(9)を代入すると

$$\left. \begin{aligned} 2(1+k)\varphi_B + k\varphi_C &= \frac{ql^2}{12} \\ k\varphi_B + 2(1+k)\varphi_C &= -\frac{ql^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

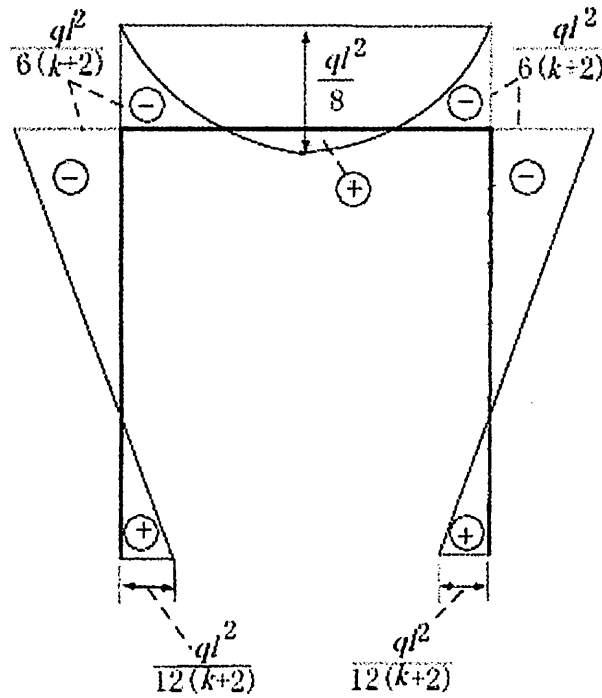
式(11)を φ_B, φ_C について解くと

$$\varphi_B = \frac{ql^2}{12(k+2)}, \quad \varphi_C = -\frac{ql^2}{12(k+2)} \quad (12)$$

式(12)を式(3), (4), (5)に代入し。式(6)~(9)を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{ql^2}{12(k+2)} & M_{BA} &= \frac{ql^2}{6(k+2)} \\ M_{BC} &= \frac{ql^2}{-6(k+2)} & M_{CB} &= \frac{ql^2}{-6(k+2)} \\ M_{CD} &= -\frac{ql^2}{6(k+2)} & M_{DC} &= -\frac{ql^2}{12(k+2)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

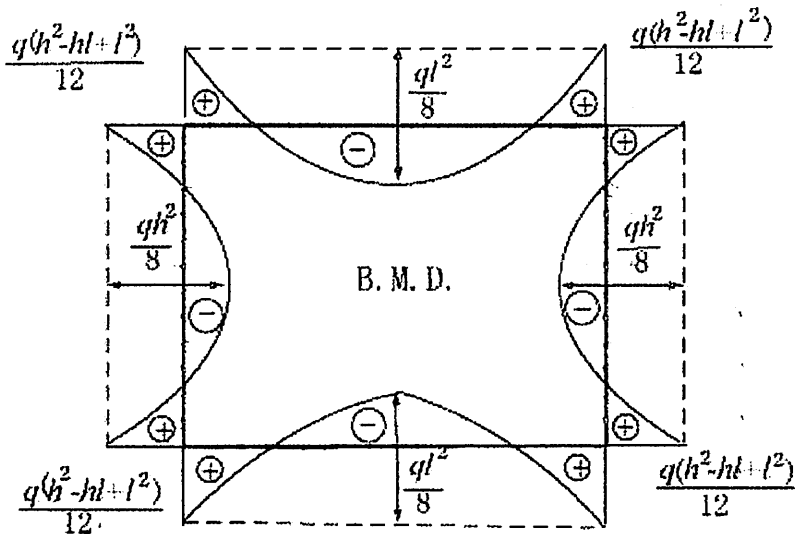
曲げモーメント図は次の図のようである：



(4.3a) 材端モーメント:

$$M_{AB} = M_{BC} = M_{CD} = M_{DA} = -\frac{q(h^2 - hl + l^2)}{12}$$

$$M_{Ba} = M_{cD} = M_{Dc} = M_{aD} = \frac{q(h^2 - hl + l^2)}{12}$$



[B]

(4.1b) 材端モーメント:

$$M_{OA} = -\frac{5}{28}ql^2, \quad M_{AO} = \frac{ql^2}{7}, \quad M_{AB} = -\frac{ql^2}{7}, \quad M_{BA} = 0$$

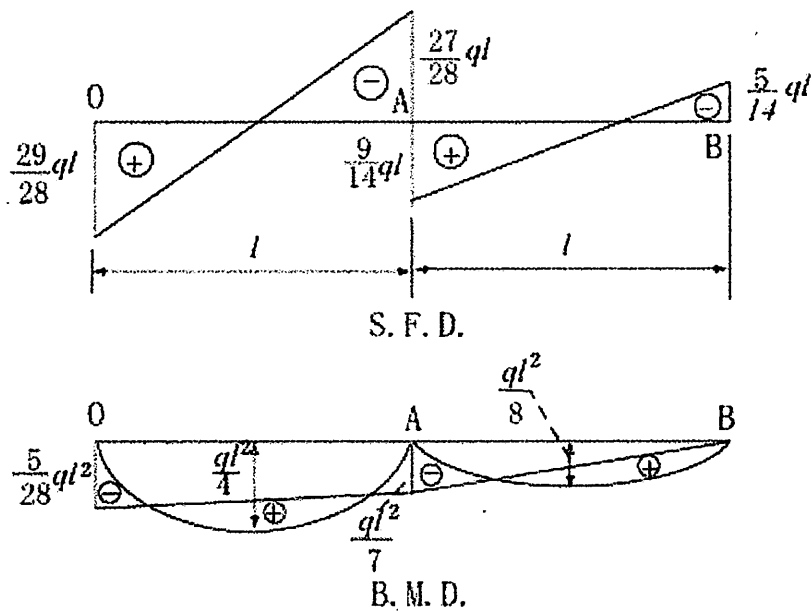
材端せん断力:

$$S_{OA} = -\frac{29}{28}ql, \quad S_{AO} = -\frac{27}{28}ql, \quad S_{AB} = -\frac{9}{14}ql, \quad S_{BA} = -\frac{5}{14}ql$$

支点反力:

$$M_O = -\frac{5}{28}ql^2, \quad R_A = \frac{29}{28}ql, \quad R_B = \frac{45}{28}ql, \quad R_C = \frac{5}{14}ql$$

せん断力図(S.F.D.)と曲げモーメント図(B.M.D.)

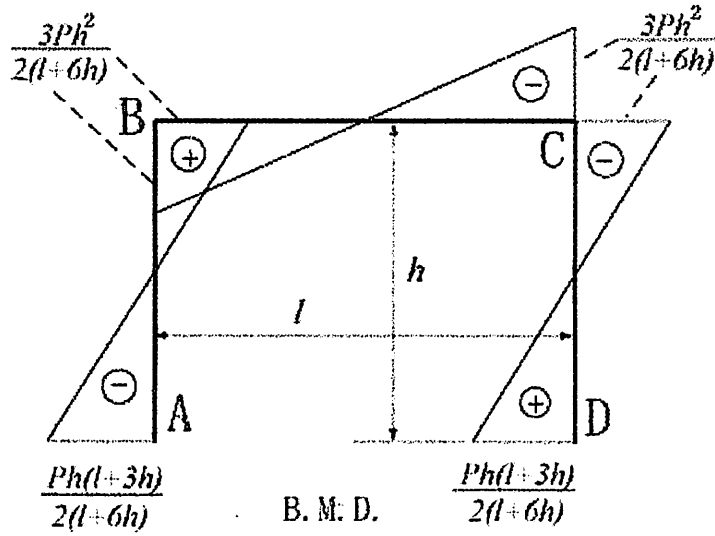


(4.2h) 材端モーメント:

$$M_{AB} = M_{DC} = -\frac{Ph(l+3h)}{2(l+6h)}, \quad M_{BA} = M_{CD} = -\frac{3Ph^2}{2(l+6h)}$$

$$M_{BC} = M_{CB} = \frac{3Ph^2}{2(l+6h)}$$

曲げモーメント図:



(4.3b) 材端モーメント :

$$M_{AB} = -\frac{6EI\delta}{l(6h+l)}, \quad M_{BA} = \frac{6EI\delta}{l(6h+l)}$$

$$M_{BC} = -\frac{6EI\delta}{l(6h+l)}, \quad M_{CB} = -\frac{6EI\delta}{l(6h+l)}$$

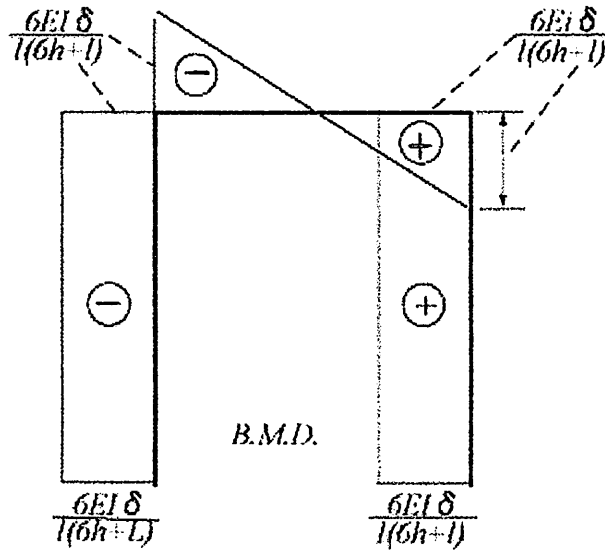
$$M_{CD} = \frac{6EI\delta}{l(6h+l)}, \quad M_{DC} = -\frac{6EI\delta}{l(6h+l)}$$

材端せん断力 :

$$S_{AB} = S_{BA} = S_{CD} = S_{DC} = 0$$

$$S_{BC} = -S_{CB} = \frac{12EI\delta}{l^2(6h+l)}$$

曲げモーメント図 :



5章

(5.1a) 構造全体の剛性マトリックス:

$$\begin{Bmatrix} X_1 = 0 \\ Y_1 = -P \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

この式の上部2行、正方形マトリックス(6行、6列)の左より2列の部分マトリックスを考えると

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ PL \\ -\frac{AE}{L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

この式を u_1 , v_1 について解くと

$$u_1 = \frac{(3-\sqrt{3})PL}{8AE}, \quad v_1 = -\frac{(3+\sqrt{3})PL}{8AE} \quad (\text{答}) \quad (3)$$

式(1)両辺の3行~6行目を取り出し、支点条件 $u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = 0$ を考えると

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式(3)を式(4)に代入し、支点反力は

$$X_2 = -\frac{\sqrt{3}P}{4}, \quad Y_2 = \frac{P}{4}, \quad X_3 = \frac{\sqrt{3}P}{4}, \quad Y_3 = \frac{3P}{4} \quad (\text{答}) (5)$$

部材内力

$$S_{1-2} = \frac{P}{2}, \quad S_{1-3} = \frac{\sqrt{3}P}{2} \quad (\text{答}) (6)$$

(5.2a)

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3=0 \\ Y_3=0 \\ X_4=0 \\ Y_4=0 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式(3)を u_3, v_3, u_4, v_4 について解き、その結果を式(2)右辺に代入すると、未知反力 X_1, Y_1, X_2, Y_2 が得られる。その結果は

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{Pl}{(3+4\sqrt{2})AE} \begin{Bmatrix} 9+4\sqrt{2} \\ 1+2\sqrt{2} \\ 2(5+3\sqrt{2}) \\ -2(1+\sqrt{2}) \end{Bmatrix} \quad (\text{答})$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \frac{P}{3+4\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} -2-2\sqrt{2} \\ -3-4\sqrt{2} \\ -1-2\sqrt{2} \\ 3+4\sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad (\text{答})$$

部材内力：式(5.27)より

$$S_{1-2} = 0, \quad S_{1-3} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{3}}P, \quad S_{1-4} = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}P,$$

$$S_{2-3} = -\frac{4+\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}P, \quad S_{2-4} = -\frac{2(1+\sqrt{2})}{3+4\sqrt{2}}P, \quad S_{3-4} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}P \quad (\text{答})$$

(5.3a) 全構造の剛性方程式

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ L \\ Y_2 = -P \\ M_2 = 0 \\ l \\ Y_3 \\ M_3 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 L = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 L \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 L = 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

この式の3～4行目より

$$-P = \frac{EI}{L^3} \times 24v_2, \quad 0 = \frac{EI}{L^3} \times 8\theta_2 L$$

$$\therefore v_2 = -\frac{PL^3}{24EI}, \quad \theta_2 = 0 \quad (2)$$

式(1)の1～2行目より

$$Y_1 = \frac{EI}{L^3} \times (-12) \times \left(-\frac{PL^3}{24EI}\right) = \frac{P}{2}, \quad \frac{M_1}{L} = \frac{EI}{L^3} \times 6 \times \left(-\frac{PL^3}{24EI}\right) = -\frac{P}{4} \quad (3)$$

式(1)の5～6行目より

$$Y_3 = \frac{EI}{L^3} \times (-12) \times \left(-\frac{PL^3}{24EI}\right) = \frac{P}{2}, \quad \frac{M_3}{L} = \frac{EI}{L^3} \times (-6) \times \left(-\frac{PL^3}{24EI}\right) = \frac{P}{4} \quad (4)$$

材料力学でのせん断力 Q は

$$1-2 \text{ 間で } Q = Y_1 = \frac{P}{2}, \quad 2-3 \text{ 間で } Q = -Y_3 = -\frac{P}{2} \quad (5)$$

材料力学での曲げモーメント M は

$$1-2 \text{ 間で } M = -\frac{PL}{4} + \frac{P}{2}x, \quad 2-3 \text{ 間で } M = -\frac{PL}{4} + \frac{P}{2}x' \quad (6)$$

ここで x = 節点1から右向きにはりの軸に沿って取った座標

x' = 節点3から左向きにはりの軸に沿って取った座標

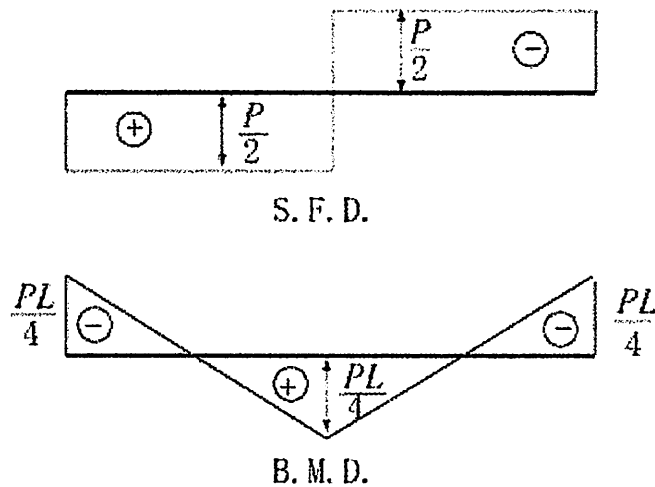
$$\therefore x' = 2L - x \quad (7)$$

$$\text{節点1で } x = 0 \quad M = -\frac{PL}{4} \quad (8)$$

節点2で $x = x' = L$ $M = \frac{PL}{4}$

節点3で $x' = 0$ $M = -\frac{PL}{4}$

以上より次のせん断力図(S.F.D.)、曲げモーメント図(B.M.D.)を得る。



(5.4a) 節点数は4で、各節点に対し x , y 方向の変位成分 u_i , v_i , 回転 θ_i ($i=1, 2, 3, 4$) の3変位成分が考えられるから、構造全体の剛性マトリックスは 12×12 となる。ここで簡単のため次の記号を用いる：

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2EI_1}{h}, & b &= \frac{2EI_2}{L}, & c &= \frac{6EI_1}{h^2} \\ d &= \frac{6EI_2}{L^2}, & e &= \frac{12EI_1}{h^3}, & f &= \frac{6EI_2}{L^3} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

部材 1-2 の剛性マトリックス K_{1-2} は、題意により式(5.68)で $EA/h = EA/L = 0$ として

$$K_{1-2} = \begin{bmatrix} e & 0 & c & -e & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 2a & -c & 0 & a \\ -e & 0 & -c & e & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a & -c & 0 & 2a \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$K_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2f & -d & 0 & -2f & -d \\ 0 & -d & 2b & 0 & d & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2f & d & 0 & 2f & -d \\ 0 & -d & b & 0 & d & 2b \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$K_{3-4} = \begin{bmatrix} e & 0 & -c & -e & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 2a & c & 0 & a \\ -e & 0 & -c & e & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & a & c & 0 & 2a \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(2), (3), (4)のマトリックスを0を補って12行12列の全構造のスケールまで拡張してから加え合わせると、全構造の剛性マトリックスは、次のようになる：

$$K = \begin{bmatrix} e & 0 & c & -e & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 2a & -c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e & 0 & -c & e & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2f & -d & 0 & -2f & -d & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & a & -c & -d & 2a+2b & 0 & d & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & -c & -e & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2f & d & 0 & 2f & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d & b & -c & d & 2a+2b & c & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e & 0 & c & e & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & a & c & 0 & 2a \end{bmatrix} \quad (5)$$

固定端条件 $u_1 = v_1 = \theta_1 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$ により、この零変位に対応する行と列を、式(5)のマトリックスから消し去り、変形の対象性 $u_2 = u_3$, $\theta_2 = \theta_3$ を考慮し、さらに部材1-2, 3-4の軸方向の伸縮がないものとして $v_2 = v_3 = 0$ とすると、剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} X_2 = \frac{P}{2} \\ M_2 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e & -c \\ -c & 2a+3b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

となる。式(6)を u_2 , θ_2 について解けば

$$u_2 = \frac{7PL^3}{192EI}, \quad \theta_2 = \frac{PL^2}{32EI} \quad (7)$$

この結果を、式(5)の剛性マトリックスに対応する剛性方程式に代入すると、各節点に作用する外力が得られる。1行目から3行目を順に計算すると

$$X_1 = -eu_2 + c\theta_2 = -\frac{24EI}{L^3} \times \frac{7PL^3}{192EI} + \frac{12EI}{L^2} \times \frac{PL^2}{32EI} = -\frac{P}{2}$$

$$Y_1 = 0$$

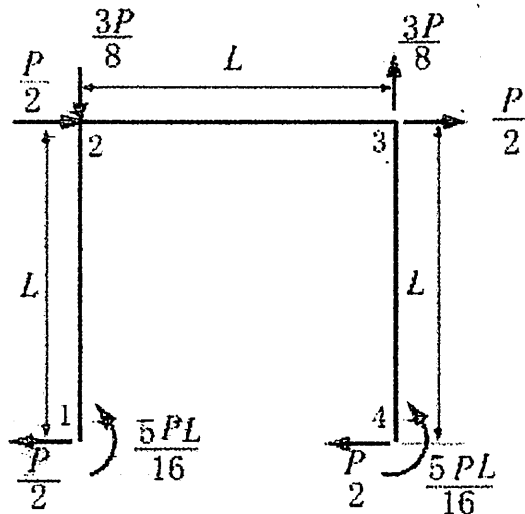
$$M_1 = -cu_2 + a\theta_2 = -\frac{12EI}{L^2} \times \frac{7PL^3}{192EI} - \frac{4EI}{L} \times \frac{PL^2}{32EI} = -\frac{5PL}{16}$$

4行目から1.2行目も同様に計算すると、詳細は略すが、次の結果を得る：

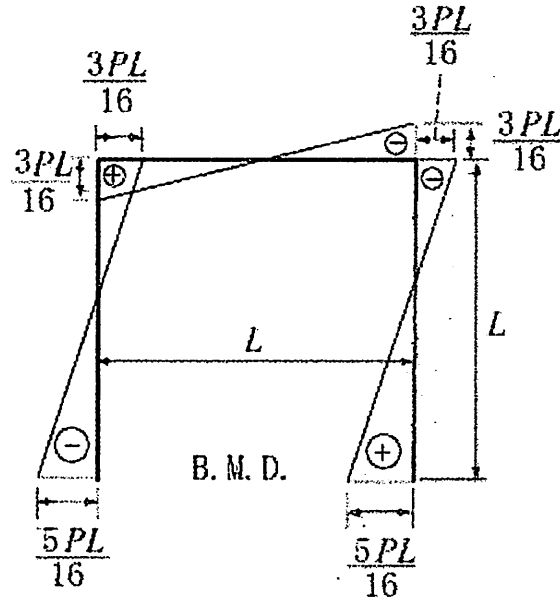
$$X_2 = \frac{P}{2}, Y_2 = -\frac{3P}{8}, M_2 = 0, X_3 = \frac{P}{2}, Y_3 = \frac{3P}{8}, M_3 = 0,$$

$$X_4 = -\frac{P}{2}, Y_4 = 0, M_4 = -\frac{5PL}{16}$$

以上より分かるように、問題で与えられた外力以外に0でない外力 $Y_2 = -Y_3 = -3P/8$ が、作用していなければならないということになる。このことは、この問題を解くに当って、計算の簡単化のために設定した仮定 $EA/L = 0$, $u_2 = u_3$, $\theta_2 = \theta_3$ によるものと思われ、この仮定を設けずに、問題を解けば、 $Y_2 = Y_3 = 0$ となるであろう。この仮定なしに問題を解くことは、複雑であるが、構造の寸法や縦弾性係数の数値が与えられていれば、コンピューターにより容易に解くことができる。以上で求めた各節点の外力、外偶力を図示すれば、次の図となる：



この図の外力、外偶力を考慮して、各部材の曲げモーメント（材料力学での）を求めることができ、その結果の曲げモーメント図を示すと次の図となる：



(B)

$$(5.1b) \quad \begin{cases} X_2 = -P_1 \\ Y_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ Y_3 = -P_2 \end{cases} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{cases} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{cases} \quad (1)$$

この方程式を u_2, v_2, u_3, v_3 について解けば

$$u_2 = \frac{(1+2\sqrt{2})(P_2 - P_1)}{AE}, \quad v_2 = \frac{(P_1 - P_2)L}{AE} \quad (2)$$

$$u_3 = \frac{\left\{ (1+2\sqrt{2})P_1 + 2(1+\sqrt{2})P_2 \right\} L}{AE}, \quad v_3 = \frac{(1+2\sqrt{2})(P_1 - 2P_2)L}{AE} \quad (3)$$

この結果をを式(5.27)に代入し、支点条件 $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$ を用いると

$$S_{1-2} = \sqrt{2}(P_2 - P_1), \quad S_{1-4} = 0, \quad S_{2-3} = P_2, \quad S_{3-4} = -\sqrt{2}P_2, \quad S_{2-4} = P_1 - P_2 \quad (4)$$

支点反力は次の式から得られる：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式(2), (3)の u_2, v_2, u_3, v_3 を式(5)に代入し、支点反力は

$$X_1 = P_1 - P_2, \quad Y_1 = P_1 - P_2, \quad X_4 = P_2, \quad Y_4 = 2P_2 - P_1$$

(5.2b) 構造全体の剛性方程式:

$$\begin{Bmatrix} X_1 = 0 \\ Y_1 = -P \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{8} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{8} & \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式(1)の1~2行目を取り出すと

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)u_1 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{8}\right)v_1 \\ -P &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{8}\right)u_1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)v_1 \end{aligned} \right\}$$

この式を小数で書き換えると

$$\left. \begin{aligned} 0.5700596u_1 - 0.0214467v_1 &= 0 \\ -0.0214467u_1 + 2.0030723v_1 &= -P \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

この連立方程式を u_1, v_1 について解くと

$$u_1 = 0.0187896 \frac{PL}{AE} \approx 0.0189 \frac{PL}{AE}, \quad v_1 = -0.4994342 \frac{PL}{AE} \approx -0.499 \frac{PL}{AE} \quad (\text{答}) \quad (3)$$

支点反力：式(1) 3～8行に式(3)を代入し

$$X_2 = -0.183P, \quad Y_2 = 0.183P, \quad X_3 = 0, \quad Y_3 = 0.499P, \quad X_4 = 0.183P, \quad Y_4 = 0.317P \quad (\text{答})$$

部材内力：

$$S_{1-2} = 0.259P, \quad S_{1-3} = 0.499P, \quad S_{1-4} = 0.366P \quad (\text{答})$$

(5.3b) はり全体の剛性方程式：

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_1 \\ \frac{M_1}{L} \\ Y_2 = 0 \\ \frac{M_2 = M}{L} \\ Y_3 \\ \frac{M_3}{L} \end{array} \right\} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 24 & 0 & -12 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 8 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} v_1 = 0 \\ \theta_1 L = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 L \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 L = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

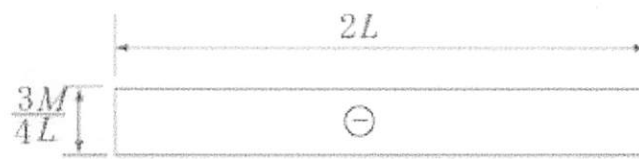
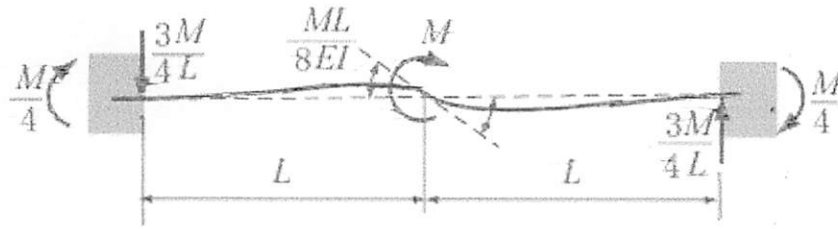
この式(1) 3～4行目より

$$v_2 = 0, \quad \theta_2 = \frac{ML}{8EI} \quad (2)$$

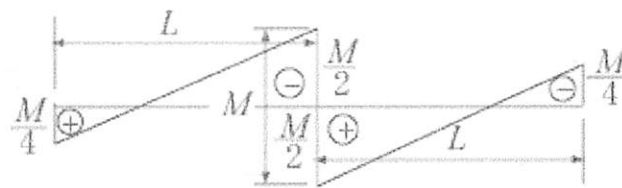
式(2)を式(1) 1～2行目、5～6行目に代入し

$$Y_1 = -\frac{3M}{4L}, \quad M_1 = \frac{M}{4}, \quad Y_3 = \frac{3M}{4L}, \quad M_3 = \frac{M}{4} \quad (3)$$

以上の結果を図示すると



S. F. D.



B. M. D.

(6.4b) 全構造の剛性マトリックス :

$$K = \begin{bmatrix}
 u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 & u_3 & v_3 & \theta_3 & u_4 & v_4 & \theta_4 \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
 e & 0 & c & -e & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c & 0 & 2a & -c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -e & 0 & -c & e & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & e & -c & 0 & -e & -c & 0 & 0 & 0 \\
 c & 0 & a & -c & -c & 4a & 0 & -c & -a & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & -c & -e & 0 & -c \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -e & c & 0 & e & c & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -c & a & -c & c & 4a & c & 0 & a \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e & 0 & c & e & 0 & c \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & a & c & 0 & 2a
 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{array}
 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$a \equiv \frac{2EI}{L}, \quad c \equiv \frac{6EI}{L^2}, \quad e \equiv \frac{12EI}{L^3} \quad (2)$$

と置いた。また、部材の軸方向の伸縮を無視し、伸縮に係る変位の項を除外するため、以後

$$\frac{AE}{L} = 0 \quad (3)$$

と仮定する。さらに、各部材の伸縮変形がないことより、次のように仮定する：

$$v_2 = 0, \quad u_2 = u_3, \quad v_3 = v_4 = -\delta, \quad \theta_2 = \theta_3 \quad (4)$$

以上のように仮定することによって、数式は非常に簡単になり、手計算で問題を解くことができる。しかし、このような単純化によって、少し無理が出てきて、一部の節点に予想していない外力を加える必要が生じる。ラーメンの固定条件より

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = u_4 = \theta_4 = 0, \quad v_4 = -\delta \quad (5)$$

式(1)の4、6行目あるいは7、9行目に対応する剛性方程式を考え、条件(4)、(5)を考慮すると、 u_2 、 θ_2 を未知数とする連立2元1次方程式

$$\begin{bmatrix} e & -c \\ -c & 5a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ c\delta \end{Bmatrix} \quad (6)$$

を得る。この方程式を u_2 、 θ_2 について解けば、式(4)を考慮して

$$u_2 = u_3 = \frac{3\delta}{7}, \quad \theta_2 = \theta_3 = \frac{6\delta}{7L} \quad (7)$$

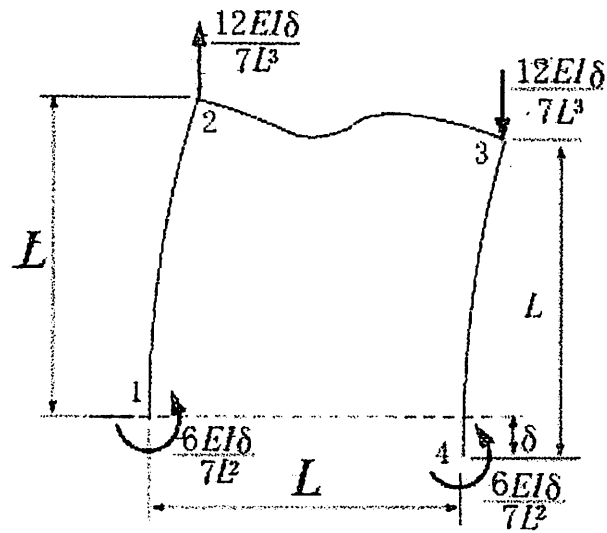
この結果を式(1)の1～12行目に対応する剛性方程式に代入すると、各節点に作用する外力（節点1、4に対しては固定端の反力と反偶力（固定モーメント）、節点2、3に対してはこれらの節点に加わる外力（荷重））を得る。その結果は次のようである：

$$\left. \begin{array}{l} X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad M_1 = -\frac{6EI\delta}{7L^2}, \quad X_2 = 0, \quad Y_2 = \frac{12EI\delta}{7L^3}, \quad M_2 = 0 \\ X_3 = 0, \quad Y_3 = -\frac{12EI\delta}{7L^3}, \quad M_3 = 0, \quad X_4 = 0, \quad Y_4 = 0, \quad M_4 = -\frac{6EI\delta}{7L^2} \end{array} \right\} \quad (8)$$

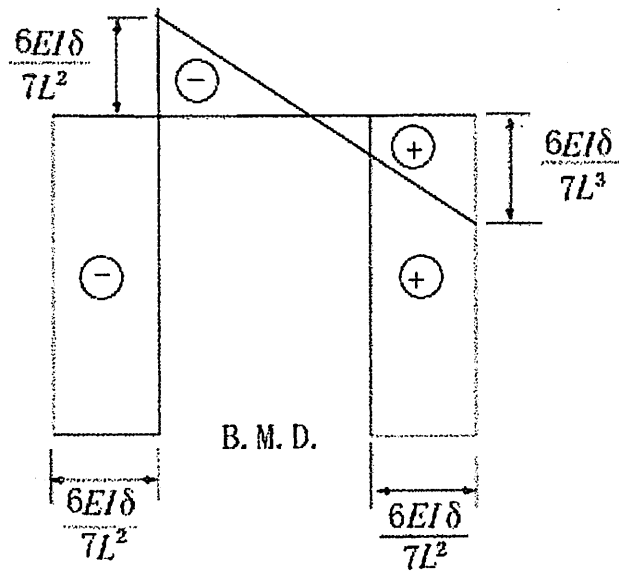
以上で得られた、各節点の外力（荷重と固定端の反力、反偶力（固定モーメント））の結果を図示すれば、次に示す図のようになる。この図に見るように、本来の問題で想定していなかった荷重（節

点2での上向き鉛直荷重 $\frac{12EI\delta}{7L^3}$ 、節点3での下向き鉛直荷重 $\frac{12EI\delta}{7L^3}$ ）が、このラーメンに外力と

して与えられて加えられている問題に変更しないと、この問題のラーメン全体の外力、外偶力の釣り合い条件は満たされない。したがって、本来の問題を、節点2、3に上に述べた鉛直荷重が加わって、支点4が δ だけ沈下する場合という問題（次に示されている図）に変更する必要がある。



この図を見れば、構造全体の外力および外力のモーメント（節点 2, 3 の荷重（偶力となっている）と節点 1, 4 の固定モーメント（偶力））が釣り合っていることが分かるであろう。この図より材料力学の曲げモーメント図を描けば次のようになる：



索引

あ行	
影響線-----	12
応力-----	134
応力マトリックス-----	93
か行	
外的不静定トラス-----	48
回転支点-----	1
外力-----	1
荷重-----	1
過剰反力-----	55
片持ばり-----	139
滑節-----	2
基準座標系-----	90
境界条件(はりの)-----	139
局所座標系-----	90
偶力-----	128
偶力の腕の長さ-----	129
クルマン(Culmann)の方法-----	8
剛性マトリックス-----	91
剛節-----	2
構造解析-----	1
剛体-----	129
剛度-----	76
剛比-----	76
固定支点-----	1
固定端-----	139
さ行	
材端せん断力-----	66
材端変位-----	91
材端モーメント-----	66
材端力-----	91
自由端-----	140
図心軸-----	137
すべり支点-----	1
	静定トラス-----2
	切断法-----8
	節点-----2
	節点法-----3
	節点方程式-----77
	せん断力-----135
	せん断力図(S.F.D.)-----137
	層方程式-----78
た行	
	縦弾性係数-----135
	たわみ角法-----66
	たわみ曲線-----138
	たわみの微分方程式(はりの) --137
	単位仮想荷重-----26
	単位仮想荷重の方法-----24, 33
	単純支持端-----139; 140
	弾性曲線-----138
	力の解析的表示(2次元の場合)----124
	力の合成-----122
	力の作用線-----122
	力の三角形-----122
	力の三要素-----122
	力の多角形-----125
	力の平行四辺形-----122
	力の分解-----123
	力のモーメント-----127
	中空丸棒(同心円形断面棒)-----141
	中間荷重-----73
	長方形断面棒-----141
	トラス-----2
	トラスの変形-----24
な行	
	内的不静定トラス-----48
	内力-----3, 134

2回積分法	138
ねじり(棒の)	140

は行

半図式積分法	35
反力	1
ひずみ	134
ひずみエネルギー(引張、圧縮)	24
ひずみエネルギー(はりの曲げ)	30
不静定トラス	2, 48
フックの法則(一般化された)	26
部材	2
部材角、部材回転各	73
分布荷重	137
ベクトル(ベクトル量)	122
ベッチの相反定理	24
骨組	2

ま行

曲げ剛性(はりの)	138
曲げモーメント	135
曲げモーメント図(B.M.D.)	137
マトリックス法	90
丸棒(円形断面棒)	140
モーメントの腕の長さ	127
モーメントの中心	127

や行

ヤング率	135
4回積分法	139

ら行

ラーメン	2
ラーメンの変形	36
リッター(Ritter)の方法	8
立体トラス	15
連続ばり	79

著者紹介

関谷 壮 (せきやつよし)

1921年生 (大阪府)

大阪府立大学名誉教授

大阪電気通信大学名誉教授

工学博士